

ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τρεῖς εἶναι οἱ κυριώτεροι δρόμοι στοὺς ὁποίους προχωρεῖ ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα:

1) Ἡ ἀναζήτησις νέων θεωρημάτων γιὰ μαθηματικὲς ἔννοιες ποὺ ἔχουν χρησιμοποιεθῆ στὸ παρελθόν.

Ἡ κατεύθυνση αὐτὴ εἶναι, ἀπὸ τὴν Ἀναγέννηση καὶ πέρα, ἐκείνη ὅπου γίνονται οἱ (ἀριθμητικὰ) περισσότερες προσπάθειες. Εἶναι ἡ κατεύθυνση ποὺ προσφέρει στὴν Μαθηματικὴ ἐπιστὴμὴ τὰ ἀπολύτως νέα γεγυγνόμενα, μικρὰ ἢ μεγάλα, εἰδικῆς ἢ γενικῆς σημασίας.

Ἡ μαθηματικὴ αὐτὴ κατεύθυνση θυμίζει τὴν κατεύθυνση ἐκείνη τῶν Φυσικῶν ἐπιστημῶν ὅπου ὁ ἐρευνητὴς ἀναζητεῖ νέα φυσικὰ φαινόμενα, νέες πειραματικὲς διαπιστώσεις, ἢ νέα θεωρήματα στὶς προϋπάρχουσες φυσικὲς θεωρίες.

Οἱ ἐρευνηταὶ ποὺ προχωροῦν σ' αὐτὸ τὸ δρόμο ἀνακαλύπτουν καὶ συγκεντρώνουν τὰ ὑλικά μὲ τὰ ὁποῖα οἱ ἀρχιτέκτονες τῆς ἐπιστῆμης (ποὺ ἐνδέχεται νὰ εἶναι καὶ οἱ ἴδιοι) θὰ συνθέσουν τὰ οἰκοδομήματα ἐπιστημονικῶν γεγονότων ποὺ οἱ ἄνθρωποι ἀποκαλοῦν «θεωρίες».

2) Ἡ ἀναζήτησις νέων μαθηματικῶν θεωριῶν (= συνθέσεων) καὶ νέων μαθηματικῶν ἐννοιῶν.

Στὴν κατεύθυνση αὐτὴν προχωρεῖ ἡ ἀρχιτεκτονικὴ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστῆμης.

Ἀνάλογη διαπίστωση θὰ μπορούσε νὰ κάνη κανεὶς καὶ γιὰ τὶς Φυσικὲς ἐπιστῆμες, μὲ τὴν παρατήρηση ὅμως ὅτι σ' αὐτὲς οἱ θεωρίες εἶναι λιγώτερο ἀξιόπιστες ἀπ' ὅ,τι στὰ Μαθηματικά, ἐπεὶδὴ πίσω ἀπὸ κάθε γενικὸ τύπο τῆς Φυσικῆς ἢ τῆς Χημείας καὶ πίσω ἀπὸ κάθε πόρισμα τῶν Φυσιογνωστικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς Ἰατρικῆς βρίσκεται κάποια (ἐνδεχομένως σιωπηλὴ) ἀτελὴς ἐπαγωγή.

Ἡ ἀναζήτηση μαθηματικῶν ἐννοιῶν ἀρχίζει συνήθως μὲ τὸν σκοπὸ νὰ δώσουμε νέα (οὐσιαστικώτερη, πυκνότερη, πιὸ εὐχρηστὴ ἢ πιὸ κατάλληλη γιὰ ὠρισμένες μελέτες) μορφή σὲ προϋπάρχουσες μαθηματικὲς θεωρίες, μὰ συχνὰ καταλήγει στὸ νὰ προσφέρη νέα ἐδάφη στὴν μαθηματικὴ ἔρευνα καὶ ἀλήθεια, σ' ὅλες τὶς πνευματικὲς ἐκδηλώσεις τοῦ ἀνθρώπου, εἶναι σπάνιο νὰ θρεθῇ οὐσιαστικὴ ἀναθεώρηση τοῦ παρελθόντος ποὺ νὰ μὴν ἀνοίγῃ κι ἓνα παράθυρο γιὰ τὸ μέλλον.

Ὑπάρχουν ἔννοιες, ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς «συνεχειᾶς» π.χ., ποὺ ἡ διὰ μέσου τῶν αἰώνων καὶ τῶν χιλιετηρίδων μεταβολὴ τους ἀντικατοπτρίζει τὴν πρόοδο τῆς ἴδιας τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, ἴσως μάλιστα καὶ τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως.

Ἡ ἀναζήτηση νέων συνθέσεων συνδέεται συνήθως μὲ τὴν ἀναζήτηση νέων ἐννοιῶν, ἐπεὶδὴ ἡ μία ὁδηγεῖ στὴν ἄλλη. Π.χ. οἱ ἔννοιες «σημείου», «εὐθείας» καὶ «ἐπιπέδου» ποὺ πρῶτοι ἐχρησιμοποίησαν (στοὺς ἱστορικοὺς χρόνους ὅπου μποροῦν νὰ ἐλεγχθοῦν οἱ χρονικὲς προτεραιότητες) οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἦταν φυσικὸ νὰ τοὺς ὁδηγήσουν στὴν ἀνάπτυξη τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας· καθὼς ἄλλωστε ἔδειξε ὁ Hilbert¹ (θὰ τὸ ἐξηγήσουμε αὐτὸ πιὸ πέρα), ὁ ἀκριβὴς μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν «περιέχει» ὅλα τὰ ἀξιώματα τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας.

Ἀπὸ τὴν ἀποψη τοῦ τρόπου ποὺ ὁρίζονται οἱ μαθηματικὲς ἔννοιες, δύο εἶναι οἱ πιὸ μεγάλες ἐποχὲς τῆς ἀνθρωπότητος: I. Ἡ ἀρχαία Ἑλληνικὴ. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες (Θαλῆς, Πυθαγόρας,...) ὑπῆρξαν οἱ πρῶτοι (ὅσο μπορούμε νὰ ξέρουμε), ποὺ χρησιμοποίησαν σὲ ἀποδείξεις μαθηματικῶν θεωρημάτων τελείως ἀφηρημένες γεωμετρικὲς ἔννοιες, ἐμπνευσμένες ἴσως, ἀλλ' ὅχι πιὰ ἐξαρτημένες ἀπὸ τὴν ἐμπειρία. Τὴν μεγάλη σημασία τοῦ πνευματικοῦ αὐτοῦ τολμήματος τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀναλύει παραστατικὰ ὁ Π. Ζερβός,² συνδέοντάς τιν καὶ μὲ γενικώτερες φιλοσοφικὲς τάσεις τῶν προγόνων μας, ποὺ κληροδότησαν στὸ ἀνθρώπινο γένος τὴν ἀφαίρεση.

II. Ἡ ἐποχὴ τῶν ἀφηρημένων μαθηματικῶν, ποὺ ἡ αὐγὴ της ἀνήκει στὸν 19ον αἰῶνα καὶ τὸ μεσουράνημά της στὸν 20όν.

Ἐνα ἀπὸ τὰ οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς εἶναι ἡ ἀπαλλαγὴ τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν ἀπὸ τὰ «ἐξωμαθηματικά» (φιλοσοφικά, ψυχολογικά,...) στοιχεῖα, ποὺ εἶχαν ἐπὶ χιλιετηρίδες ἀπασχολήσει τοὺς φιλοσόφους, χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητα (συνήθως δέ, οὔτε καὶ χρήσιμα) στὸ λογικὸ οἰκοδόμημα

τῶν μαθηματικῶν. Αὐτὸ δὲν σημαίνει βέβαια ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀληθινὰ φιλοσοφικὰ προβλήματα στὰ μαθηματικά· κάθε ἄλλο.

Ἄλλο οὐσιῶδες χαρακτηριστικὸ τῆς ἐποχῆς μας (τὸ θεαματικώτερο, ἴσως, ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως) εἶναι ἡ ἀπελευθέρωσις τῆς φαντασίας τοῦ μαθηματικοῦ ἀπὸ κάθε φραγμὸ πλὴν τῆς λογικῆς ἀντιφάσεως. Ἔτσι, ὁ κόσμος τῶν ἀριθμῶν καὶ ὁ κόσμος τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας, ποὺ γιὰ χιλιάδες χρόνια ἦταν τὰ μοναδικὰ πεδία ἐρεύνης τῶν μαθηματικῶν, δὲν εἶναι πιά παρὰ νησάκια, σημαντικὰ βέβαια, ἐνὸς ὠκεανοῦ χωρὶς τέλος ἀπὸ μαθηματικοὺς κόσμους.

Τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτὰ τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν συνδέονται μὲ τὴν ἔρευνα τῶν «ἀρχῶν» τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, δηλαδὴ τῶν λογικῶν θεμελίων της. Αὕτῃ ἀποτελεῖ μιὰ πολὺ σημαντικὴ κατεύθυνση, ποὺ τὴν ἀναφέρουμε ξεχωριστά.

3. Ἡ ἀναζήτησις μιᾶς ἰκανοποιητικῆς λογικῆς θεμελιώσεως τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τὰ προβλήματα ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν αὐτῇ.

Τὰ ζητήματα ποὺ ἐντάσσονται στὴν κατεύθυνση αὕτῃ παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον γιὰ κάθε ἄνθρωπο, γιατί ἀφοροῦν τὴν ἴδια τὴν ὑφὴ τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως. Θὰ προσπαθῶ λοιπὸν σ' αὐτὸ τὸ ἄρθρο καὶ σὲ μερικὰ ἄλλα πού, ἂν θέλῃ ὁ Θεός, θὰ ἐπακολουθήσουν, νὰ κατατοπίσω τὸν ἀναγνώστη γύρω σ' αὐτὰ τὰ θέματα. Ἡ σχεδὸν χωρὶς σύμβολα ἀνάπτυξη ποὺ θὰ κάνουμε ὀφείλεται ὅχι μόνον στὸ ὅτι ἀπευθυνόμαστε σ' ὅλους ἀνεξαιρέτως τοὺς ἀναγνώστες ἀλλὰ καὶ στὸ ὅτι, κατὰ τὴν γνώμη μου, στὴν εἰσαγωγὴ τουλάχιστον στὰ ζητήματα αὐτὰ δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦνται εἰδικὰ σύμβολα ἢ τεχνάσματα ποὺ νὰ συσκοτίζουν τὶς ὑποθέσεις ποὺ κάνουμε, ὑποθέσεις ποὺ βρίσκονται στὶς ρίζες τῆς ἀνθρωπίνης λογικῆς, ὅπως τουλάχιστον αὕτῃ ἐμφανίζεται σήμερα.

Ἡ ἱστορία τῆς τρίτης κατευθύνσεως εἶναι κάπως παράξενη· πράγματι, στοὺς ἱστορικοὺς τουλάχιστον χρόνους (γιὰ τοὺς ὁποίους καὶ μποροῦμε νὰ ἔχουμε μερικὰ ἀντικειμενικὰ στοιχεῖα) ἡ ἀνθρωπότης προχώρησε ἀποφασιστικὰ στὴν κατεύθυνση αὕτῃ σὲ δυὸ μόνον ἐποχές, στὴν ἀρχαία Ἑλληνικὴ καὶ στὰ τελευταῖα ἐκάτὸν πενήντα χρόνια· καὶ μάλιστα, μόνις στὸ δεύτερο ἡμισυ τοῦ 19ου αἰῶνος ξανάφθασαν, στὴν κατεύθυνση αὕτῃ, οἱ μαθηματικοὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων· ἐπίπεδον ποὺ ξεπεράστηκε μόνις στὰ τελευταῖα ἐξήνταπέντε χρόνια καὶ μόνον σὲ μερικὰ σημεία του. Ὁ Πλάτων, ὁ Εὐδόξος, ὁ Ζήνων, ὁ Ἐλεάτης καὶ ὁ Ἀρχιμήδης δὲν εἶναι ἀπλῶς ἐμπνευσμένοι πρόδρομοι τῶν νεωτέρων ἐρευνῶν ἀλλὰ δίνουν τὴν ἐντύπωση ἀπολύτως συγχρόνων μαθηματικῶν· ὁ Πλάτων εἶδε καθαρὰ τὸν ρόλο τῆς ὑποθέσεως στὰ μαθηματικά καί, γενικώτερα, στὴν ἐπιστήμη. Νά, ἓνα ἀπόσπασμα Πλατωνικοῦ διαλόγου ἀπὸ τὴν Πολιτεία:

Πλάτων: Δὲν ἀγνοεῖς, φαντάζομαι, ὅτι οἱ ἀσχολούμενοι μὲ τὴν γεωμετρίαν καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ὑποθέτουν δύο εἶδη ἀριθμῶν, τὸν περιττὸν καὶ τὸν ἄρτιον, τὰ σχήματα, τρία εἶδη γωνιῶν καὶ καθ' ἐξῆς, ἀναλόγως τοῦ ζητουμένου· καὶ ἀφοῦ κάμουν αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις, τὰς θεωροῦν ὡς ἀληθείας εἰς πάντας φανεράς, χωρὶς νὰ δίδουν λόγον οὔτε εἰς αὐτοὺς τοὺς ἰδίους, οὔτε εἰς τοὺς ἄλλους. Ἀναχωροῦντες λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις καταλήγουν δι' ἀλύσεως προτάσεων εἰς συμπέρασμα, τὸ ὁποῖον ἤθελαν νὰ δείξουν.

.....

Πλάτων: Αὐτὰ τὰ σχήματα λοιπὸν, τὰ διὰ τῆς διανοίας μόνον συλλαμβανόμενα διὰ νὰ συλλάβῃ ἡ ψυχὴ εἶναι ἡναγκασμένη νὰ χρησιμοποιήσῃ ὑποθέσεις, ὅχι διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πρώτην ἀρχήν, διότι δὲν δύναται νὰ χωρήσῃ πέραν τῶν ὑποθέσεων (εἰς τὸ κεῖμενον: οὐ δύναται τῶν ὑποθέσεων ἀνωτέρω ἐκβαίνειν) ἀλλὰ μεταχειρίζεται εἰκόνας (δηλαδή, τὰ αἰσθητὰ καὶ ὑλικά πράγματα), ἐκλέγουσα ἐκείνας, αἵτινες σχετικῶς πρὸς τὰ (νοητὰ) ἀντικείμενα (τὰ ὁποῖα ἀπεικονίζουν) φαίνονται ἐναργέστεραι. (Πολιτείας στ. XX—XXIb).

Καθὼς παρετήρησε ὁ Π. Ζερβός,² οἱ ἀπόψεις ποὺ ἀναπτύσσει σχετικῶς ὁ Ηenri Poincaré³ στὴν Εἰσαγωγὴ του στὸ περιώνυμον βιβλίον του «Ἐπιστήμη καὶ Ὑπόθεσις» δὲν διαφέρουν οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὶς ἀπόψεις αὐτὲς τοῦ Πλάτωνος. Ἐπειτα ἀπὸ τὴν διαπίστωση αὕτῃ, εἶναι ν' ἀναρωτιέται κανεὶς ἂν δὲν θὰ πρέπει νὰ δῇ μέσα στὶς πυκνὲς αὐτὲς

Πλατωνικές σκέψεις και τις αντιλήψεις που εισηγήαγε το 1899 ο Hilbert¹ στα μαθηματικά...

Αναγκάζεται λοιπόν να δεχθῇ κανείς ότι ο Πλάτων στα ζητήματα τῆς φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν βρισκόταν πιὸ ἐμπρὸς κι ἀπ' αὐτὸν τὸν Εὐκλείδη.

Γιὰ τὸ θέμα αὐτὸ θὰ μπορέσῃ νὰ σχηματίσῃ δική του γνώμη ὁ ἀναγνώστης στὸ τέλος τοῦ σημερινοῦ ἀρθροῦ μας· καὶ σ' ἐπόμενα ἀρθρα θὰ μπορέσῃ νὰ διαπιστώσῃ πόσο κοντὰ ἦταν ὁ Εὐδοξος καὶ ὁ Ζήνων σὲ μερικές σύγχρονες σχολές μαθηματικῆς φιλοσοφίας.

Ἄν εἶχε κανεὶς ν' ἀναπτύξῃ σὲ ἀρθρο ἀπευθυνόμενον καὶ σὲ μὴ εἰδικούς ζητήματα σχετικὰ μὲ τὴν πρώτη ἢ τὴν δεύτερη κατεύθυνση καὶ ἂν ἐπιθυμοῦσε νὰ φθάσῃ σύντομα σὲ προβλήματα βασικὰ γιὰ τὴν σημερινή ἐπιστήμη, δὲν θὰ ἤξερε τί νὰ κάνῃ. Στὰ θέματα ὅμως ποὺ ἀφοροῦν τὴν λογικὴ θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν (καὶ ποὺ εἶναι, ἀπὸ μερικές ἀπόψεις, τὰ πιὸ δύσκολα), παρουσιάζεται ἡ θεόπεμπτη εὐκαιρία ὅτι ἀρκεῖ τὸ ὕλικὸ ποὺ μᾶς προσφέρει ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ποὺ διδάσκεται στὸ κλασσικὸ γυμνάσιον γιὰ νὰ μπορούμε νὰ διατυπώσουμε ἀρκετὰ ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν λογικὴ θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν· αὐτὸ καὶ θὰ κάνουμε τώρα.

Ἀκόμη καὶ σήμερα, ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία παρουσιάζει ἓνα μοναδικὸ συνδυασμὸ λογικῆς συνεπειᾶς, αἰσθητικῆς γοητείας καὶ ἀφηρημένης θεωρήσεως γνωρίμων εἰκόνων τοῦ ἀνθρώπου· γι' αὐτὸ καὶ ἀπετέλεσε⁴ τὸ πιὸ συναρπαστικὸ μέρος τῶν γυμνασιακῶν μαθηματικῶν, ἂν καί, δυστυχῶς, οἱ σχολικὲς μεταποιήσεις τῆς σπανίως διατηροῦν τὸ ὕψηλόν ἐπίπεδον λογικῆς συνεπειᾶς ποὺ ἔχει τὸ κείμενον τοῦ Εὐκλείδου.⁵ Θὰ χρησιμοποιήσουμε λοιπὸν τὸ ἴδιο τὸ κείμενον αὐτό, στὴν (σχολιασμένη καὶ μὲ μετάφραση) ἔκδοσιν τοῦ κ. Ε. Σταμάτη.⁶

Ἡ «ἐπίσημη» λογικὴ θεμελίωση τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας ἀποτελεῖται ἀπὸ α') τοὺς ὅρους, β') τὰ αἰτήματα, καὶ γ') τὰς κοινὰς ἐννοίας.

Εἶπαμε «ἐπίσημη» γιατί αὐτὰ τὰ τρία στοιχεῖα προτάσσει ὁ Εὐκλείδης καὶ σ' αὐτὰ ἀναφέρεται στὶς ἀποδείξεις του· ἀποδείξεις ποὺ ἀπετέλεσαν πρότυπο γιὰ τοὺς ἀνθρώπους γιὰ περισσότερα ἀπὸ δυὸ χιλιάδες χρόνια.

Ὁ προσεκτικὸς ἀναγνώστης τῶν Στοιχείων του θὰ ἔχῃ παρατηρήσῃ ὅμως ὅτι, σὲ μερικές ἀποδείξεις χρησιμοποιοῦνται καὶ ἰδιότητες ποὺ εἶναι φανερὲς μὲν στὸ σχῆμα ἀλλὰ ποὺ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν λογικὰ οὔτε ἀπὸ τὰ αἰτήματα, οὔτε ἀπὸ τὰς κοινὰς ἐννοίας καὶ ποὺ δὲν βλέπει κανεὶς σήμερα πῶς μπορεῖ νὰ ἐξαχθοῦν λογικὰ ἀπὸ τοὺς ὅρους. Ὑποπτεύεται λοιπὸν ὁ ἀναγνώστης ὅτι, ἂν δὲν θέλουμε νὰ χρησιμοποιήσουμε καθόλου ἐξωλογικοὺς παράγοντες, ὅπως εἶναι τὰ σχήματα καὶ οἱ ὁπτικὲς ἐντυπώσεις ποὺ δημιουργοῦν, πρέπει νὰ συμπληρώσουμε μὲ μερικὰ αἰτήματα ἀκόμη τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου, ἂν φυσικὰ τοῦτο εἶναι δυνατόν. Εὐτυχῶς, αὐτὸ εἶναι δυνατόν, ὅπως ἔδειξε ὀριστικὰ ὁ Hilbert τὸ 1899, διότι ὁ Εὐκλείδης δὲν ἔχει χρησιμοποιήσει στὶς ἀποδείξεις τίποτε ποὺ νὰ μὴν μπορῇ νὰ ἀναχθῇ σὲ αἰτήματα «ἀνεκτὰ» ἀπὸ τὴν λογικὴ, δηλαδὴ κανένα στοιχεῖον ποὺ νὰ εἶναι ψυχολογικῆς φύσεως, χωρὶς νὰ εἶναι λογικῆς φύσεως· τὸ ἔδειξε αὐτὸ ὁ Hilbert, κατασκευάζοντας ἓνα σύστημα αἰτημάτων ἀπολύτως ἐπαρκὲς γιὰ τὶς λογικὲς ἀνάγκες τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας. Ὅσα ἀπ' αὐτὰ δὲν περιέχονται στὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου, μπορούμε νὰ τὰ θεωρήσουμε σὰν ἓνα τμῆμα τοῦ «ἀνεπισημοῦ» μέρους τῆς λογικῆς θεμελίωσης τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας. Δυὸ ἄλλα τμῆματα τοῦ ἀνεπισημοῦ αὐτοῦ μέρους εἶναι ἡ Ἀριστοτέλειος λογικὴ, ποὺ τὴν χρησιμοποιεῖ σιωπηρὰ ὁ Εὐκλείδης καὶ τὴν θεωρεῖ φανερὰ ὡς τὴν μόνη δυνατὴ λογικὴ, καὶ ἡ ἐννοία τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... μὲ τὶς πιὸ συνηθισμένες μαθηματικὲς ἰδιότητές της. Ὅλα αὐτὰ μαζί, τὸ «ἐπίσημο» καὶ τ' «ἀνεπίσημα» τμῆματα, ἀποτελοῦν ὅ,τι θὰ ὀνομάζουμε «θεμελίωση» τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας. Τὴν θεμελίωση αὕτη θὰ συμβολίζουμε μὲ τὸ Θ, ἐνῶ θὰ συμβολίζουμε μὲ Ε ὅ,τι ἀπομένει ἀπ' αὐτὴν ὅταν τῆς ἀφαιρέσουμε τὰ πρόσθετα αἰτήματα τοῦ Hilbert· τὸ σύνολον τῶν τελευταίων αὐτῶν αἰτημάτων θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ Η.

Ἡ μεγάλη ἐπιτυχία τοῦ Εὐκλείδου (ἀπόρροια βεβαίως καὶ τῶν πνευματικῶν προσπαθειῶν μιᾶς σειρᾶς μεγαλοφυῶν, ἀπὸ τὸν Θαλῆ καὶ τὸν Πυθαγόρα ὡς τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Εὐδοξο) ἦταν ὅτι κατῴρθωσε νὰ «ἀναγάγῃ λογικὰ» ὅλες τὶς γεωμετρικὲς προτάσεις ποὺ ἤξερε στὸ σύνολον Ε ἀπὸ ἐννοίες καὶ ὑποθέσεις, δηλαδὴ σὲ κάτι ἐξαιρετικὰ ἀπλούστερο ἀπὸ τὸ πολὺπλοκο σύνολον ὅλων αὐτῶν τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων.

Μετὰ τὸν Hilbert, ξέρουμε βέβαια ὅτι ἡ «λογικὴ ἀναγωγή» αὕτη τοῦ Εὐκλείδου ἦταν ἀνεπαρκὴς καὶ ὅτι μιὰν ἀληθινὴ ἀναγωγή ἀποκτοῦμε ἂν προσθέσουμε στὸ Ε τὸ Η. Γεννίεται τώρα τὸ ἐρώτημα: Πῶς ἓνας μαθηματικὸς τῆς ἀκριθείας τοῦ Εὐκλείδου δὲν διέκρινε τὴν ἀνάγκη χρησιμοποίησεως καὶ ἄλλων αἰτημάτων;

Στὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι δυνατὲς διάφορες ἀπαντήσεις, μερικές ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἔχουν σχέση καὶ μὲ ἐξωμαθηματικοὺς παράγοντες. Ἐκ πρώτης ὄψεως, θὰ νόμιζε κανεὶς ὅτι ὁ Εὐκλείδης δέχεται σιωπηρὰ μερικές ἀπὸ τὶς μαθηματικῆς φύσεως ἰδιότητες ποὺ τὸ ἀνθρώπινο μυαλὸ ἀποδίδει στὰ σχήματα ποὺ θεωρεῖ στὴν Εὐκλ. γεωμετρία. Ἀλλὰ τότε, γιατί ὁ Εὐκλείδης αἰσθάνεται ὁ ἴδιος τὴν ἀνάγκη νὰ ἀναφέρῃ ρητῶς ὡς αἰτήματα μαθη-

ματικές ιδιότητες αὐτῶν τῶν σχημάτων τόσο φανερὲς ὅπως τὸ αἶτημα «Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν»;

Μιὰ πολὺ ἀνθρώπινη ἀπάντηση στὸ ἐρώτημά μας θὰ ἦταν νὰ ὑποθέσῃ κανεὶς ὅτι, σὰν ἄνθρωπος ὁ Εὐκλείδης, ὅσο μεγάλος κι ἂν ἦταν, δὲν μπόρεσε νὰ τὰ δῇ ὅλα τὰ ἀπαραιτήτα αἰτήματα διὰ μιᾶς καὶ νὰ τὰ ἀναγράψῃ· ἡ ἀμέλειά του μάλιστα αὕτη γίνεται πιὸ κατανοητὴ καὶ ἀπὸ τὸ ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἦταν ὁ πρῶτος ποὺ ἀνέγραψε ρητῶς συγκεκριμένα αἰτήματα.

Καὶ αὕτη ἡ ἀπάντηση δὲν μοῦ φαίνεται ὅμως ἀπολύτως ἱκανοποιητικὴ· καὶ γιὰ τὸν λόγο ποὺ ἤδη ἀνέφερα, ὅτι δηλαδὴ τὰ αἰτήματα ποὺ ξεχώρισε ὁ Εὐκλείδης εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνα ποὺ — λόγῳ τῆς ἀληθοφανείας τους — θὰ μπορούσε νὰ παραβλέψῃ ἂν ἦταν ἄνθρωπος γιὰ νὰ παραβλέψῃ ἀληθοφανεῖς προτάσεις, καὶ γιὰ τὸν λόγο ὅτι ἡ ἀντίληψη πῶς ἔχουμε ἀνάγκη ἀπὸ βασικὲς ὑποθέσεις στὴν γεωμετρία δὲν πρωτοφανερώνεται στὸν Εὐκλείδη ἀλλὰ διατυπώνεται ἤδη στὸν Πλάτωνα, ὅπως εἶδαμε πιὸ πάνω.² μόνον, ὅτι ἀπὸ τὸ Πλατωνικὸ κείμενο δὲν μπορεῖ νὰ συμπεράνῃ κανεὶς ἂν ὡς ὑποθέσεις ἀντιμετωπίζονται ἐκεῖ ὑποθέσεις τοῦ εἴδους τῶν Εὐκλείδειων αἰτημάτων ἢ μόνον ὑποθέσεις ὅπως ἡ ὑπαρξὴ διαφόρων σχημάτων π.χ. τριγώνων.

Μὲ τίς λίγες αὐτὲς παρατηρήσεις μας θελήσαμε νὰ δείξουμε τὸ ἐνδιαφέρον ποὺ παρουσιάζει τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ὄχι μόνον γιὰ τὸν ἀναγνώστη ἀλλὰ, κατὰ τὴν γνώμη μου, καὶ γιὰ τοὺς ἐρευνητὰς τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν.

Πρέπει ἐδῶ νὰ προσθέσουμε ὅτι οἱ ἀπαιτήσεις ἀκριβείας ποὺ ἔχει ὁ ἄνθρωπος αὐξάνουν μὲ τὴν πάροδον τῶν αἰώνων καὶ ὅτι τίποτε δὲν ἀποκλείει ὅτι κάποτε θὰ βρεθοῦν «ἐλλείψεις» καὶ σ' αὐτὴν ἀκόμη τὴν θεμελίωση Θ τοῦ Hilbert· μὲ τὴν παρατήρηση ὅτι οἱ «ἐλλείψεις» αὐτές, ἂν ὑπάρχουν, θὰ εἶναι ἀνωτέρας στάθμης ἀπ' ἐκείνες ποὺ παρουσιάζει τὸ Εὐκλείδειον κείμενον· δὲν θὰ ἀφοροῦν τὴν μὴ ἀναγραφὴ αἰτημάτων ἀπαραιτήτων γιὰ τὸ καθαυτὸ γεωμετρικὸ μέρος ἀλλὰ ἀξιωμάτων σχετικῶν μὲ τὴν θεωρία τῶν συνόλων ἀπὸ τὴν ὁποία ξεκινοῦμε, δηλαδὴ θὰ εἶναι ἐλλείψεις τῆς ἀξιωματικῆς θεωρίας τῶν συνόλων ποὺ διαθέτουμε ἢ ἐλλείψεις τῆς λογικῆς ποὺ χρησιμοποιοῦμε. Γιὰ τὴν τελευταία αὕτη παρατήρηση, παραπέμπω καὶ σὲ μιὰν ἄλλη μελέτη μου.³

Ἐθίξαμε προηγουμένως τὸ ζήτημα τῶν αἰτημάτων Η. Ἐνα σύνολον αἰτημάτων λογικὰ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον τῶν αἰτημάτων ποὺ συναποτελοῦν τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὸ Η ὅταν τὰ βάλουμε μαζί, καὶ ποὺ δόθηκε ἀπὸ τὸν Hilbert μπορεῖ νὰ δοῇ ὁ ἀναγνώστης στὸ βιβλίο τοῦ κ. Σταμάτη⁴ στὸ ὁποῖον ἤδη παραπέμψαμε (σελ. 31 - 33).

Ἀσχοληθήκαμε ὥς τώρα μὲ τίς ἐλλείψεις τοῦ Ε. Τίθεται τώρα τὸ ἐρώτημα: Ὑπάρχει μέρος τοῦ Ε, ποὺ νὰ πλεονάζῃ λογικά;

Ἀφοῦ οἱ «κοινὲς ἔννοιες» καὶ τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου χρησιμοποιοῦνται φανερά στὶς ἀποδείξεις του, δὲν προκύπτει τέτοιο θέμα γι' αὐτά, παρεκτὸς γιὰ συμπυκνώσεις τους, ποὺ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρουν ἐδῶ. Ἀπομένουν λοιπὸν οἱ «ὅροι» τοῦ Ε. Ἀπ' αὐτοὺς πάλι μερικοὶ εἶναι φανερά ὅρισμοὶ νέων ἀντικειμένων τῆς γεωμετρικῆς σκέψεως ποὺ δὲν χρησιμοποιοῦν παρὰ μόνον προηγουμένως ὁρισθέντα ἀντικείμενα τῆς σκέψεως αὐτῆς (ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν αὐτῶν τῶν τελευταίων οἱ ὅρισμοὶ εἶναι καλοὶ ἢ κακοὶ) καὶ σαφῶς μαθηματικὲς ἐκφράσεις. Παράδειγμα τέτοιου ὅρου: «Ἡ μικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας, Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.»⁵ (σελ. 36, ὅρος ιη').

Τὸ ἐρώτημα λοιπὸν τοῦ πλεονασμοῦ δὲν μπορεῖ νὰ τεθῇ παρὰ γιὰ τοὺς ὅρους ἐκείνους ποὺ ὀρίζουν νέα ἀντικείμενα τῆς γεωμετρικῆς σκέψεως μὲ τὴν βοήθεια ἐννοιῶν ποὺ δὲν ἔχουν ὁρισθῇ προηγουμένως στὰ Στοιχεῖα. Ἀπὸ τοὺς ὅρους ποὺ ἔτσι ἀπομένουν, θὰ ἐξετάσουμε ἐδῶ ἐκείνους ποὺ ἀφοροῦν τίς ἔννοιες τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἔννοιες ποὺ ἔπαιξαν ἱστορικὰ τεράστιον ρόλον στὴν ἐξέλιξη τῶν ἐπιστημονικῶν ἀντιλήψεων· ἐξέλιξη ποὺ ἐπηρέασε τελικὰ τὴν ὅλη ζωὴ τοῦ ἀνθρώπου καὶ ἀπὸ τὴν ὕλική ἀποψη καὶ ἀπὸ τὴν ἀποψη τῆς φιλοσοφικῆς τοποθετήσεώς του.

Οἱ ὅροι αὐτοὶ εἶναι οἱ ἑξῆς (βλ. 6, σελ. 36):

α') Σημεῖόν ἐστίν, οὐ μέρος οὐδέν.

β') Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ') Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἑαυτοῖς σημείοις κεῖται.

δ') Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ε') Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἑαυτοῖς εὐθείαις κεῖται. (Ὑπογραμμίσσαμε τὴν ἐκάστοτε νέα ἔννοια).

Καθὼς παρατηρήσαμε πιὸ πρὶν, δὲν βλέπει κανεὶς πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν λογικὰ ἀπὸ τίς α'), β'), δ'), ε') καὶ ζ') στοιχεῖα τοῦ Η, δηλαδὴ στοιχεῖα ποὺ νὰ λείπουν ἀπὸ τὸ Ε. Αὐτὸ φυσικὰ δὲν ἀποκλείει νὰ ἔκανε μιὰ τέτοια λογικὴ ἐξαγωγή ὁ Εὐκλείδης στὴν σκέψη του, ἀλλὰ

μού φαίνεται προβληματική ή δυνατότης αναπτύξεως σκέψεων αυτού του είδους ἐντὸς τῶν πλαισίων τῆς σκέψεως τοῦ Hilbert ἢ τοῦ H. Poincaré καί, γενικώτερα, ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῶν σκέψεων τῶν περισσοτέρων συγχρόνων μαθηματικῶν.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τὰ $\alpha')$, $\beta')$, $\delta')$, $\epsilon')$ καὶ $\zeta')$ δὲν χρησιμο-ποιοῦνται σὲ καμμιά διατύπωση αἰτήματος κοινῆς ἐν-νοίας, θεωρήματος, πορίσματος ἢ λήμματος τῆς Εὐ-κλειδείου γεωμετρίας, οὔτε καὶ εἶναι λογικῶς ἀπα-ραίτητα σὲ καμμιάν ἀπόδειξη θεωρήματος, πορίσματος ἢ λήμματος τῆς Εὐκλειδείου γεωμετρίας.

Συμπεραίνουμε λοιπὸν ὅτι, ἀπὸ καθαρῶς μαθηματικῆς ἀπόψεως, τὰ $\alpha')$, $\beta')$, $\delta')$, $\epsilon')$ καὶ $\zeta')$ δὲν εἶναι ἀπαραίτητα γιὰ τὴν (ἐκτὸς τῶν ὄρων) ἀνάπτυξη τῆς Εὐκλειδείου γεωμετρίας. Ἀκόμη περισσό-τερο, τὰ $\alpha')$, $\beta')$, $\delta')$, $\epsilon')$ καὶ $\zeta')$ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν (ἐκτὸς τῶν ὄρων) Εὐκλ. γεωμετρία.

Μὲ τὸ «ἀνεξάρτητα» ἐννοοῦμε ὅτι τὸ σύνολον τῶν $\alpha') \dots \zeta')$ ἀφ' ἐνὸς καὶ τῆς (ἐκτὸς τῶν ὄρων) Εὐκλειδείου γεωμετρίας ἀφ' ἐτέρου ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ μὴν μπορῇ νὰ ἐπηρεάσῃ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐνὸς τὴν ἰσχὺν τοῦ ἄλλου· τὸ πρῶτο σύνολον προτάσεων εἶναι λοιπὸν ἓνα ξένο κομμάτι ὡς πρὸς τὴν (ἐκτὸς τῶν ὄρων) Εὐκλ. γεωμετρία.

Ὅ,τι εἶπαμε ὡς τώρα δὲν θὰ στενοχωροῦσε τοὺς ἀναγνώστες ἂν δὲν εἶχαν συνηθί-σει οἱ πρὸ πολλοὶ ἀπ' αὐτοὺς νὰ θεωροῦν τὰ $\alpha') \dots \zeta')$ ὡς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, δηλαδὴ ὡς κάτι τὸ ἀπολύτως βασικὸ γιὰ τὴν Εὐκλ. γεωμετρία· συνήθεια ποὺ ὀφείλει κάπως τὴν γένεσίν της καὶ στὸν τρόπο ποὺ ἔβλεπαν τὰ πράγματα ὅλοι σχεδὸν οἱ πρὶν ἀπὸ τὸν 19ον αἰῶνα μαθηματικοί.

Ἀναρωτιέται ὁ σημερινὸς μαθηματικὸς πῶς μπορούσαν νὰ θεωροῦν οἱ μαθηματικοὶ ἐκεῖνοι τὰ $\alpha') \dots \zeta')$ ὡς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀφοῦ, ἀκόμη καὶ μὲ τὴν σημερινὴ μεγάλη ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν, δὲν βλέ-πουμε πῶς μπορεῖ νὰ δοθῇ μαθηματικὸ νόημα σ' αὐτοὺς. (Παραπέμπουμε σχετικὰ τὸν ἀναγνώστη καὶ σ' ἓνα περιώνυμο κείμενο τοῦ Felix Klein ¹⁾). Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ $\alpha') \dots \zeta')$ νόημα μαθηματικὸ ἀκριβὲς δὲν ἔχουν καὶ οὔτε καὶ χρήσιμοι εἶναι στὴν (ἐκτὸς τῶν ὄρων) Εὐκλ. γεωμετρία, πρέπει ὁ ἀναγνώστης νὰ πάσῃ νὰ στηρίζεται σ' αὐτοὺς. Ἀλλὰ τότε, σὲ ποιοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν τοῦ ση-μείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου θὰ στηρίξουμε τὴν Εὐκλ. γεωμετρία;

Ἀφοῦ οἱ μόνες ἀναπόδεικτες ιδιότητες τῶν σημείων, τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων ποὺ χρειάζεται ἡ (ἐκτὸς τῶν ὄρων) Εὐκλ. γεωμετρία εἶναι τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ πρόσθετα αἰτήματα τοῦ Hilbert ²⁾, τὸ μόνο ποὺ ἔχουμε ἀνάγκη νὰ ζητήσουμε ἀπὸ τοὺς νέους ὁρισμοὺς τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι νὰ λένε ὅτι τὰ σημεία, οἱ εὐθεῖες καὶ τὰ ἐπίπεδα ικανοποιοῦν τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ αἰτήματα H.

Μ' ἄλλα λόγια, τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ πρόσ-θετα αἰτήματα τοῦ Hilbert, ποὺ ἀναφέρονται στὰ ση-μεῖα, στὶς εὐθεῖες καὶ στὰ ἐπίπεδα ἀποτελοῦν, ὅλα μαζὶ, ἓναν ἐπαρκῆ (γιὰ μαθηματικοὺς σκοποὺς) ὁρισμὸ τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν.

Ἐναν τέλειον ὁρισμὸ αὐτοῦ τοῦ είδους ἔδωσε τὸ 1899 ὁ Hilbert. Γιὰ νὰ εἶμαστε ἀκριβεῖς ὁ Hilbert δὲν ἐπῆρε ἀπλῶς τὰ αἰτήματα τοῦ Εὐκλείδου γιὰ νὰ τοὺς προσθέσῃ ὅσα ἔλειπαν, ἀλλὰ διέκρινε ὅτι ὅλα αὐτὰ μαζὶ τὰ αἰτήματα ἀποτελοῦν ἓνα σύστημα λογικῶς ἰσοδύναμον μ' ἓνα σύστημα εἴκοσι αἰτημάτων ποὺ χωρίζονται σὲ πέντε ὁμάδες καὶ ποὺ τὸ διετύπωσε ὁ ἴδιος. Ὁ διαχωρισμὸς αὐτὸς ποὺ ἔκανε ὁ Hilbert εἶναι πολὺ σημαντικός, γιατί μᾶς ἐπιτρέπει νὰ δοῦμε «ἀνατομικὰ» τὴν Εὐκλ. γεωμετρία· ἔτσι καὶ τὶς ρίζες τῶν διαφορῶν θεωρημάτων της βρίσκουμε ἀπηλλαγμένες ἀπὸ τὰ πλεονά-ζοντα στοιχεῖα ποὺ τόσο συχνὰ συσκοτίζουν τὴν ἀλήθεια, καὶ τὴν φύση τῶν ἀλύτων προ-βλημάτων της κατανοοῦμε καθαρώτερα καί, τὸ σημαντικώτερο ἴσως, διακρίνουμε τὴν δυνα-τότητα διαφορῶν «γεωμετριῶν» ποὺ ἡ κάθε μιά τους νὰ χτίζεται σὲ μιά (ἢ δυὸ κτλ.) ὁμάδα αἰτημάτων τῆς Εὐκλ. γεωμετρίας.

Θὰ προσπαθήσουμε τώρα ν' ἀναδιατυπώσουμε ἓνα τμῆμα ἀπὸ τὸν κλασσικὸ αὐτὸν ὁρισμὸ τοῦ Hilbert, μὲ τὴν ἐλπίδα νὰ νοιώσῃ καὶ ὁ μὴ εἰδικὸς ἀναγνώστης τὴν διαφορὰ τῶν καινούργιων ὁρισμῶν (τύπου Hilbert) ἀπὸ τοὺς παλιούς.

Στὴν ἀναδιατύπωση αὐτὴν θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἐννοια τοῦ συνόλου (ὅπως ἄλλωστε ἔκανε καὶ ὁ ἴδιος ὁ Hilbert σὲ ἄλλη διατύπωση τοῦ ὁρισμοῦ του), μὲ τὴν ἐν-νοια ποὺ ἔχει στὴν καθημερινὴ ζωὴ. «Ὑποσύνολον» ἐνὸς δοσμένου συνόλου A καλοῦμε κάθε σύνολον τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα ἀνήκουν στὸ A (Ἐννοια «κενοῦ» συνόλου δὲν θὰ εἰσαγάγουμε ἐδῶ διότι δὲν μᾶς χρειάζεται). Λέμε ὅτι ἓνα σύνολον A εἶναι «τελείως διατεταγμένον», ὅταν ὑπάρχῃ γιὰ τὸ A κάποιος νόμος σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον σὲ κάθε

ζεύγος διαφορετικῶν στοιχείων α, β τοῦ A τὸ ἓνα προηγείται τοῦ ἄλλου, π.χ. τὸ β προηγείται τοῦ α (καὶ συμβολίζουμε τότε αὕτῃ τὴν διάταξη τοῦ ζεύγους α, β μὲ (β, α) , καὶ ὅταν ἀκόμη σὲ κἀθε τριάδα διαφορετικῶν στοιχείων X, Ψ, Z τοῦ A σπὴν ὁποῖαν τυχαίνει τὸ X νὰ προηγῇται τοῦ Ψ καὶ τὸ Ψ νὰ προηγῇται τοῦ Z , ἀπαραιτήτως καὶ τὸ X προηγῇται τοῦ Z (δηλαδή, ὅταν εἶναι (X, Ψ) καὶ (Ψ, Z) εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ (X, Z) καί, τέλος, οἱ σχέσεις (X, Ψ) καὶ (Ψ, X) συνεπάγονται τὴν $X = \Psi$).

Σ ἓνα τελείως διατεταγμένο σύνολον A , λένε γιὰ μιὰ τριάδα διαφορετικῶν στοιχείων τοῦ X, Ψ, Z ὅτι τὸ Ψ βρίσκεται «μεταξὺ» τῶν X καὶ Z ὅταν τὸ X προηγῇται τοῦ Ψ καὶ τὸ Ψ προηγῇται τοῦ Z . Γενικῶς, ὅταν εἶναι (X, Ψ) , λένε ὅτι τὸ X εἶναι πρὸς «τ' ἀριστερὰ» τοῦ Ψ καὶ ὅτι τὸ Ψ εἶναι πρὸς «τὰ δεξιὰ» τοῦ X , τὸ δὲ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ A ποὺ βρίσκονται μεταξύ X καὶ Ψ μαζὶ καὶ μὲ τὰ X καὶ Ψ καλεῖται «τμήμα» $[X \Psi]$. Τέλος, «πυκνὸ» καλεῖται τὸ A ὅταν γιὰ κάθε ζεύγος X, Ψ γιὰ τὸ ὁποῖον εἶναι (X, Ψ) ὑπάρχει στοιχεῖον λ τοῦ A ποὺ νὰ βρίσκεται μεταξύ τῶν X καὶ Ψ .

(Οἱ ὁρισμοὶ ποὺ χρησιμοποιήσαμε δὲν εἶναι οἱ καλύτεροι δυνατοί, ⁸, ⁹, ¹⁰ ἀλλ' εἶναι προσίτοι σὲ ὅλους).

I. Ἀξιώματα «συνδέσεως»

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχουν ἓνα σύνολον Σ , ἓνα σύνολον Γ ἀπὸ ὑποσύνολα τοῦ Σ καὶ ἓνα ἄλλο σύνολον E ἀπὸ ὑποσύνολα τοῦ Σ , ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ἐξῆς πέντε ὁμάδες ἰδιοτήτων, ποὺ τὶς ἀποκαλοῦν «ἀξιώματα» (γιὰ νὰ ὑπενθυμίζουν ὅτι τὶς χρησιμοποιοῦμε χωρὶς ἀπόδειξη):

- I. 1 καὶ I. 2. Ἐάν δοθοῦν δύο διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ Σ , ὑπάρχει ἓνα καὶ μόνον ἓνα στοιχεῖον τοῦ Γ ποὺ νὰ τὰ περιέχῃ.
- I. 3. Κάθε στοιχεῖον τοῦ Γ περιέχει δύο τουλάχιστον διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ Σ . Ὑπάρχει μιὰ τουλάχιστον τριάδα ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ νὰ μὴν περιέχωνται μέσα σ' ἓνα καὶ τὸ ἴδιο στοιχεῖον τοῦ Γ .
- I. 4 καὶ I. 5. Ἐάν δοθῇ μιὰ τριάδα ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ νὰ μὴν περιέχωνται μέσα σ' ἓνα καὶ τὸ ἴδιο στοιχεῖον τοῦ Γ , ὑπάρχει ἓνα καὶ μόνον ἓνα στοιχεῖον τοῦ E ποὺ νὰ περιέχῃ αὐτὰ τὰ τρία στοιχεῖα τοῦ Σ .
- I. 6. Ἐάν ἓνα στοιχεῖον I τοῦ Γ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα δύο στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ ἀνήκουν σ' αὐτὸ ν' ἀνήκουν καὶ σ' ἓνα στοιχεῖον e τοῦ E , τότε καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ ἀνήκουν στὸ I ἀνήκουν καὶ στὸ e .
- I. 7. Ἐάν δύο στοιχεῖα τοῦ E ἔχουν κοινὸ ἓνα στοιχεῖον τοῦ Σ , θὰ ἔχουν ἀσφαλῶς κοινὸ καὶ ἓνα τουλάχιστον ἀκόμη στοιχεῖον τοῦ Σ (διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ προηγούμενον).
- I. 8. Ὑπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ δὲν περιέχονται μέσα σ' ἓνα καὶ τὸ ἴδιον στοιχεῖον τοῦ E .

II. Ἀξιώματα «διατάξεως»

- II. 1 — II. 3. Κάθε στοιχεῖον τοῦ Γ μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓνα τελείως (=ὀλικῶς) διατεταγμένο σύνολον ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ Σ , πυκνὸν ὡς πρὸς αὕτῃ τὴν διάταξη.
- II. 4. Ἐάν εἶναι τὰ A, B, C τρία στοιχεῖα τοῦ Σ ποὺ δὲν περιέχονται μέσα σ' ἓνα καὶ τὸ ἴδιο στοιχεῖον τοῦ Γ καὶ I ἓνα στοιχεῖον τοῦ Γ ποὺ δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα A, B, C . Ἐάν τότε τὸ περιέχῃ στοιχεῖο τοῦ τμήματος $[A B]$, θὰ περιέχῃ τὸ I καὶ στοιχεῖον τοῦ τμήματος $[A C]$ ἢ τοῦ τμήματος $[B C]$. (Ἀξίωμα τοῦ Pasch 1882).

III. Ἀξιώματα ἰσότητος

III. 1 — III. 5.

IV. Ἀξίωμα τῶν παραλλήλων

- IV. 1. Ἐάν δοθῇ ἓνα στοιχεῖον I_1 τοῦ Γ καὶ ἓνα στοιχεῖον A τοῦ Σ ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ I_1 , (ὁπότε ἀπὸ τὰ ἀξιώματα I. 3, I. 4, I. 5 καὶ I. 6 ἔπεται ὅτι ὑπάρχει ἓνα καὶ μόνον ἓνα στοιχεῖον τοῦ E ποὺ νὰ περιέχῃ καὶ τὸ A καὶ τὴν I_1), στὸ στοιχεῖον τοῦ E ποὺ περιέχῃ τὸ A καὶ τὸ I_1 ὑπάρχει τὸ πολὺ ἓνα στοιχεῖον τοῦ Γ ποὺ νὰ περιέχῃ τὸ A καὶ νὰ μὴν περιέχῃ κανένα στοιχεῖον τοῦ Σ .
(Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου).

Υ. 'Αξιώματα «συνεχείας»

Υ. 1. 'Αξίωμα «του 'Αρχιμήδους» (Ευδόξου - Εύκλείδου - 'Αρχιμήδους).

Υ. 2. 'Αξίωμα «πληρότητας» του Hilbert.

(Τέλος του όρισμού του Hilbert)

Χρησιμοποιήσαμε στην αρχή την λέξη «υποθέτουμε» διότι δεν ξέρουμε αν τα αξιώματα Εύκλείδου - Hilbert (συνδυαζόμενα μεταξύ τους με την βοήθεια της 'Αριστοτελείου λογικής και της στοιχειώδους αριθμητικής) δεν μπορούν να οδηγήσουν σε λογικήν αντίφασή· μιὰ τέτοια αντίφαση θα σήμαινε ότι δεν υπάρχουν σύνολα Σ, Γ και Ε που να ικανοποιούν όλα αυτά μαζί τα αξιώματα.

Αν, αντιθέτως, μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι τα αξιώματα Εύκλείδου - Hilbert δεν μπορούν να οδηγήσουν σε λογικήν αντίφαση, τότε θεωρούν οι σημερινοί μαθηματικοί¹³ (άκολουθώντας τις απόψεις του Henri Poincaré και του Hilbert) ότι τ' αξιώματα αυτά αποτελούν έναν έπαρκή (για μαθηματικούς σκοπούς) όρισμό των συνόλων Σ, Γ και Ε.

Παρατηρεί τώρα ο προσεκτικός αναγνώστης ότι, αν στην κλασσική Εύκλ. γεωμετρία, το σύνολον των εύθειων και το σύνολον των επιπέδων κληθούν αντίστοιχως Σ, Γ και Ε, τότε τα σημεία, οι εύθειες γραμμές και τα επίπεδα του Εύκλείδου ικανοποιούν τ' αξιώματα Εύκλείδου - Hilbert. (Και θάταν έτοιμος, ίσως, ο αναγνώστης να ισχυρισθί ότι απέδειξε και ότι το σύστημα των αξιωμάτων Εύκλείδου - Hilbert δεν μπορεί να οδηγήσει σε λογικήν αντίφαση, αφού δρῆκε κιόλας ένα σύστημα από τόσο γνώριμά του και «άσφαλώς μη αντιφατικά» πράγματα όπως τα σημεία, οι εύθειες και τα επίπεδα του Εύκλείδου, αν δεν του είχαμε πιό πριν έπιστήσει την προσοχή στο ότι οι συνηθισμένοι γεωμετρικοί «όρισμοί» του σημείου, της εύθείας και του επιπέδου δεν είναι, δυστυχώς, όρισμοί μαθηματικοί και δεν έχουμε το δικαίωμα σήμερα να τους χρησιμοποιούμε σε μαθηματικούς συλλογισμούς). 'Απ' αυτό έπεται ότι είμαστε δικαιολογημένοι να ονομάσουμε «σημεία» τα στοιχεία του Σ «εύθειες» γραμμές, τα στοιχεία του Γ και επίπεδα τα στοιχεία του Ε, διότι δεν υπάρχει τίποτε το μαθηματικό στην παραδοσιακή έννοια των λέξεων αυτών που να μην μπορεί να έξαχθί ως συμπέρασμα από τον όρισμό του Hilbert.

Πίσω από τις μαθηματικές λεπτομέρειες του όρισμού του Hilbert υπάρχει ή νέα μαθηματικοφιλοσοφική αρχή που διέπει από τότε τους όρισμούς αντικειμένων της μαθηματικής σκέψης ή αρχή της μη αντιφάσεως· την εισήγαγαν ο Henri Poincaré και ο Hilbert και την ακολουθούμε σήμερα οι περισσότεροι μαθηματικοί. Νά, πώς εφαρμόζουν όλοι αυτοί σήμερα τον νέο τρόπο όρισμού: θεωρούμε κάποια σύνολα για τα όποια δεν κάνουμε καμμιὰ υπόθεση εκτός απ' αυτές που θα μνημονεύσουμε ρητώς παρακάτω. 'Απ' αυτά τα σύνολα δεν ζητούμε τίποτε άλλο εκτός από το ότι ικανοποιούν μερικές ιδιότητες (δηλαδή, πληρούν μερικές υποθέσεις) που έμεϊς αυθαίρέτως τις επιβάλλουμε σ' αυτά, σύμφωνα με κάποιους μαθηματικούς σκοπούς μας, και στα στοιχεία αυτών των συνόλων δίνουμε όποια όνόματα θέλουμε (ώδηγημένοι απ' την παράδοση, την σκοπιμότητα ή και, απλώς, την μαθηματική μόδα). Τα όνόματα αυτά δεν έχουν καμμιὰ σημασία, το πᾶν, όσον αφορά τον όρισμό μας, είναι οι ιδιότητες που επιβάλαμε στα σύνολα που θεωρήσαμε. Οι ιδιότητες αυτές καλούνται συχνά «αξιώματα». 'Ο μόνος περιορισμός στον όποϊον υπόκεινται πᾶς αξιώματα είναι να μην μπορούν να οδηγήσουν σε λογική αντίφαση. Κατά τα ἄλλα, έχουμε δικαίωμα ἀπολύτως αυθαίρέτου έκλογής αξιωμάτων.

Φυσικά, στην έκλογή αξιωμάτων μάς οδηγούν συχνά διάφορες σκοπιμότητες, όπως π.χ. την έκλογή των αξιωμάτων της Εύκλειδείου γεωμετρίας που έκανε ο Εύκλείδης και που έσυμπλήρωσε ο Hilbert, την ενέπνευσε ή επιθυμία να τεθί σε λογικῶς ἄψογα θεμέλια το Εύκλείδειον οικοδόμημα.

'Ο μη μαθηματικός αναγνώστης ξενίζεται ίσως από το γεγονός ότι (άκολουθώντας τις απόψεις του Henri Poincaré και του Hilbert) θεωρούμε ότι ή έννοια της ύπαρξεως (ένος συνόλου) συμπίπτει με την έννοια της έλλείψεως λογικής αντιφάσεως (μεταξύ των ιδιοτήτων που όρίζουν αυτό το σύνολον). Στην άπορία του απαντούμε με δύο έρωτήματα:

1. Τί ανάγκη έχουμε στα μαθηματικά να μπορούμε να βεβαιώσουμε για ένα αντικείμενον της μαθηματικής σκέψης τίποτε περισσότερο από το ότι ή υπόθεση ότι αυτό υπάρχει, δεν οδηγεί σε λογική αντίφαση;

2. Αν αναγάγουμε τα μαθηματικά μας στα πρώτα λογικά συστατικά στοιχεία τους, στις αρχικές υποθέσεις τους, υπάρχει τίποτε περισσότερο από

τὴν ἑλλείψει λογικῆς ἀντιφάσεως ποὺ νὰ μπορούμε νὰ ἐλπίζουμε ν' ἀποδείξουμε;

Ὁ νέος τρόπος ὁρισμοῦ μαθηματικῶν ἐννοιῶν δίνει στὸν μαθηματικὸ τρομερὴ ἐλευθερία δράσεως, ἀφοῦ μπορούμε πιά νὰ διαλέγουμε τὰ ἀξιωματά μας ὅσο αὐθαίρετα θέλουμε, ἀρκεῖ νὰ μὴν ἔρχωνται σὲ ἀντίφαση μεταξὺ τους. Αὐτὸ ἦταν κάτι ἀδιανόητο, ἀκόμη καὶ γιὰ τοὺς πιὸ μεγάλους μαθηματικούς τῆς πρὸ τοῦ 19ου αἰῶνος ἐποχῆς· γι' αὐτούς,¹⁵ τὰ μόνα δυνατὰ ἀντικείμενα τῶν θεωρητικῶν μαθηματικῶν ἦσαν οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ ἀντικείμενα τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας, δηλαδή τὰ ἀντικείμενα ἐνὸς «κλειστοῦ» μαθηματικοῦ κόσμου· ἀντιθέτως, ὁ κόσμος ποὺ ἄνοιξε ἡ ἀρχὴ τῆς μὴ ἀντιφάσεως στὴν μαθηματικὴ φαντασία εἶναι ἀπέραντος¹⁶ πλάϊ στὰ προβλήματα τοῦ «παλαιοῦ τύπου», δηλαδή στὰ προβλήματα ποὺ ἀφοροῦν ἤδη μελετημένα ἀντικείμενα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, προβάλλει τώρα τὸ πρόβλημα τῆς ἀναζητήσεως ἀξιωματικῶν συστημάτων ποὺ νὰ ὀρίζουν (μὲ τὴν ἐννοια τῆς ἐλλείψεως λογικῆς ἀντιφάσεως) νέα ἀντικείμενα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως· τὸ ἐνδιαφέρον τῶν νέων αὐτῶν ἀντικειμένων ὀφείλεται ἄλλες φορές στὶς «ἐνδομαθηματικὲς» ἐφαρμογές τους, δηλαδή στὸν συνθετικὸ, ἐρμηνευτικὸ, κτλ. ρόλο ποὺ παίζουν γιὰ τὰ προϋπάρχοντα μαθηματικά, καὶ ἄλλοτε στὴν πνευματικὴ γοητεία ποὺ παρουσιάζουν ὡς λογικὰ οἰκοδομήματα οἱ θεωρίες ποὺ μπορεῖ κανεὶς νὰ στηρίξη στὰ ἀξιωματικὰ συστήματα ποὺ τὰ ὀρίζουν. Καὶ στὴ μιὰ καὶ στὴν ἄλλη περίπτωση, τὰ μαθηματικά ποὺ ἔτσι ἀναπτύσσονται, καλοῦνται συνήθως «ἀφηρημένα» μαθηματικά. Ὁ ὅρος «ἀφηρημένα» ὑποδηλώνει ὅτι οἱ μαθηματικὲς αὐτὲς θεωρίες δὲν ἀφοροῦν μόνον ἀριθμοὺς ἢ μόνον ἀντικείμενα τῆς Εὐκλ. γεωμετρίας ἀλλὰ ἀντικείμενα τῆς σκέψεως ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ εὐρύτερα ἀξιωματικὰ συστήματα.

Ὁ νέος τρόπος ὁρισμοῦ καλεῖται συνήθως «ἀξιωματικὸς» καὶ ἡ ἀναζήτησις ἀξιωματικῶν συστημάτων ποὺ νὰ προσφέρωνται γιὰ τὴν οἰκοδόμησις ἐπάνω σ' αὐτὰ θεωριῶν ποὺ νὰ συγκεντρώνουν καὶ νὰ ὀργανώνουν σ' ἓνα λογικὸ καὶ ἱεραρχημένο σύνολον διάφορα γνωστὰ μαθηματικὰ γεγονότα καλεῖται «ἀξιωματικὴ μέθοδος ἐρεύνης» στὰ μαθηματικά.

Τὴν ἀξιωματικὴ μέθοδο ἐρεύνης τὴν εἰσήγαγαν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μὲ τὴν Εὐκλ. γεωμετρίαν, τὴν ξαναβρῆκαν οἱ ἄνθρωποι κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα¹⁷ καὶ ἐμφανίζεται σὲ ὥριμη μορφή μόλις κατὰ τὰ τέλη του,¹⁸ γιὰ νὰ ἀναπτυχθῇ μὲ γοργὰ βήματα κατὰ τὸν 20ὸν αἰῶνα· γι' αὐτὸ καὶ πολλοὶ θεωροῦν τὴν ἀξιωματικὴ μέθοδο ἐρεύνης ὡς τὸ κυριώτερο χαρακτηριστικὸ τῶν μαθηματικῶν τοῦ 20οῦ αἰῶνος.

Συνήθως, τὰ ἀφηρημένα μαθηματικά ἀποκαλοῦν «νεώτερα» μαθηματικά, ἐνῶ τὰ μαθηματικά ποὺ ἀνεπτύχθησαν μεταξὺ τῆς Ἀναγεννήσεως καὶ τῶν μέσων τοῦ 19ου αἰῶνος¹⁹ τὰ ὀνομάζουν συχνὰ «κλασσικά» μαθηματικά. Πρόδρομοι τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν θεωροῦνται, γενικά, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες, ἐπειδὴ αὐτοὶ εἰσήγαγαν στὰ μαθηματικά τὴν αὐστηρὴ ἀποδεικτικὴ ἀντίληψη καὶ τὸ ἰδανικὸ τῆς ἀξιωματικῆς ἀναπτύξεώς τους.²⁰

Νομίζω ὅτι, ἂν θέλουμε νὰ βάλουμε τὰ ζητήματα ὁρολογίας σὲ ἀπολύτως ὀρθολογιστικὴ βάση, θὰ πρέπει ν' ἀποκαλέσουμε ὅλα τὰ μαθηματικά ποὺ στηρίζονται σὲ ἀξιωματικά θεμέλια «ἀφηρημένα» ἢ «νεώτερα» μαθηματικά· ὅποτε ὁ τίτλος τοῦ «κλασσικοῦ» δὲν θ' ἀπέμενε σὲ κανένα τμήμα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀλλὰ μόνον σὲ μερικὲς παλαιότερες «διατυπώσεις» τέτοιων τμημάτων.

Τὰ μαθηματικά περνοῦν σήμερα μιὰ κρίση ποὺ παρουσιάζει μερικὲς ἀναλογίες μὲ τὴν κρίση ποὺ περνᾷ ἡ Τέχνη. Ἡ κρίσις αὕτη ἀφορᾷ πρῶτα-πρῶτα τὰ κριτήρια μὲ τὰ ὁποῖα κρίνεται ἡ ἀξία ἐνὸς ἔργου· τὰ κριτήρια αὐτὰ ἦταν σχετικῶς εὐδιάκριτα στὴν ἐποχὴ ὅπου ὁ μαθηματικὸς ἀπασχολεῖτο μὲ προβλήματα ποὺ ἀφοροῦσαν ἐννοίες «οἰκείες» στοὺς ἄλλους μαθηματικούς, μὲ προβλήματα ποὺ συχνὰ εἶχαν τὴν ἱστορία τους καὶ ὅπου οἱ δυσκολίες ἦταν κάπως φανερές· ἀκριβῶς ὅπως τὰ καλλιτεχνικὰ κριτήρια ἦταν σχετικῶς εὐδιάκριτα ὅταν ἡ ἐπιτυχία τοῦ καλλιτέχνη κρινόταν ἀπὸ τὴν ἱκανότητά του ν' ἀντιγράφη τὴν φύση ἢ νὰ προκαλῇ ἀνθρώπινες συγκινήσεις στὸ κοινόν. Τὰ κριτήρια ὁμῶς γίνονται πολὺ πιὸ ἀμφίβολα προκειμένου περὶ ἔργων ἀφηρημένης τέχνης καὶ ἀνάλογες δυσκολίες παρουσιάζονται καὶ στὰ ἀφηρημένα μαθηματικά μερικὲς φορές, γιὰτὶ ὁ μαθηματικὸς κόσμος ποὺ πλάθει πιά ὁ κάθε ἐρευνητὴς εἶναι, κατὰ κάποιον τρόπον, ὁ δικὸς του κόσμος. Αὐτὲς οἱ δυσκολίες ποὺ παρουσιάζουν τὰ κριτήρια τῆς ἀξίας στὴν περίπτωση τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν καθὼς καὶ στὴν περίπτωση τῆς νεωτέρας Τέχνης δὲν ἀποτελοῦν, φυσικά, ἐπαρκὴ λόγο γιὰ ν' ἀπορρίψη κανεὶς τὸ ἓνα ἢ τὸ ἄλλο, διότι αὐτὸ δὲν θὰ ἦταν παρὰ μιὰ ἄρνησις τῆς προόδου. Μὲ τὴν παρατήρησι, μόνον, ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἔχει ἀνάγκη, κάθε τόσο, νὰ ἐπιστρέφῃ στὶς πηγές τῆς ζωῆς καὶ τῶν ἀνθρωπίνων ἐνδιαφερόντων, ὥστε ν' ἀνανεώνεται τὸ ἀρχέγονο τμήμα τῆς ἐμπνεύσεώς του καὶ νὰ μὴν κινδυνεύῃ νὰ ὀδηγηθῇ σὲ νέου εἶδους ἀκαδημαϊσμούς, ποὺ δὲν θὰ ἦταν λιγώτερο στεῖροι ἀπὸ τὸν παλιὸ ἀκαδημαϊσμό· γιὰτὶ, χωρὶς ἀμφιβολία, κάθε ἀνθρώπινη ἐκδήλωσις, ἀκόμη καὶ τὰ Μαθηματικά καὶ ἡ Τέχνη, δὲν εἶναι κάτι ἄσχετο μὲ τὴν ἐξωπροσωπικὴ μας ἀνθρωπότητα, δὲν μπορεῖ νὰ προκόψῃ γιὰ πολὺ χωρὶς τὴν ζεστὴ πνευματικὴ τροφὴ ποὺ τῆς προσφέρει

ή σκέψη τών άλλων· και ό βαθύς ανθρωπισμός τών Μαθηματικών και τής Τέχνης δέν έγκειται τόσο στις ύλικές εφαρμογές τών πρώτων και στις (μέ εύρεία σημασία) ψυχαγωγικές τής άλλης, όσο στην πνευματική επικοινωνία που άποκαθιστούν ανάμεσα σε διαφόρους ανθρώπους διαφόρων εποχών.

Άρχέγονες πηγές μαθηματικών ενδιαφερόντων θα βρίσκονται πάντοτε σε προβλήματα για τα έκάστοτε υπάρχοντα μαθηματικά, άκριδώς όπως άρχέγονες πηγές καλλιτεχνικών ενδιαφερόντων θα μπορέ πάντα ό ζωγράφος να βρή στην φύση. Ή έκάστοτε υπάρχουσα επιστήμη και ή έκάστοτε διατιθεμένη φύση (γιατί κι' αυτήν την αλλάζει ό άνθρωπος, επηρεάζοντας έτσι έμέσως και τις αίσθητικές αντιλήψεις του) θ' άποτελούν πάντοτε άστείρευτες πηγές για νέες έμπνεύσεις. Νομίζω όμως, τουλάχιστον όσον άφορά τα μαθηματικά όπου και μόνον έχω τή ήθικη δικαίωμα να έχω γνώμη, ότι σύντομα κύριος δρόμος έρεύνης θ' άποβή ό «καθαρά άφηρημένος», δηλαδή αυτός στον όποιον ό μαθηματικός θα ένδιαφέρεται άποκλειστικά και μόνον για τή πνευματικό ένδιαφέρον του άξιωματικού οικοδομήματος που θα έξετάζει, χωρίς να έξαρτά τήν σημασία του οικοδομήματος αυτού από τή άν θα έχη ή όχι εφαρμογές στα ήδη υπάρχοντα μαθηματικά.

Ό δρόμος αυτός μου φαίνεται ότι θα είναι τελικά και ό πιο όρθολογιστικός διότι σ' αυτόν θα ένεργή τή πνεύμα έλεύθερα, χωρίς τις άφανείς αλλά τρομερές δεσμεύσεις τής αναμενομένης επιστημονικής αναγνωρίσεως.

Ή βαθύτερη συγκριτική μελέτη τής αναπτύξεως τών νεωτέρων Μαθηματικών και τής νεωτέρας Τέχνης θα παρουσίαζε μεγάλο ένδιαφέρον. Σημειώνουμε πάντως από τώρα μια ουσιώδη διαφορά και μια περίεργη σύμπτωση.

Ή διαφορά είναι ότι τα όσονδήποτε πρωτοποριακά μαθηματικά έχουν κοινή μέ όλα τα μαθηματικά τή συνεπή χρησιμοποίηση τής λογικής, ένω δύσκολα μπορεί κανείς να βρή κοινά στοιχεία ανάμεσα σ' ένα, όποιοδήποτε, πρωτοποριακό έργο Τέχνης και στο σύνολο τών έργων Τέχνης, έκτός κάποτε από τα χρώματα τών ζωγράφων (μήπως όμως, άραγε, άποτελούν αυτά τή αντίστοιχη στοιχειώδη τής λογικής;).

Ή σύμπτωση είναι χρονική και έγκειται στο ότι τή ξεκίνημα τών νεωτέρων μαθηματικών και τής νεωτέρας τέχνης βρίσκεται στον ίδιον, καταπληκτικό, 19ον αιώνα και μάλιστα στο δεύτερο ήμισύ του· άν τώρα παρατηρήσει κανείς ότι στον ίδιον αυτόν αιώνα προετοιμάσθηκαν οι νεώτερες ιδέες τής Φυσικής και τόσων άλλων επιστημών, και άκόμη άνεπτυχθή ή συστηματική θεώρηση κοινωνικών συνόλων στις διάφορες μεταξύ τους σχέσεις, καταλήγει στην σκέψη ότι όλα αυτά τα σύγχρονα πετάγματα του ανθρώπινου μυαλού προς τή γενική και προς τή άφηρημένη, υπήρξαν ίσως οι έκδηλώσεις μιας καθολικής πνευματικής ώριμότητος στην όποιαν έφθασε τότε ό άνθρωπος, άκριδώς όπως είχε συμβή στην αρχαία Έλλάδα (πνευματικά), στην εμφάνιση του Χριστιανισμού (ήθικά), και στην Αναγέννηση (πνευματικά).

Ξαναρχόμαστε τώρα στον νέο τρόπο όρισμού αντικειμένων τής μαθηματικής σκέψεως. Καθώς είδαμε, στηρίζονται οι νέοι όρισμοί στο ότι τα άξιωματικά συστήματα που τους διατυπώνουν δέν έγκλείουν λογικήν αντίφαση. Πώς όμως μπορεί ν' άποδείξει κανείς ότι ένα όοσμένο άξιωματικό σύστημα δέν παρουσιάζει λογικήν αντίφαση;

Στην πράξη, οι άποδείξεις αυτού του είδους είναι από τις πιο δύσκολες τών μαθηματικών. Θεωρούν συνήθως ένα άλλο άξιωματικό σύστημα, για τή όποιο δέχονται ότι έχει ήδη άποδειχθή ή έλλειψις λογικής αντιφάσεως και προσπαθούν να κατασκευάσουν μέσα σ' αυτό τή σύστημα αντικείμενα τα όποια άφ' ένός να είναι λογικώς άνεπίληπτα λόγω τής έλλείψεως λογικής αντιφάσεως του παρόντος άξιωματικού συστήματος και άφ' έτέρου να ίκανοποιούν τα άξιώματα του αρχικού άξιωματικού συστήματος [τ' αντικείμενα που έτσι όρίστηκαν, λένε ότι άποτελούν ένα πρότυπον (modèle, réalisation) του άξιωματικού τούτου συστήματος]. Άν αυτό τή επιτύχουν, απέδειξαν ότι τή αρχικό άξιωματικό σύστημα δέν περικλείει καμμιή αντίφαση· πράγματι, μια τέτοια αντίφαση θα έπρεπε να τή συναντήσουμε άπαραιτήτως και στο πρότυπόν μας, του όποιου όμως ή μη αντίφαση είναι ήδη έξασφαλισμένη. Ή άπόδειξη αυτή όμως στηρίζεται στο ότι είχε ήδη άποδειχθή ή μη αντίφαση του άξιωματικού συστήματος μέσα στο όποιο κατασκευάσαμε τή πρότυπόν μας· και τώρα έρχόμαστε στο σημαντικότερο ίσως πρόβλημα τών συγχρόνων μαθηματικών, στο να εύρεθ ή, δηλαδή, κάποιο θεμέλιο για τα μαθηματικά για τή όποιο να έχη άποδειχθή ή έλλειψη λογικής αντιφάσεως.

Έχει έπιτευχθή ή άναγωγή ένός μεγάλου μέρους τών συγχρόνων μαθηματικών (δλων τών μαθηματικών, κατά τόν Bourbaki²⁰) στην θεωρία τών συνόλων,²¹ μέ τή έννοια ότι άν μία από τις άξιωματικές θεωρίες τών συνόλων που άνεπτυχθήσαν τα τελευταία χρόνια (π.χ. ή θεωρία τών von Neumann - Bernays - Gödel) δέν περικλείει λογική αντίφαση, και όλο τή μέρος τών μαθηματικών αυτό δέν

περικλείει λογική αντίφαση. Κανείς όμως δεν έχει αποδείξει την μη αντίφαση της αξιωματικής θεωρίας των συνόλων.

Δεν θα μάς απασχολήσει σ' αυτό το άρθρο ή συστηματική σπουδή της Θεωρίας των Συνόλων· προϋποθέτει άλλωστε κάποια οικειότητα με την «Καντοριανή» Θεωρία των Συνόλων, με τὰ λογικά «παράδοξα» που προέκυψαν κατά την ανάπτυξή της και με τις προσπάθειες που έγιναν για ν' ανοικοδομηθῇ ἓνα τμήμα τουλάχιστον της «Καντοριανής» θεωρίας κατά τρόπον που νὰ μὴν προκύπτουν παράδοξα.²² Σημειώνουμε μόνον, ἀπὸ ἐπιστημονικὸ χρέος, ὅτι τὰ θέματα αὐτὰ εἰσῆχθησαν στὴν Ἑλλάδα γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Π. Ζερβό, γύρω στὰ 1917, πού ἀνέπτυξε ὠρισμένες πλευρὲς τους τόσο στὴν διδασκαλία του στὸ Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν ὅσο καὶ σὲ διαλέξεις του, στὴν προπολεμικὴ Ἑλληνικὴ Φιλοσοφικὴ Ἑταιρεία καὶ στὴν Ἀκαδημία Ἀθηνῶν.²³

Ὁ νέος τρόπος ὁρισμοῦ μαθηματικῶν ἀντικειμένων πού ἀναφέραμε προηγουμένως, παρουσιάζει μερικὲς σημαντικὲς διαφορὲς ἀπὸ τοὺς παραδοσιακοὺς τρόπους ὁρισμοῦ, πού δὲν ἔχει δικαίωμα κανεὶς νὰ τὶς παραβλέψη· θὰ τὶς ἐξετάσουμε μετὰ τὴν σειρά, ἀφοῦ ἀποφασίσουμε προηγουμένως ν' ἀποκαλοῦμε τὰ μαθηματικὰ πού χρησιμοποιοῦσαν «συγκεκριμένους» ὁρισμοὺς «προαφηρημένα»²⁴ μαθηματικά.

1. Στὰ προαφηρημένα μαθηματικά, ἔχει νόημα ἡ θεώρηση μεμονωμένων ἀντικειμένων, π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ $2/3$ ξέχωρα ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Μιὰ τέτοια θεώρηση εἶναι ἀδύνατη στ' ἀφηρημένα μαθηματικά· τοὺς λόγους θὰ τοὺς δοῦμε καλύτερα λίγο παρακάτω, μαντεύει ὅμως ἀπὸ τώρα ὁ ἀναγνώστης ὅτι ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ὅτι δὲν διαθέτουμε πιά, ὅπως πρῶτα, «ἀτομικοὺς» ὁρισμοὺς τῶν ἀντικειμένων, τῶν ἀριθμῶν π.χ., ἀλλὰ μόνον ὁρισμοὺς συνόλων· μετὰ τοὺς νέους αξιωματικοὺς ὁρισμοὺς, ὁ $2/3$ χάνει κάθε μαθηματικὴν ἔννοια ἂν τὸν ἀποχωρήσουμε ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν· οἱ νέοι ὁρισμοὶ ὁρίζουν τὰ σύνολα πρῶτα ἀπὸ τὰ μέλη τῶν συνόλων αὐτῶν.

Στὰ προαφηρημένα μαθηματικά, τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν (ὁμοίως, τῶν ἀκεραίων, τῶν πραγματικῶν κτλ.) εἶναι ἓνα καὶ μοναδικό. Δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ στ' ἀφηρημένα μαθηματικά ὅπου ὑπάρχουν ἄπειρα σύνολα πού ἔχουν, ὅλα, ἀκριβῶς τὰ ἴδια μαθηματικὰ δικαιώματα γιὰ ν' ἀποκληθοῦν «σύνολα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν». Κατὰ βάθος, τὸ αξιωματικὸ σύστημα «πού ὁρίζει τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν δὲν ὁρίζει ἓνα ὠρισμένο ἀπὸ τὰ διάφορα δυνατὰ σύνολα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἀλλ' ὅλα μαζί, χωρὶς νὰ ἐκδηλώνη καμμιά προτίμηση πρὸς τὸ ἓνα ἢ τὸ ἄλλο ἀπ' αὐτά. Δηλαδή, τὸ αξιωματικὸ αὐτὸ σύστημα ὁρίζει ὅχι μόνον ἓνα σύνολον, ἀλλὰ ἓνα σύνολον ἀπὸ σύνολα πού μαθηματικῶς εἶναι ὁμοία μετὰξὺ τους.

Ὅτι εἶπαμε ἰσχύει καὶ γιὰ τ' ἄλλα αξιωματικὰ συστήματα μετὰ τὰ ὁποῖα ὁρίζουν συνήθως σήμερα τὰ διάφορα ἀντικείμενα πού θεωροῦσαν καὶ στὰ προαφηρημένα μαθηματικά. Ὅταν ἔλθουμε ὅμως σὲ γενικώτερα σύνολα ἀντικειμένων, ἀπ' αὐτὰ πού ὁρίζουν τ' ἀφηρημένα μαθηματικά, π.χ. στὶς ὁμάδες,²⁵ τότε τὸ αξιωματικὸ σύστημα πού ὁρίζει τὴν «ἔννοια τῆς ὁμάδος» ὁρίζει ἓνα σύνολον Λ ἀπὸ σύνολα πού δὲν εἶναι ὅλα μαθηματικῶς ὁμοία μετὰξὺ τους· ἔχουν ὅλα θέβαια αὐτὰ τὰ σύνολα τὸ κοινὸ μαθηματικὸ χαρακτηριστικὸ πὼς ἱκανοποιοῦν τ' ἀξιώματα τῆς ὁμάδος, ἀλλὰ ὑπάρχουν μετὰξὺ τους καὶ σύνολα πού διαφέρουν ὡς πρὸς ἄλλα μαθηματικά χαρακτηριστικά τους, π.χ. ὑπάρχουν ὁμάδες με πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων πού καλοῦνται ὁμάδες «πεπερασμένης τάξεως») καὶ ὁμάδες με ἄπειρον πλῆθος στοιχείων (πού καλοῦνται ὁμάδες «ἀπείρου τάξεως»). Ἀνάλογη παρατήρηση ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς τοπολογίες²⁶ καθὼς καὶ γιὰ τὶς περισσότερες ἔννοιες πού ὁρίζονται ὅτ' ἀφηρημένα μαθηματικά. Ἐχουμε δηλαδὴ ἐδῶ πολλὰ αξιωματικὰ συστήματα πού ὁρίζουν σύνολα ἀπὸ σύνολα πού εἶναι ὁμοία ὡς πρὸς μερικὲς μαθηματικὲς ὁψεις τους, ἀλλὰ ὅχι ὡς πρὸς ὅλες. Κάτι τέτοιο δὲν συμβαίνει μετὰ κανένα ἀπὸ τὰ αξιωματικὰ συστήματα πού ὁρίζουν τὶς ἔννοιες τῶν προαφηρημένων μαθηματικῶν. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ θεωρεῖται ἀπὸ τὸν Bourbaki καὶ ἀπὸ ἄλλους διαπρεπεῖς μαθηματικοὺς ὡς μία ἀπὸ τὶς οὐσιωδέστερες διαφορὲς πού χωρίζουν τὰ ἀφηρημένα ἀπὸ τὰ προαφηρημένα μαθηματικά.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἔχουν πιά ἐξαντληθῇ τὰ ὅρια τῆς ὑπομονῆς τοῦ ἀναγνώστη, γιὰτὶ χρησιμοποίησα πολλὰς φορὲς τὴν ἐκφραση «μαθηματικὴ ὁμοιότης» χωρὶς νὰ τὴν ὀρίσω προηγουμένως· δυστυχῶς, οἱ ὁρισμοὶ πού δίνονται διεθνῶς στὴν ἔννοια τοῦ «ἰσομορφισμοῦ» (αὐτὸς εἶναι ὁ διεθνὴς ὅρος γιὰ ὅ,τι ἀποκαλέσαμε πρόχειρα «μαθηματικὴν ὁμοιότητα») προϋποθέτουν καὶ πράγματα πού δὲν τὰ ἔχουμε ἀναπτύξει σ' αὐτὸ τὸ ἄρθρο, χωρὶς καὶ νὰ εἶναι σίγουρο γιὰ κανένα ἀπ' ὅσους ὁρισμοὺς ξέρω ὅτι καλύπτει ὅλο τὸ πλάτος πού ἡ μαθηματικὴ φαντασία μπορεῖ νὰ δώσῃ στὸν ὅρον αὐτόν, χρησιμοποιώντας τὴν ἀρχὴ τῆς ἐλλείψεως λογικῆς ἀντιφάσεως. Θὰ προσπαθῶ ὅμως νὰ δώσω μιὰν ἰδέα στὸν ἀναγνώστη γιὰ τὴν ἐξαιρετικὰ σημαντικὴν ἔννοια τοῦ «ἰσομορφισμοῦ», σ' ἓνα παράδειγμα:

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε δύο σύνολα A καὶ B πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο

άξιωματικά συστήματα (α) και (β) και ορίζουν αντιστοίχως μια πράξη T μέσα στο A και μια πράξη $\perp$ μέσα στο B με την έννοιαν ότι, για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α_1, α_2) στοιχείων του A (αντιστοίχως, (β_1, β_2) στοιχείων του B) το $\alpha_1 T \alpha_2$ είναι ένα ώρισμένο στοιχείον του A (αντιστοίχως, το $\beta_1 \perp \beta_2$ είναι ένα ώρισμένο στοιχείον του B). Τα (α) και (β) δὲν μᾶς λένε τίποτε ἄλλο γιὰ τὰ A καὶ B .

Ἄν τώρα μπορῇ νὰ ἐγκατασταθῇ μία ἀντιστοιχία ἐν πρὸς ἐν μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ A καὶ τῶν στοιχείων τοῦ B (καὶ συμφωνήσουμε νὰ παριστάνουμε τ' ἀντίστοιχα στοιχεῖα μὲ τὰ γράμματα α καὶ β ἀντιστοίχως, ὅπου τὸ α παίρνει τὶς τιμές του ἀπὸ κάποιο σύνολον) στὴν ὁποίαν ἀντιστοιχία τὰ $\alpha \lambda T \alpha \mu$ καὶ $\beta \lambda \perp \beta \mu$ νὰ εἶναι στοιχεῖα ἀντίστοιχα, ὅποιο κι' ἂν εἶναι τὸ διατεταγμένο ζεύγος (λ, μ) , τότε τὰ A καὶ B ἐφωδιασμένα ἀντιστοίχως μὲ τὶς πράξεις T καὶ $\perp$ καλοῦνται «ἰσόμορφα» ὡς πρὸς αὐτὲς τὶς πράξεις ἢ ὡς πρὸς τὰ ἀξιωματικὰ συστήματα (α) καὶ (β).

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἂν στὰ ἀξιωματικὰ συστήματα (α) καὶ (β) ἀντικαθιστοῦσαμε τὰ σύμβολα T καὶ $\perp$ ἀπὸ ἓνα καὶ τὸ ἴδιο σύμβολο π.χ. τὸ $\circ$, τότε τὰ (α) καὶ (β) θὰ συνέπιπταν. Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι, ἀκριβῶς ὅπως καὶ τὰ σύνολα A καὶ B , ἔτσι καὶ τὰ ἀξιωματικὰ συστήματα (α) καὶ (β) ποὺ τὰ ὁρίζουν δὲν διαφέρουν παρὰ μόνον στὸν συμβολισμό.

Γενικά, θὰ μπορούσε κανεὶς νὰ πῇ ὅτι, ὅταν ἔχουμε δυὸ σύνολα A καὶ B ποὺ τὸ καθένα τους εἶναι ἐφωδιασμένο μὲ ὡρισμένες πράξεις ποὺ ὑποδηλώνονται ἀπὸ ὡρισμένα σύμβολα, θὰ τὰ λέμε «ἰσόμορφα», ἂν καὶ μόνον ἂν 1) μπορούν νὰ ἐγκατασταθοῦν μεταξὺ τους ταυτοχρόνως οἱ ἐξῆς ἀντιστοιχίες ἐν πρὸς ἐν:

Μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν A καὶ B ,

Μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν πράξεων τοῦ A καὶ τῶν πράξεων τοῦ B ,

Μία ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συμβόλων τοῦ A καὶ τῶν συμβόλων τοῦ B ,

καὶ 2) ὕστερα ἀπὸ τὴν ἐγκατάστασιν τῶν τριῶν αὐτῶν ἀντιστοιχιῶν, διαπιστοῦται ὅτι τὸ ἀντίστοιχο στοιχεῖον στὸ B κάθε συμβολικῆς ἐκφράσεως ποὺ περιέχεται στὸ A δὲν εἶναι παρὰ ἡ συμβολικὴ ἐκφράσις στὸ B ποὺ λαβαίνουμε ὅταν ἐφαρμόσωμε στὰ σύμβολα τῆς δοσμένης ἐκφράσεως τὴν τρίτη ἀντιστοιχία.

Μποροῦμε τώρα ν' ἀναδιατυπώσουμε μιὰ προηγούμενη παρατήρησιν ὡς ἐξῆς: Μιὰ οὐσιώδης διαφορὰ ἀνάμεσα στὰ προαφηρημένα καὶ στὰ ἀφηρημένα μαθηματικά εἶναι ὅτι τὰ προαφηρημένα χρησιμοποιοῦσαν ἀποκλειστικὰ σύνολα ποὺ οἱ σημερινοὶ ἀξιωματικοὶ τους ὁρισμοὶ ὁρίζουν μόνον σύνολα ἰσόμορφα μεταξὺ τους, ἐνῶ ἓνας τέτοιος περιορισμὸς δὲν ἰσχύει γιὰ τ' ἀφηρημένα μαθηματικά. Ἀπ' ἐδῶ ἔπεται καὶ τὸ συμπέρασμα: Ὁ μόνος σωστὸς τρόπος ν' ἀντιμετωπίσῃ κανεὶς τὰ προαφηρημένα μαθηματικά εἶναι νὰ τὰ θεωρήσῃ σὰν μιὰ εἰδικὴ περίπτωση τῶν ἀφηρημένων.

Ξαναγύρισε ἔτσι ἡ Μαθηματικὴ Ἐπιστὴμὴ στὴν ἄποψιν τοῦ Ἀριστοτέλους ὅτι πρέπει νὰ προχωροῦμε ἐκ τοῦ γενικοῦ πρὸς τὸ μερικόν.²⁷ (Τὴν ἄποψιν αὕτῃ θὰ βρῇ ὁ ἀναγνώστης καὶ στὸν πρόλογο τοῦ βιβλίου τοῦ Bourbaki στὸ ὁποῖον ἤδη παραπέμψαμε).

Οἱ μαθηματικὲς ἀπόψεις ποὺ προβάλαμε δὲν εἶναι οἱ μοναδικὲς (στὸ βιβλίο τῶν Fraenkel καὶ Bar - Hillel στὸ ὁποῖον παραπέμψαμε, θὰ βρῇ ὁ ἀναγνώστης τὶς περισσότερες ἀπὸ τὶς τρέχουσες ἀπόψεις· δὲν πρόλαβε νὰ περιλάβῃ ὅμως αὐτὸ τὴν σημαντικὴ θεωρίαν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Krasner²⁸ ποὺ ἀνοίγει πραγματικὰ ἓνα νέο δρόμον στὴ σκέψιν). Νομίζω ὅμως ὅτι, ὅποιαν ἐξέλιξιν κι' ἂν πάρουν τὰ μαθηματικά, θ' ἀφήσῃ πάντα τὴν σφραγίδα τοῦ τῶν σημερινῶν στάδιο τῶν ἀφηρημένων μαθηματικῶν καὶ δὲν βλέπω γιὰτί θὰ πρέπει νὰ θυσιάσῃ ἐκουσίως ὁ ἄνθρωπος τὴν ἐλευθερίαν ποὺ ἀνοίξε στὴν σκέψιν τοῦ ἢ ἀρχὴ τῆς ἐλλείψεως λογικῆς ἀντιφάσεως.

Οἱ πιὸ ἀντίθετες ἀπόψεις πρὸς τ' ἀφηρημένα μαθηματικά ποὺ ἔχουν ὡς τώρα ἀναπτυχθῇ εἶναι, ὅσο ξέρω, οἱ ἀπόψεις τῶν διαισθητιστῶν (ἀγγλικά: intuitionists), ποὺ ἀμφισβητοῦν τὴν ἰσχύν. ἀκόμη καὶ τμημάτων τῶν προαφηρημένων μαθηματικῶν. (Οἱ ἀπόψεις τους εἶναι ἄξιες πολλῆς προσοχῆς, μὲ τὴν έννοια ποὺ εἶναι χρήσιμη ἢ αὐστηρὴ κριτικὴ μιᾶς βαθυστόχαστης ἀντιπολιτεύσεως σὲ μιὰ νικητρία ἐπαναστατικὴ συμπολίτευση ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ πνεῦμα τῶν καιρῶν). Οἱ ἀπόψεις τῶν διαισθητιστῶν διατυπώθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ στὴν ἀρχαιότητα ἀπὸ τὸν Ζήνωνα τὸν Ἑλεάτη, κατανοήθηκαν ὅμως μόλις στὸ δεύτερον, ἡμισυ τοῦ 19ου αἰῶνος ἀπὸ τὸν Kronecker ποὺ κι αὐτός, μὲ τὴ σειρά του, κατανοήθηκε μόλις στὸν 20ὸν αἰῶνα ἀπὸ τὸν Brouwer, ποὺ εἶναι ἴσως ὁ πρῶτος χρονολογικὰ μαθηματικὸς ποὺ ξεπέρασε τὸν Ζήνωνα

(τόσο καταπληκτικά προφητικό ήταν, στην κατεύθυνσή του, το πνεύμα του Ζήνωνος του Έλεάτου).

Γενικότερα, ο διάλογος που γίνεται σήμερα ανάμεσα στις διάφορες σχολές της Μαθηματικής Φιλοσοφίας, δίνει πολύ συχνά την εντύπωση πώς είναι ο αντίλαλος ενός διαλόγου που έγινε στην Έλληνική αρχαιότητα. Ο Εϋδοξος και ο Εϋκλείδης είναι οί πνευματικοί πατέρες των αξιωματούχων, ο Ζήνων των διαισθητιστών. Και ο Πλάτων μάς φαίνεται μερικές φορές τόσο σύγχρονος, που αδυνατεί κανείς ν' αναζητήσει πνευματικούς απογόνους του.²⁰

Η παρατήρηση αυτή δεν ικανοποιεί μόνο την έθνική μας υπερηφάνεια, αλλά θέτει και δύο ενδιαφέροντα προβλήματα:

1. Τώρα, που ξέρουμε την λεπτότητα του αρχαιοελληνικού μαθηματικού πνεύματος, πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε μερικές ελλείψεις της Εϋκλείδειου θεμελιώσεως;

Την απάντηση θέβαια δυσκολεύει το γεγονός ότι δεν ξέρουμε αν το παλαιότερο γνωστό κείμενο Εϋκλείδειου Γεωμετρίας που υπάρχει είναι πιστόν αντίγραφο του άγνωστου μας πρωτοτύπου. Ανεξάρτητα απ' αυτό όμως, ή πιο προσιτή πείρα, μεγάλων ανθρώπων όπως ο Νεύτων, ο Lagrange, ο Riemann,... μάς δείχνει ότι και τα μεγαλύτερα ακόμη πνεύματα ξεπερνιούνται σε ακρίβεια σ' ένα μεταγενέστερο στάδιο της ανθρωπίνης σκέψης.

Αν το διατιθέμενο Εϋκλ. κείμενον είναι πιστόν αντίγραφο, διαφωτιστικά είναι νομίζω τὰ γ') και ς') των Στοιχείων (I).²⁰ Γιατί αυτά φανερά δεν είναι όρισμοί, είναι μαθηματικά προτάσεις (αίτήματα ή κοινές έννοιες ή θεωρήματα· αφού λοιπόν δεν αναφέρονται αποδείξεις τους, τα θεωρεί ο Εϋκλείδης ως είδος κοινών έννοιών τόσο φανερών, που ούτε να αναφερθώ το προφανές τους είναι καν ανάγκη). Οι προτάσεις αυτές (που συνδυάζουν έννοιες που ήδη ώρισε ο Εϋκλείδης) κάνουν, νομίζω, πιθανή την εικάasia ότι ο Εϋκλείδης στήριξε πολλά στην έννοια της διαστάσεως που του φάνηκε ταυτόχρονα βασική και αυτονόητη. Δεν θα ήταν ίσως υπερβολικό να πη κανείς ότι οί αρχαίοι Έλληνες μπόρεσαν να δημιουργήσουν αληθινά μαθηματικά έπειδή έπέτυχαν να εξαγάγουν από τις χαώδεις έμπειρικές έννοιες διαστάσεων που προϋπήρχαν μια διαισθητική μέν αλλά άφηρημένη έννοια διαστάσεως, στην όποιαν ο Εϋκλείδης στήριξε το οίκοδόμημά του.

Τα ιγ') και ιδ') των «δρων»²¹ δείχνουν καθαρά ότι ο Εϋκλείδης με την έκφραση «δροι» δεν έννοι «όρισμούς» αλλά γεωμετρικές όντότητες (τα σημεία, τις ευθείες, τα επίπεδα,...). Σκεπτόμαστε, λοιπόν, συνδυάζοντας τα προηγούμενα μήπως δεν πρέπει ν' αντιμετωπίσουμε το πρώτο κεφάλαιον των Στοιχείων (δηλαδή τους Όρους) σαν «όρισμούς» με την έννοια που πήρε στα μαθηματικά αργότερα αυτός ο όρος αλλά μάλλον σαν υποδείξεις προωρισμένες να ξαναφέρουν στη μνήμη μας έννοιες και προτάσεις που ήδη τις έχει από τη διαίσθηση. Δεν υποστηρίζω ότι έτσι έχουν άπαραιτήτως τα πράγματα, αλλά το προτείνω σαν ένα θέμα για εξέταση.

Έξ ίσου υποστηρίξιμες είναι και οί απόψεις I) των αλλοιώσεων στο κείμενο και II) του «θαμπώματος» που προκάλεσε στους αρχαίους ή ανακάλυψη των διαστάσεων. Η τελευταία περίπτωση ξαναπαρουσιάζεται πολλές φορές στην Ιστορία των μαθηματικών (έννοιες παραγώγου και ολοκληρώματος στον 17ον και τον 18ον αιώνα, π.χ.).

Η πρώτη άποψη που υποστηρίξαμε έχει ίσως σχέση και με το γεγονός της τοποθετήσεως που λάβαιναν οί Έλληνες απέναντι στα Μαθηματικά· δεν ήταν αυτά γι' αυτούς μόνο ένα πνευματικό οίκοδόμημα, αλλά αντιπροσώπευαν και το βάθος της υποστάσεως του φυσικού κόσμου.²²

Έρχομαστε έτσι, φυσιολογικά, στο δεύτερο πρόβλημα που προκύπτει από την διαπίστωση των αναλογιών μεταξύ των διαφορών που παρουσιάζουν ανάμεσά τους οί απόψεις των αρχαίων Έλλήνων μαθηματικοφιλοσόφων και των διαφορών που παρουσιάζουν μεταξύ τους οί σημερινοί στοχαστές στα ίδια θέματα.

Το πρόβλημα αυτό είναι, αν μπορώ μ' έλπίδα ν' αποβλέπη ο άνθρωπος στην δημιουργία μιας καθολικού κύρους μαθηματικής επιστήμης ή ένα τέτοιο όνειρο είναι χίμαιρα· διότι οί διαφορές που συναντούμε προέρχονται από υποκειμενικούς λόγους που πάντοτε θα εξακολουθούν να υπάρχουν (ίσως με άλλα όνόματα);

Πρόβλημα πολύπλοκο και όχι μόνον μαθηματικό, γιατί συνδέεται με το πρόβλημα: Μέχρι ποίου σημείου επηρεάζεται ή λογική του ανθρώπου από την μεταβολή των υλικών και των πνευματικών συνθηκών του περιβάλλοντός του;

Οί έρευνες σε τέτοια ζητήματα συνδέονται και με έρευνες ανθρωπολογικής φύσεως σε παλιές έποχές ή σε πρωτόγονες φυλές.

Αν θέλει ο Θεός, θα ξανάλθουμε κάποτε στα ενδιαφέροντα αυτά ζητήματα στα «Σύγχρονα Θέματα»· για να διαπιστωθώ άλλη μια φορά ότι δεν μπορεί κανείς να καταλάβη καλά το παρόν αν δεν κάνει πνευματικές αναδρομές στο άπώτατο παρελθόν και αν δεν προσπαθήσει να μαντέψη το μέλλον.

1. David Hilbert, Γερμανός μαθηματικός, από τους μεγαλύτερους όλων των αιώνων. Η εργασία στην όποιαν παραπέμπουμε δημοσιεύθηκε το 1899, υπό μορφήν συγγράμματος, τοῦ «Grundlagen der Geometrie». Νέα έκδοση αὐτοῦ (7η) ἐδημοσιεύθηκε τὸ 1930. Leipzig & Berlin 1930.

2. «Αἱ μαθηματικαὶ ἔννοιαι παρὰ Πλάτωνι», ὑπὸ Π. Ζερβοῦ, πανηγυρική ὁμιλία εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν κατὰ τὸν ἐορτασμὸν τῶν Γενεθλίων τοῦ Πλάτωνος, κατὰ τὴν 22αν Μαΐου 1950.

3. Henri Poincaré, Γάλλος μαθηματικός (1854-1912), τὸν ὁποῖον θεωροῦν γενικά, ὡς τὸν μεγαλύτερον μαθηματικὸ τῶν τελευταίων ἐβδομηντα ἔτων. Ἐγγραψε καὶ βιβλία ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τῆς ἐπιστήμης, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ πιὸ φημισμένο εἶναι ἴσως τὸ «Ἐπιστήμη καὶ Ὑπόθεσις»· αὐτὸ μεταφράστηκε καὶ Ἑλληνικά, ἀπὸ τὸν Π. Ζερβὸ τὸ 1912, στὴν σειρὰ τῶν ἐκδόσεων Φέξη.

4. Νομίζω ὅτι ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία διατηρεῖ καὶ σήμερα τὴν μορφωτικὴ ἀξία της· αὐτὸ δὲν σημαίνει ὅτι δὲν πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν οἱ νεώτερες ἀντιλήψεις ἢ ὅτι δὲν πρέπει νὰ μποῦν καὶ στοιχεῖα νεωτέρων μαθηματικῶν στὴν Μέση Παιδεία.

5. Ἡ αἰτία ποὺ δὲν διατηροῦν οἱ σχολικὲς μεταποιήσεις τὴν ἀξία τοῦ Εὐκλείδειου πρωτοτύπου δὲν εἶναι, νομίζω, μόνον παιδαγωγική. Εἶναι ἐνδεχόμενον ὅτι οἱ συγγραφεῖς τῶν σχολικῶν βιβλίων στηρίζονται συνήθως στὰ βιβλία τῶν ἀμέσως προηγουμένων τους συγγραφέων καὶ ὅχι στὸ πρωτότυπο· φθάνουμε ἔτσι διαδοχικὰ σὲ βιβλία γραμμένα πρὶν ἀπὸ τὸ βιβλίον τοῦ Hilbert καὶ ἐπομένως πρὶν κατὰ νου τὴν πλὴρως τὸ Εὐκλ. Οἰκοδόμημα.

6. Ε. Σ. Σταμάτης: «Εὐκλείδου Γεωμετρία», Τόμος I, Εἰσαγωγή, ἀρχαῖον κείμενον, μετάφρασις. Ἀθῆναι 1952.

7. Felix Klein: Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry (σελ. 188 κ.έ.) (Ἀγγλικὴ μετάφρασις ἀπὸ τὸ γερμανικόν, ἐκδοση Dover, Η.Π.Α., 1939).

8. Τὴν ἔννοια «πρόσθετα αἰτήματα» τὴν χρησιμοποιήσαμε γιὰ λόγους διδακτικούς· τὸν ἀκριβῆ τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται ὁ Hilbert θὰ τὸν βρῇ ὁ ἀναγνώστης λίγο πιὸ πέρα.

9. Τὴν ἔννοια αὐτὴ τοῦ συνόλου χρησιμοποιοῦμε ἐδῶ γιὰ λόγους διδακτικούς. Οἱ λογικὲς ἀντιφάσεις στὶς ὁποῖες ὡδεγεῖ, καμμιά φορά, ἡ χωρὶς περιορισμοὺς χρησιμοποίησις της ἀνάγκασαν τοὺς μαθηματικούς νὰ τὴν ἐγκαταλείψουν καὶ ν' ἀναζητήσουν ἀξιωματικὰ συστήματα ποὺ νὰ ὁρίζουν ἔννοια συνόλου μὴ ἀντιφατική· αὐτὸ ἔχει ἐπιτευχθῇ, κατὰ διαφόρους τρόπους, νομίζω ὁμως, ὅτι δὲν ἔχει λεχθῇ ἡ τελευταία λέξη σ' αὐτὰ τὰ θέματα. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλες ἀντιλήψεις γιὰ τὰ ζητήματα αὐτά. Παράπομπες:

I. A. A. Fraenkel καὶ Y. Bar-Hillel: Foundations of Set Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958. (Τὸ πλουσιώτερον ἴσως σύγχρονον βιβλίον γιὰ τὰ ζητήματα αὐτά).

II. Marc Krasner: Théorie de la définition, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Cauthier-Villars, Paris (Ἐπαναστατικὴ νέα θεμελίωσις τῆς θεωρίας τῶν συνόλων σὲ μορφή ἐκτεταμένης ἀλλ' ὅχι ἀκόμη πλήρους μελέτης· νομίζω ὅτι εἶναι ἀπὸ τίς βαθύτερες μελέτες στὰ θέματα αὐτὰ ποὺ ἔχουν ποτὲ γίνει).

III. E. Kamke: Θεωρία τῶν συνόλων. (Ἑλληνικὴ μετάφρασις ἀπὸ τὸ Γερμανικὸ ὑπὸ Δημ. Γκιόκα, ἐκδοσις Α. Καραβία, Ἀθῆναι 1963). Βλ. τίς παρατηρήσεις ποὺ βρίσκονται στὸ τέλος τοῦ βιβλίου καθὼς καὶ τίς Προσθήκες I καὶ II, στὶς ὁποῖες προσπαθήσαμε ν' ἀναπτύξουμε κατὰ τρόπον προσιτὸν μερικὲς νεώτερες ἀπόψεις γιὰ τὰ ζητήματα αὐτά.

10. G. Choquet: Ἀλγεβρα τῶν συνόλων (Ἑλληνικὴ μετάφρασις ἀπὸ τὸ Γαλλικὸ ὑπὸ Δημ. Γκιόκα), σελ. 34 κ.έ.

11. Π. Ζερβοῦ: Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς (Ἀθῆναι, 1929), σελ. 30 κ.έ.

12. Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς σημερινοὺς μαθηματικούς· ὑπάρχουν ὁμως καὶ ἀντίθετες ἀπόψεις, π.χ. τῶν διαισθητιστῶν (intuitionnistes).

13. Τὸ ἀξιοσημείωτο εἶναι ἐδῶ ὅτι ὁ Hilbert καὶ ὁ Poincaré εἶχαν ἀντίθετες ἀπόψεις σὲ ἄλλα ζητήματα μαθηματικῆς φιλοσοφίας.

14. Ὑπάρχουν καὶ ἐξαιρέσεις, αὐτὲς ὁμως δὲν ἐδημιούργησαν κατάστασιν πρὶν ἀπὸ τὸν 19ον αἰῶνα.

15. Αὐτὸ δὲν σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ παίζουν τώρα λιγώτερον σημαντικὸ ρόλο στὰ μαθηματικά· ἀπεναντίας, ἡ θεώρησις γενικωτέρων ἀντικειμένων τῆς μαθηματικῆς σκέψεως ἔγινε ἀφορμὴ νὰ κατανοήσουμε καλύτερα τὴ θέση τῶν ἀριθμῶν καὶ νὰ διακρίνουμε ποιὲς ιδιότητες ἀνήκουν ἀποκλειστικὰ στοὺς ἀριθμούς καὶ ποιὲς σὲ γενικώτερα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς ἀντικείμενα τῆς σκέψεως.

16. Οἱ μὴ Εὐκλείδειες γεωμετρίες τοῦ Lobatsevski καὶ τοῦ Bolyai ἀφ' ἑνὸς καὶ τὰ quaternions τοῦ Hamilton ἀφ' ἑτέρου πρέπει, νομίζω, νὰ θεωρηθοῦν ὡς μεγάλα βήματα ὅχι

μόνον λόγω της μαθηματικής σημασίας τους αλλά και διότι έδωσαν στον άνθρωπο νέα (ως προς τους αριθμούς και ως προς την Εύκλ. γεωμετρία) αντικείμενα της μαθημ. σκεψέως με την έννοια αυτή, πρέπει να δικαιολογήσουμε και τον ένθουσιασμό του μεγάλου Hamilton που αφιέρωσε την ζωή του στην συστηματική ανάπτυξη επιστήμης στηριγμένης στα quaternions· ένοιωθε ασφαλώς την γενικώτερη σημασία της αξιωματικής μεθόδου και ενεργώντας σε μια ειδική περίπτωση, έξοικειώνει τους νεωτέρους μαθηματικούς με την ιδέα να αναπτύσσουν επιστήμη επάνω σε αντικείμενα διαφορετικά από τους αριθμούς και τα αντικείμενα της Εύκλ. γεωμετρίας.

17. 1899 (Hilbert)· προσπάθειες όμως είχαν γίνει και παλαιότερα, ή δέ πρώτη ολοκληρωμένη αξιωματική διατύπωση είναι ίσως αυτή που έδωσε ο Mach (1884) στην Κλασσική Μηχανική.

18. Τα χρονικά όρια που θέτουμε είναι πολύ σχετικά και αποβλέπουν μόνο στον χονδρικό χρονικό προσανατολισμό του αναγνώστη· κατά βάθος, σ' όλες τις εποχές υπάρχουν «κλασσικοί» και «μοντέρνοι» μαθηματικοί.

19. Βλ. σελ. 194—195 του βιβλίου του Felix Klein στο όποϊον παραπέμψαμε στην (8).

20. Βλ. και N. B o u r b a k i. Ψευδώνυμον υπό το όποϊον συνεργάζονται μερικοί από τους διαπρεπεστέρους συγχρόνους Γάλλους μαθηματικούς, όπως οι H. Cartan, Cartier, Chevalley, Choquet, Diendonné, Godement, Grothendieck, Lazard, Serre, d. Schwartz, A. Weil κ.ά. Έκδίδουν από αρκετά χρόνια, τμηματικά, το σύγγραμμα Element de Mathématique, στο όποϊον επιδιώκουν να θεμελιώσουν, με αυστηρή λογική συνέπεια, όλους τους βασικούς κλάδους των νεωτέρων μαθηματικών. Η έκλογή των θεμάτων τους επηρεάζεται από τις αυστηρές δογματικές μαθηματικές αντιλήψεις που έχει ή ομάδα αυτή.

Το σύγγραμμα του Bourbaki παίζει για τα νεώτερα μαθηματικά ένα ρόλο ανάλογο μ' εκείνον που έπαιξαν τα μεγάλα Γαλλικά Cours d' Analyse (C. Jordan, E. Picard, E. Goursat, J. Hadamard) για την κλασσική ανάλυση.

21. Η θεωρία των συνόλων έδημιουργήθηκε στο δεύτερο ήμισυ του 19ου αιώνας από τον G. Cantor. Θεωρείται από πολλούς ως το μεγαλύτερο έννοιολογικό επίτευγμα στα μαθηματικά μετά τα επιτεύγματα των αρχαίων Έλλήνων.

Στην «Καντοριανή» μορφή της ή θεωρία αυτή αναπτύσσεται στο βιβλίο του Kamke στο όποϊον ήδη παραπέμψαμε (10, III).

22. Παραπέμπω σχετικώς στο ώραϊο βιβλίο του Kamke που μετέφρασε στα Έλληνικά ο κ. Γκιόκας. Βλ. ακόμη την ώραϊα έκδοση από τον Jourdain των έργων του Cantor, εκδοσις Dover.

23. Βλ. πρό παντός την διάλεξη του Π. Ζερβού «Η λογική του άπειρου», πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών.

24. Ο όρος «π ρ ο α ξ ι ω μ α τ ι κ ά μαθηματικά» που χρησιμοποιούν μερικοί ξένοι συγγραφείς έχει το μειονέκτημα ότι παραβλέπει το ότι ή Γεωμετρία του Εύκλειδου ά π ο τ ε λ ε ι άξιωματικά μαθηματικά.

25. Ακολουθώντας τον Π. Ζερβό (Έναρκτήριο, 1918) μεταφράζουμε έτσι τον γαλλικό όρο groupe (άγγλικά : group). Ο αείμνηστος Κ. Καραθεοδωρή είχε προτείνει τον όρο «σύμπλεγμα» που τονίζει την «όργανική» σχέση που έχουν μεταξύ τους τα στοιχεία του groupe. Το μειονέκτημα του όρου «σύμπλεγμα» είναι το ότι το αντίστοιχόν του complexe (άγγλικά : complex) χρησιμοποιείται διεθνώς με πολλές έννοιες διαφορετικές από την έννοια του groupe.

26. Από επιστημονικό χρέος αναφέρω έδω ότι το πρώτο Έλληνικό άρθρο (δημοσιευμένο στην Ελλάδα) τοπολογίας οφείλεται στον Καθηγητή Ν. Κριτικό· ήταν μια νέα απόδειξη για το θεώρημα του Jordan για τις άπλές κλειστές καμπύλες του επιπέδου, που δημοσιεύθηκε προπολεμικά· ή εισαγωγή του περιείχε αρκετά στοιχεία κλασσικής τοπολογίας.

27. Βλ. και Χ α ρ ι κ λ ε ί α ς Π. Ζ ε ρ β ο ύ : Εισαγωγικά σημειώσεις εις την μελέτην του έπους και της λυρικής ποιήσεως των αρχαίων Έλλήνων. (Αθήναι, 1955), σελ. 36.

28. Παραπέμψαμε ήδη στα σχετικά άρθρα του Krasner· τις ιδέες του ανάπτυξε ο Krasner και στο Πανεπιστήμιον Αθηνών σε δυο διαλέξεις του το φθινόπωρο του 1961.

29. Βλ. Ι. Π. Ζ ε ρ β ο ύ : Αί μαθηματικά έννοιαι παρά Πλάτωνα.

II. Ε. Σταμάτη : Περί της θεωρίας των συνόλων παρά Πλάτωνα (περιοδικόν «Πλάτων», Τεύχη Α' και Β', 1960).

30. Παίρνουμε από το βιβλίο του Ε. Σταμάτη «Εύκλειδου Γεωμετρία» (σελ. 36) :

γ'. Γ ρ α μ μ ή ς δ έ π έ ρ α τ α σ η μ ε ι α.

στ'. Έ π ι φ α ν ε ί α ς δ έ π έ ρ α τ α γ ρ α μ μ α ί.

31. ιγ'. "Ορος έστιν, ό τινός έστι πέρας.

ιδ'. Σχῆμα έστι το υπό τινος ή τινων όρων περιεχόμενον. (Βλ. Εύκλειδου Γεωμετρία, εκδοσις κ. Ε. Σταμάτη, σελ. 36).

32. Βλ. και το ώραϊο βιβλίο του J. W. N. Sullivan : Limitations of Science.

Υπάρχει και Έλληνική μετάφρασή του, με τον τίτλο : Ο ί κ α τ α κ τ ή σ ε ι ς τ ῆ ς έ π ι σ τ ῆ μ η ς γ ύ ρ ω σ τ ά μ ε γ ά λ α π ρ ο β λ ῆ μ α τ α, από τον Π. Ίωαννίδη (Έκδοση των «Φίλων του βιβλίου»).