Η γένεση μιας επιστήμης: Τα ελληνικά μαθηματικά

Τι σημαίνει επιστημονικός λόγος; Μπορούμε να δώσουμε έναν ικανοποιητικά αναλυτικό ορισμό; Σε ποια εποχή μαρτυρείται από τις ιστορικές πηγές και τα διασωθέντα αρχαία κείμενα εμφάνιση επιστημονικού λόγου; Ποιες επιστήμες γεννήθηκαν κατά την αρχαιότητα και σε ποια σχέση μεταξύ τους; Αρκεί η συσσώρευση εμπειρικών γνώσεων για την επιστημική μεταλλαγή, για την επιστημονική επανάσταση; Πώς εμφανίζεται το ζήτημα της διεπιστημονικότητας στις απαρχές της επιστήμης;

Η προσπάθεια απάντησης στα ερωτήματα αυτά και η αναζήτηση του επιστημονικού λόγου της ελληνικής αρχαιότητας σημαίνει αναζήτηση όχι μόνο των πρώτων επιστημονικών εννοιών αλλά και της μεθοδολογίας προσπέλασης στις έννοιες αυτές και των εκφραστικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν από τη γλώσσα της εποχής.

Πριν προχωρήσουμε, είναι αναγκαίο να αποσαφηνίσουμε και να οριοθετήσουμε σημασιολογικά ορισμένους όρους που μας είναι απαραίτητοι.

Στον όρο *γλώσσα* δίνουμε το περιεχόμενο ενός συστήματος από τρία σύνολα:

α) Ενα πεπερασμένο σύνολο σημείων (ή συμβόλων), το αλφάβητο. Το *αλφάβητο* μπορεί να αποτελείται από *ατομικά σύμβολα,* δηλαδή κάθε σύμβολο να είναι ένα μεμονωμένο γράμμα, ή από σύμβολα *μοριακού τύπου,* δηλαδή συναρμογές ατομικών συμβόλων, ή ακόμη να είναι μίγμα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων.

β) Ενα πεπερασμένο σύνολο *κανόνων σύνταξης.* Οι κανόνες αυτοί, είτε είναι κανόνες παραγωγής τύπου Chomsky, είτε είναι συντακτικοί κανόνες μιας ομιλούμενης γλώσσας, καθορίζουν τη σειρά με την οποία πρέπει να τεθούν τα στοιχεία του αλφάβητου ώστε να συγκροτήσουν *επιτρεπτές* (γραμματικά ορθές) ακολουθίες συμβόλων, τις *λέξεις* ή τις *φράσεις,* ανάλογα με τον τύπο του αλφάβητου.

γ) Ενα σύνολο *κανόνων σήμανσης* ή *σημασιολογικών κανόνων.* Οι κανόνες αυτοί αποδίδουν σημασία σε κάθε στοιχείο του αλφάβητου που συμμετέχει στη συγκρότηση μιας φράσης. Μπορούμε να φανταστούμε τους σημασιολογικούς κανόνες ως απεικονίσεις από το σύνολο των σημασιών στο αλφάβητο. Μια τέτοια απεικόνιση f παίρνει μια σημασία x *(σημαινόμενο)* και την αντιστοιχεί σ' ένα σημείο $f(x)$ *(σημαίνον),* συγκροτώντας το *γλωσσικό σημείο* $(x, f(x))$.

Το πλαίσιο αυτό αποτελεί αναλυτικό ορισμό για τις τεχνητές γλώσσες. Δηλαδή, αν δοθούν τα τρία αυτά σύνολα, η γλώσσα είναι πλήρως ορισμένη, ενώ σε ό,τι αφορά τις φυσι-

---

Ο Ευτύχης Παπαδοπετράκης είναι λέκτορας στο Πανεπιστήμιο Πατρών

κές γλώσσες, αγκαλιάζει μόνο τους τρεις βασικούς τομείς που μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αφήνοντας απέξω τομείς όπως η φωνολογία, η ετυμολογία, η ορθογραφία κ.τ.λ. [1].

Η συνδυασμένη εφαρμογή των συντακτικών και σημασιολογικών κανόνων πάνω στο λεξιλόγιο (θεωρούμενο ως αλφάβητο μοριακού τύπου) αποτελεί μια υλοποίηση, μια *πραγμάτωση* της γλώσσας. Το αποτέλεσμα της υλοποίησης αυτής είναι *ο λόγος*. Γραπτός μεν, εάν το αλφάβητο είναι σύνολο γραφημάτων, προφορικός δε εάν το αλφάβητο είναι σύνολο φωνημάτων.

Ο επιστημονικός λόγος σε μια τέτοια θεώρηση, δηλαδή από εντελώς τυπική άποψη, δεν είναι τίποτα άλλο από την πραγμάτωση της επιστημονικής γλώσσας. Έτσι, ο μαθηματικός λόγος από τυπική άποψη είναι η πραγμάτωση της μαθηματικής γλώσσας.

Είναι λοιπόν φανερό ότι ο μαθηματικός λόγος προαπαιτεί την ύπαρξη της πραγματούμενης μαθηματικής γλώσσας. Όμως η μαθηματική γλώσσα γεννήθηκε μέσα στα πλαίσια της φυσικής γλώσσας με σημασιολογικές διαφοροποιήσεις των εκφραστικών μέσων της καθομιλουμένης. Δηλαδή, η μαθηματική γλώσσα διαφέρει, σ' εκείνη τη φάση, από την καθομιλουμένη μόνο ως προς το σύστημα των σημασιολογικών κανόνων. Έτσι, *ένα κριτήριο για την αναζήτηση του μαθηματικού λόγου αποτελεί η ρητή διατύπωση των νέων σημασιολογικών κανόνων, που σημαίνει εμφάνιση των μαθηματικών ορισμών.*

Για παράδειγμα, το όνομα κύκλος υπάρχει στη γλώσσα με πεδίο σημασίας το περιβάλλον δραστηριότητας του ανθρώπου πολύ πριν από την εμφάνιση του ορισμού που συναντάμε στα στοιχεία του Ευκλείδη. Αντίθετα, ο ορισμός *«Κύκλος ἐστί σχῆμα ἐπίπεδον ὑπό μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἥ καλεῖται περιφέρεια, πρός ἥν ἀφ' ἑνός σημείου τῶν ἐντός τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν»* [Ευκλ. Ι, Ορ. 15] έχει πεδίο σημασίας το σύμπαν πλέον των μαθηματικών αντικειμένων, ένα σύμπαν νοητών κατασκευών.

Αναζήτηση ωστόσο του επιστημονικού λόγου σημαίνει ιστορία της επιστήμης και ιστορία σημαίνει πρώτα και κύρια πηγές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι πηγές μας είναι:

α) Αποσπάσματα ή και ολόκληρα έργα μαθηματικών που έχουν διασωθεί.

β) Μαρτυρίες άλλων συγγραφέων.

γ) Μελέτες και αποτελέσματα ιστορικών της επιστήμης, τα οποία κατά κανόνα υιοθετούμε μόνο αν η αναδρομή στις πηγές μας οδηγεί στην ίδια άποψη.

Με βάση λοιπόν τα δεδομένα που η επιστημονική έρευνα πάνω στο προηγούμενο υλικό έχει φέρει μέχρι στιγμής στο φως, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να διακρίνουμε τρία στάδια στην ιστορία της επιστήμης:

— Ένα προεπιστημονικό εμπειρικό, κατά το οποίο πραγματοποιείται η συσσώρευση ενός πλήθους εμπειρικών γνώσεων και πρακτικών αντιμετώπισης προβλημάτων.

— Το στάδιο του ραγδαίου ποιοτικού μετασχηματισμού του συνόλου των γνώσεων αυτών και της συγκρότησής τους σε λογικά διαρθρωμένο σύνολο γνώσεων. Σημαντικότατο στοιχείο της φάσης αυτής αποτελεί η εμφάνιση του επιστημονικού λόγου και η αποσαφήνιση των κανόνων του παιγνιδιού, η σταδιακή κατάκτηση δηλαδή συστηματικών κανόνων συμπερασμού.

— Το στάδιο της *σχετικά* αυτοτελούς ανάπτυξης της επιστήμης, η οποία δε στηρίζεται πλέον τόσο άμεσα στην εμπειρία αλλά και σε συστηματικούς κανόνες συμπερασμού που σε μεγάλο βαθμό έχουν κατακτηθεί στο προηγούμενο στάδιο.

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα που θέσαμε στην αρχή, αναπτύσσοντας τρεις βασικές θέσεις:

1η θέση: Τα μαθηματικά είναι ιστορικά το πρώτο παράδειγμα επιστήμης που διαθέτουμε.

2η θέση: Στην ιστορία των μαθηματικών μπορούμε να διακρίνουμε τα τρία στάδια που προαναφέραμε.

3η θέση: Ο μαθηματικός λόγος είτε αποτέλεσε το πλαίσιο είτε το πρότυπο για την ανάπτυξη άλλων επιστημονικών γνώσεων, άλλων επιστημονικών περιοχών. Με άλλα λόγια, η Φυσική (Οπτική, Μηχανική, Υδροστατική, Κινηματική), η Αστρονομία, η Μουσική και η Λογική, γεννήθηκαν είτε μέσα στα πλαίσια των μαθηματικών της εποχής είτε σε στενή αλληλεπίδραση μ' αυτά.

Τα μαθηματικά είναι ιστορικά το πρώτο παράδειγμα επιστήμης

Η αποδοχή ή απόρριψη της θέσης αυτής εξαρτάται από τον ορισμό που καθένας δέχεται για την επιστήμη: Εάν ως επιστήμη γίνεται αποδεκτό ένα οποιοδήποτε σύνολο γνώσεων ή δοξασιών που αφορούν απλά μια γνωστική περιοχή, χωρίς κανένα περιορισμό στην οργάνωση, τη μέθοδο έρευνας, τη λογική δομή και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, τότε και η αστρολογία των Βαβυλωνίων —ή και η σημερινή— και τα μαθηματικά τους ή αυτά των Αιγυπτίων, η μαντεία κ.τ.λ. είναι επιστήμες.

Εάν όμως τεθούν κάποιοι περιορισμοί —για παράδειγμα, αυτοί του Αριστοτέλη— τότε:

(α) Τα αντικείμενα της επιστήμης έχουν εξασφαλισμένη ύπαρξη, είτε από αξιώματα είτε από τις αποδείξεις.

(β) Ορισμένα γεγονότα μεταξύ των αντικειμένων αυτών συμβαίνουν *εκ φύσεως*. Δηλαδή κάποιες αποφάνσεις γίνονται αποδεκτές ως αληθείς, χωρίς απόδειξη, από όλους όσοι επιθυμούν να ασχοληθούν ή ασχολούνται με την επιστήμη αυτή. Δεν είναι καθόλου τυχαίο ότι οι αποφάνσεις αυτές εισάγονται από τον Ευκλείδη με προστακτικές παρακειμένου *(Ηιτήσθω στα Στοιχεία, Υποκείσθω στα Οπτικά και τα Φαινόμενα).*

(γ) Οποιαδήποτε άλλη απόφανση (δηλαδή θεώρημα) εντάσσεται μέσα στο πλαίσιο της επιστήμης μόνο αν είναι λογική συνέπεια των προηγούμενων αποφάνσεων. Ή, κατά μια πιο αριστοτελική διατύπωση, επιστημονικός είναι μόνο ο συλλογισμός ο οποίος στηρίζεται σε αληθείς προκείμενες, αληθείς δε οι αποφάνσεις που είναι παραγωγές επιστημονικών συλλογισμών.

Την αντίληψη ότι και τα θεωρήματα, όπως και τα αιτήματα, εκφράζουν γεγονότα που συμβαίνουν στον πραγματικό κόσμο τη συναντάμε αργότερα και στον Αρχιμήδη, ο οποίος γράφει προς τον Δοσίθεο, στο *Περί σφαίρας καί κυλίνδρου Α* ότι *«... ταῦτα δὲ τά συμπτώματα τῇ φύσει προϋπῆρχεν περί τά εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περί τήν γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων...».*

Στην ιστορία όμως της ανθρώπινης σκέψης η θεωρία προηγείται λογικά και χρονικά της μεταθεωρίας. Έτσι, η λογική ήρθε μετά [2, σελ. 21], για να αναδείξει σε νόμους κανόνες που είχαν ήδη κατακτηθεί, και να αποτελέσει ένα αυστηρό κριτήριο-πλαίσιο για την ίδια την επιστήμη. Τα μαθηματικά της εποχής του Αριστοτέλη, ως σύνολο γνώσεων και δραστηριοτήτων που υπερβαίνει τον απλό εμπειρισμό, ήταν ήδη αξιωματικοποιημένη παραγωγική επιστήμη και είναι βέβαιο ότι ο Αριστοτέλης βάσισε σ' αυτά πρώτα και κύρια τις μεταθεωρητικές του επεξεργασίες. Δυστυχώς από την επαναστατική αυτή περίοδο που αρχίζει με τον Θαλή (624-548 π.Χ.) και τελειώνει με τον Ευκλείδη ελάχιστα αποσπάσματα έργων έχουν διασωθεί. Ήδη στα τέλη του 6ου αιώνα και το πρώτο μισό του 5ου αιώνα θα πρέπει να είχε συσσωρευθεί αρκετό υλικό ώστε να ανακύψει η ανάγκη για συγκέντρωση και ταξινόμηση. Έτσι, η πληροφορία του Πρόκλου (410-485) ότι *«...πρῶτος γάρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καί στοιχεῖα συνέγραψεν...»* [3, σ. 66] θα πρέπει να θεωρηθεί βάσιμη. Από τα *Στοιχεία* λοιπόν του Ιπποκράτη του Χίου (~450 π.Χ.) διαθέτουμε το πιο ολοκληρωμένο αυθεντικό απόσπασμα της εποχής εκείνης. Είναι αυτό που διέσωσε ο Σιμπλίκιος αντιγράφοντας, όπως ο ίδιος χαρακτηριστικά λέει κατά λέξη, από τη *Γεωμετρική Ιστορία* του Εύδημου (~ 330 π.Χ.), στην οποία είχαν συμπεριληφθεί τα *Στοιχεία* του Ιπποκράτη του Χίου.

Τα αποσπάσματα αυτά που αναφέρονται στους τετραγωνισμούς των μηνίσκων είναι το αρχαιότερο δείγμα μαθηματικού λόγου που έχει διασωθεί. Έχει συλλογισμούς αποδείξεων, χρησιμοποιεί γράμματα, όχι βεβαίως ως σύμβολα μεταβλητών ούτε καν ως ονόματα των εικόνων των μαθηματικών αντικειμένων, αλλά ως σημεία πάνω στο σχήμα για τον προσανατολισμό του αναγνώστη [4, σελ. 157]. Η τέτοια χρήση των γραμμάτων αποτελεί και το πειστικότερο τεκμήριο αρχαϊκότητας των κειμένων αυτών.

Το πρώτο παράδειγμα *ολοκληρωμένου* επιστημονικού λόγου που διαθέτουμε είναι κατά 150 περίπου χρόνια νεότερο από τα κείμενα του Ιπποκράτη του Χίου και κατάτι αρχαιότερο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Πρόκειται για τα έργα του Αυτόλυκου (περίπου 360 με 290 π.Χ.) *Περί κινουμένης σφαίρας*, με αντικείμενο τη γεωμετρία της κινούμενης σφαίρας, και *Περί ἐπιτολῶν καί δύσεων Α΄ και Β΄*, που αναφέρεται σε θέματα σφαιρικής αστρονομίας. Ο επιστημονικός λόγος στα έργα αυτά έχει την ίδια δομή με τον ευκλείδειο μαθηματικό λόγο όπως εμφανίζεται στα *Στοιχεία* και στα *Δεδομένα*. Στα υπόλοιπα διασωθέντα έργα του Ευκλείδη (*Οπτικά, Κατοπτρικά* και *Κατανομή κανόνος*) ο επιστημονικός λόγος ακολουθεί τη δομή του μαθηματικού λόγου. Το δεύτερο μισό του 4ου αιώνα π.Χ. ο μαθηματικός λόγος έχει δομηθεί όπως αρμόζει σε μια αξιωματικοποιημένη επιστήμη:

«Πᾶν πρόβλημα καί πᾶν θεώρημα τό ἐκ τελείων αὐτοῦ μερῶν πεπληρωμένον βούλεται ταῦτα πάντα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ· *πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα*. τούτων δέ ἡ μέν πρότασις λέγει, τίνος δεδομένου τί τό ζητούμενόν ἐστιν· ἡ γάρ τελεία πρότσις ἐξ ἀμφοτέρων ἐστίν· ἡ δέ ἔκθεσις αὐτό καθ' ἑαυτό τό δεδομένον ἀποδιαλαβοῦσα προευτρεπίζει τῇ ζητήσει, ὁ δέ διορισμός χωρίς τό ζητούμενον, ὅτι ποτέ ἐστι, διασαφεῖ, ἡ δέ κατασκευή τά ἐλλείποντα τῷ δεδομένῳ πρός τήν τοῦ ζητουμένου θήραν προστίθεσιν, ἡ δέ ἀπόδειξις ἐπιστημονικῶς ἐκ τῶν ὁμολογηθέντων συνάγει τό προκείμενον, τό δέ συμπέρασμα πάλιν ἐπί τήν πρότασιν ἀναστρέφει βεβαιοῦν τό δεδειγμένον. καί τά μέν σύμπαντα μέρη τῶν τε προβλημάτων καί τῶν θεωρημάτων ἐστί τοσαῦτα, τά δέ ἀναγκαιότατα καί ἐν πᾶσιν ὑπάρχοντα πρότασις καί ἀπόδειξις καί συμπέρασμα» [*Ήρων ο Αλεξανδρεύς, Γεωμετρικά*, 136.13.1 έως 136.13.17]. Ταυτόσημη είναι και η σχετική αναφορά του Πρόκλου [3, σελ. 203] στα μέρη του μαθηματικού λόγου της εποχής του Ευκλείδη τέσσερις περίπου αιώνες αργότερα [4, σελ. 153].

Ορισμένα από τα μέρη αυτά —έκθεση, απόδειξη και συμπέρασμα— είναι ευδιάκριτα στα διασωθέντα αποσπάσματα του Ιπποκράτη του Χίου. Το γεγονός αυτό μάς επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι πρώτα μορφοποιήθηκε ο μαθηματικός λόγος και μαζί του σε σημαντικό βαθμό οι αρχές της αξιωματικοποιημένης επιστήμης, ώστε να αποτελέσει και το πρότυπο ή τη μήτρα για τις άλλες επιστήμες.

Δεν υπερβάλλουμε δε καθόλου αν ισχυριστούμε ότι ο μαθηματικός λόγος στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη έχει την αρτιότητα των γεωμετρικών κατασκευών που περιγράφει. Όμως ο λόγος αυτός δεν εμφανίστηκε με μιας πάνοπλος, όπως η Αθηνά μέσα από το κεφάλι του Δία. Έχει μια ιστορία τριών αιώνων πίσω του.

Στην ιστορία των μαθηματικών μπορούμε να διακρίνουμε τα τρία στάδια που αναφέραμε

Για μια μεγάλη ιστορική περίοδο, που χάνεται στην πριν την εποχή του σιδήρου, η γνώση και η πράξη πήγαιναν μαζί. Ήταν μια ενιαία ζωντανή διαδικασία που περνούσε από γενιά σε γενιά μόνο με τον προφορικό λόγο και το παράδειγμα.

Κρίνοντας με τα μεγέθη της εποχής εκείνης, στο βαθμό που μπορούμε να τα αναπλάσουμε, θα πρέπει, όπως σχολιάζει ο J. Bernal, να είμαστε βέβαιοι ότι *«εκείνο που μεταβιβαζόταν στους απογόνους πρέπει να ήταν ένα επιβλητικό και πολύτιμο απόθεμα γνώσεων - πολύ μεγαλύτερο από ό,τι θα μπορέσει να μας αποκαλύψει ίσως η αρχαιολογική σκαπάνη»* [5, σελ. 171].

Η τελευταία φάση εκείνης της περιόδου, που είναι πλέον εποχή του σιδήρου, αποτελεί το προεπιστημονικό εμπειρικό στάδιο για τα μαθηματικά. Όπως φαίνεται από τις πηγές που διαθέτουμε, μια μεγάλη συσσώρευση γνώσεων σχετική με τους αριθμούς, τη μέτρηση επιφανειών και όγκων και την κατασκευή μεγάλων έργων πραγματοποιήθηκε, όχι τυχαία, στις δυο μεγάλες εύφορες κοιλάδες, του Νείλου και της Μεσοποταμίας. Θα αναφερθούμε λοιπόν με συντομία στα πολιτισμικά επιτεύγματα που σχετίζονται με τα μαθηματικά των πολιτισμών της Αιγύπτου και της Βαβυλωνίας και όχι στους ταυτόχρονους πολιτισμούς της Κίνας και της Ινδίας, αφού οι δύο αυτοί πολιτισμοί επηρέασαν άμεσα ή έμμεσα τον ελλαδικό χώρο όπου γεννήθηκε η πρώτη αφηρημένη ορθολογική επιστήμη.

Από το σκήπτρο του βασιλιά των Αιγυπτίων Μήνη, ιδρυτή της πρώτης δυναστείας των Φαραώ το 3.000 π.Χ. περίπου, μαθαίνουμε ότι οι Αιγύπτιοι [6, α, β] διέθεταν ήδη ένα εύχρηστο δεκαδικό αθροιστικό αριθμητικό σύστημα για την αναπαράσταση μέχρι και πολύ μεγάλων αριθμών. Πρόκειται για μια αδέσμευτη από τα συμφραζόμενα τυπική γλώσσα. Το αλφάβητό της διαθέτει επτά σύμβολα, ενώ η σύνταξή της δύο κανόνες: την απλή παράθεση και την αντικατάσταση κάθε δεκάδας παρατιθέμενων συμβόλων κάποιας αξίας από ένα σύμβολο επόμενης αξίας [6, δ].

Σε μετέπειτα χρόνους, διέθεταν και σύμβολα για τα μοναδιαία κλάσματα και ένα ακόμα σύστημα αρίθμησης που το χρησιμοποιούσε αποκλειστικά το ιερατείο. Από δύο παπύρους, τον πάπυρο του Rhind, γραμμένο γύρω στο 1.800 π.Χ., που είναι ωστόσο αντίγραφο ενός πολύ αρχαϊκότερου κειμένου, και τον πάπυρο της Μόσχας, σύγχρονο του προηγούμενου, έχουμε πολλές πληροφορίες για τη γεωμετρία και την αριθμητική των αρχαίων Αιγυπτίων. Πρόκειται για πρακτικές και χρήσιμες γνώσεις και διαδικασίες πάνω στη γη. Ευθειοποίηση, προσανατολισμός από τα σημεία του ορίζοντα, άρρητες συνταγές για στοιχειώδεις υπολογισμούς εμβαδών και όγκων, που άλλες είναι ακριβείς και άλλες κατά προσέγγιση. Για παράδειγμα, υπολόγιζαν σωστά το εμβαδόν του τριγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και λαθεμένα του τυχαίου τετράπλευρου (πολλαπλασίαζαν τα ημιαθροίσματα των απέναντι πλευρών). Η έννοια της γωνίας δε φαίνεται να έχει πλήρως κατακτηθεί, ενώ για το π είχαν, σε σύγχρονα εκφραστικά μέσα, την πολύ καλή προσέγγιση:

$$\pi \sim 4(8/9)=3{,}1605...$$

Είχαν αναπτύξει αλγόριθμους για τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και είχαν καταρτίσει κατάλληλους πίνακες για τη μετατροπή ενός πηλίκου σε άθροισμα μοναδιαίων κλασμάτων. Είχαν αναπτύξει εμπειρικές τεχνικές για την αντιμετώπιση προβλημάτων που σήμερα αντιμετωπίζονται με εξισώσεις πρώτου βαθμού, ενώ στον πάπυρο του Βερολίνου υπάρχει ένα πρόβλημα που αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$x^2+y^2=100$$
$$3x=4y$$

Δεν είναι καθόλου τυχαίο ότι από μια περιοχή της γης με σχεδόν ίδιες γεωφυσικές συνθήκες, αυτή της Μεσοποταμίας, έχουμε ένα ακόμα δείγμα αρχαϊκού συστήματος αρίθμησης. Όπως μαθαίνουμε από 45.000 και πλέον πήλινες πινακίδες που έχουν αποκρυπτογραφηθεί στο δυτικό τμήμα της γόνιμης αυτής κοιλάδας ήδη από το 4.000 ως το 2.000 π.Χ., ο λαός των Σουμερίων είχε φτάσει σε ένα πολύ υψηλό πολιτισμικό επίπεδο και είχε κατακτήσει την τεχνική της γραφής: μια μικρή ράβδος στο άκρο της οποίας ήταν χαραγμένο το αρνητικό αποτύπωμα μιας σφήνας πιεζόμενο πάνω σε μαλακό πηλό χάραζε το σχήμα αυτό, που έμενε ανεξίτηλο μετά το ψήσιμο της πήλινης πλάκας. Με τη συνδυασμένη επίθεση στον πηλό της ιδιόμορφης αυτής γραφίδας υπήρχε η δυνατότητα εγχάραξης των δύο συμβόλων 𒁹 και 𒌋, για τις μονάδες και τις δεκάδες αντίστοιχα, της περίφημης σφηνοειδούς γραφής που ανάγεται στο 3.000 π.Χ.

Οι μετέπειτα κατακτητές των Σουμερίων, Ακάδιοι και αργότερα Βαβυλώνιοι, μαζί με τα πολιτισμικά στοιχεία που αφομοίωσαν πήραν και την τεχνική της γραφής. Έτσι, το αρχαιότερο βαβυλωνιακό κείμενο με αριθμούς που γνωρίζουμε (1.900 με 1.600 π.Χ.) είναι γραμμένο στη σφηνοειδή γραφή. Με τα δύο μόνο σύμβολα που προαναφέραμε οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει ένα αριθμητικό σύστημα πιο σύνθετο απ' αυτό των Αιγυπτίων: Από το 1 μέχρι το 59 είναι ένα δεκαδικό αθροιστικό, όπως αυτό των Αιγυπτίων, ενώ για μεγαλύτερους αριθμούς γίνεται εξηκονταδικό θεσιακό, δηλαδή η αξία κάθε συμβόλου εξαρτάται και από τη θέση του. Πρόκειται δηλαδή για μια μικτή γλώσσα: αδέσμευτη από τα συμφραζόμενα μέχρι το 59 και δεσμευμένη από τα συμφραζόμενα από το 59 και μετά.

Γύρω στο 1.800 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι κατέχουν εμπειρικές λύσεις του πυθαγόρειου θεωρήματος: Έχει βρεθεί μια πήλινη πινακίδα με 15 ορθογώνια τρίγωνα των οποίων οι πλευρές δίνονται σε ρητούς αριθμούς. Γνωρίζουν να υπολογίζουν εμβαδά απλών πολυγώνων όπως ορθογώνια, τρίγωνα και τραπέζια. Χωρίς καμιά αναλυτική γνώση της ομοιότητας, γνωρίζουν τον κανόνα ότι ο λόγος των εμβαδών δυο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των ομόλογων πλευρών. Έτσι, η εμπειρική επιπεδομετρία των Βαβυλωνίων εμφανίζεται αρκετά πιο προχωρημένη απ' αυτή των Αιγυπτίων, ενώ παράλληλα και στην πρακτική αριθμητική είχαν αναπτύξει ορισμένες πρακτικές μεθοδολογίες επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων που σήμερα αντιμετωπίζονται με συστήματα εξισώσεων. Η στερεομετρία τους περιέχει λιγότερο αξιόλογα αποτελέσματα απ' αυτή των Αιγυπτίων.

Βεβαίως αυτό που πρέπει να σημειώσουμε με βεβαιότητα είναι ότι όλα αυτά μένουν στο εμπειρικό επίπεδο, ενώ καμιά από τις έννοιες που χαρακτηρίζουν μια συγκροτημένη επιστήμη —όπως θεώρημα, απόδειξη, αξίωμα, ορισμός— δεν υπάρχει στις ιστορικές πηγές από τις οποίες αντλούμε τις γνώσεις μας για τα μαθηματικά των πολιτισμών αυτών [7, σ. 200]. Κανένα ίχνος μαθηματικού λόγου δεν ανιχνεύεται στις πηγές αυτές.

Το σύνολο των αρχαιολογικών ευρημάτων από τους δύο αυτούς πολιτισμούς πείθουν για μια μεγάλη συσσώρευση προεπιστημονικών εμπειρικών γνώσεων. Όμως, το κρίσιμο άλμα προς την επιστημονική συγκρότηση των γνώσεων αυτών δεν πραγματοποιήθηκε από τους πολιτισμούς αυτούς. Οι κοινωνικές συνθήκες στις δεσποτικές αυτές κοινωνίες ήταν μάλλον απαγορευτικές για ριζικές αλλαγές στον τρόπο οργάνωσης της γνώσης, δηλαδή στον τρόπο σκέψης, στον τρόπο παραγωγής νέας γνώσης, στη στάση απέναντι στο πρόβλημα της αλήθειας.

Εδώ η γνώση κρατιέται ερμητικά κλεισμένη μέσα στα πλαίσια του ιερατείου, του οποίου η εξουσία σχεδόν ταυτίζεται με την κληρονομούμενη κοσμική εξουσία, και ενός στρώματος γραφιάδων που το υπηρετεί.

Μια μόνο αλήθεια είναι αποδεκτή, η «εξ ἀποκαλύψεως» αλήθεια του ιερατείου, απόρροια του διαμεσολαβητικού, μεταξύ θεού και ανθρώπων, ρόλου του. Οι όποιες πρόοδοι σε τομείς που αργότερα ονομάστηκαν επιστημονικοί αφορούσαν χειρισμό, αξιολόγηση και αξιοποίηση μεγάλων συνόλων πληροφοριών που σε σύγκριση με τις κατακτήσεις των προηγούμενων πολιτισμών —της παλαιολιθικής και νεολιθικής εποχής— ήταν τεράστιες, περιορίστηκαν σε ό,τι συνάγεται από την επεξεργασία και λύση προβλημάτων διοίκησης σε μεγάλη —συγκριτικά τεράστια— κλίμακα [5, τόμ. Α]. Οι κατακτήσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν αποκλειστικά από το ιερατείο και το περιβάλλον του και παρέμειναν σ' αυτό αφού μόνο εκείνοι κατείχαν τα μέσα και τις τεχνικές καταγραφής και υπολογισμού. Μόνο εκείνοι είχαν εξασφαλισμένους τους όρους της υλικής τους διαβίωσης από την εργασία των άλλων και διέθεταν ελεύθερο χρόνο για πνευματικές ασχολίες: *«Διὸ περὶ Αἴγυπτον αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέστησαν, ἐκεῖ γὰρ ἀφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος. εἴρηται μὲν οὖν ἐν τοῖς ἠθικοῖς τίς διαφορά τέχνης καί ἐπιστήμης»* [Αριστοτέλης, *Μετά τα φυσικά*, 981b. 23 έως 981b. 27]. Δεν είναι τυχαίο λοιπόν ότι οι πρώτες γραφές ονομάζονταν ιερογλυφικά δηλαδή ιερατική γραφή.

Η γνώση όμως είναι παράγωγο της κοινωνίας και συγχρόνως λειτουργικό της στοιχείο, καθορίζεται απ' αυτή αλλά και την καθορίζει. Έτσι, η συνολική κοσμοεικόνα παραμένει μυθική. Τα προβλήματα που θέτει το περιβάλλον, φυσικό και κοινωνικό, δεν αντιμετωπίζονται κάτω από το κριτικό νυστέρι ενός ορθολογικού πνεύματος —μέσα στην ιστορικότητά του— αλλά διαλύονται με τα μαγικά και ανορθόλογα μέσα του μύθου. Ο απόλυτος φορέας κύρους, ο θεός ή ο βασιλιάς, εγγυάται με τη διαμεσολάβηση του ιερατείου την οριστική αντιμετώπιση των προβλημάτων. Όμως *«μέσα από τον μύθο δεν πετυχαίνει κανείς τη λύση παρά τη διάλυση των προβλημάτων»* [8].

Ριζικά διαφορετικές συνθήκες επικρατούν στις ακμάζουσες ελληνικές πόλεις-κράτη των παραλίων της Μικράς Ασίας κατά τον 6ο π.Χ. αιώνα. Στον ελλαδικό χώρο ήδη από τον 8ο και 7ο αιώνα έχει αρχίσει η διαδικασία περάσματος από τη φυλετική κοινωνική οργάνωση στην ανοιχτή πόλη. Έτσι, *«προνόμια που ανήκαν άλλοτε σε βασιλικά και αριστοκρατικά γένη, "ιερές αλήθειες" σχετικές με τη λατρεία και τη δικαστική εξουσία, άρχισαν να περιέρχονται αυτή την εποχή σε λαϊκή κατοχή»* [8]. Η οικονομική βάση και η κοινωνική διάρθρωση των κρατών αυτών είναι εντελώς διαφορετικές. Είναι η εποχή που η κυριαρχία της παλιάς αριστοκρατίας των γαιοκτημόνων ανατρεπόταν υπέρ της τάξης των εμπόρων και των τεχνιτών που είχαν μικρά εργαστήρια. Το ταυτισμένο με τη παλιά αριστοκρατία ιερατείο έχανε το κύρος του και η παράδοση βρισκόταν σε ανυποληψία. Η μοναδική «εξ αποκαλύψεως» αλήθεια γίνεται κι αυτή ανυπόληπτη, ενώ η «λογικά τεκμηριωμένη» αλήθεια γίνεται όλο και πιο ελκυστική: *«Στη θέση του μύθου»*, γράφει για την εποχή εκείνη ο Θ. Βέικος, *«που τον χαρακτηρίζουν αυταρχικές δομές σκέψης, η φιλοσοφία φέρνει έναν ανοιχτό λόγο, που θέτει και προσπαθεί να λύνει προβλήματα σαν "ζητήματα" που προβάλλονται και αντιμετωπίζονται συλλογικά, μέσα σε πλαίσια διαλόγου, με συζήτηση και λογική, με ανταλλαγή επιχειρημάτων»* [8]. Η συνέπεια του κλίματος αυτού είναι καταλυτική: *«Νέες απαντήσεις σε παλιά ερωτήματα είχαν την ευκαιρία ν' ακουστούν. Η μεγάλη αξία αυτής της αρχικής περιόδου της Ελληνικής σκέψης είναι ότι δοκίμασε ν' απαντήσει σε όλα τα ερωτήματα με απλό και συγκεκριμένο τρόπο»* [5, σ. 127].

Μέσα σ' αυτό το γόνιμο κλίμα γεννήθηκε ο «Ελληνικός Ορθολογισμός» και η επιστήμη ως συνέπεια του περάσματος από το μύθο στο λόγο, χωρίς αυτό να σημαίνει εξαφάνιση κάθε μυθολογικού καταλοίπου.

Στους τρεις αιώνες που μεσολάβησαν από τον Θαλή (624-548 π.Χ.), ο οποίος διατύπωσε τα πρώτα θεωρήματα, μέχρι τον Ευκλείδη (300 π.Χ.), ο οποίος κατέγραψε την πρώτη αξιωματικοποιημένη παραγωγική επιστήμη σε μια ολοκληρωμένη μορφή, εμφανίστηκαν στον ελλαδικό χώρο τρεις μέγιστες πολιτισμικές κατακτήσεις:

(α) Η μορφή δημοκρατικής οργάνωσης συνόλων πολιτών μέσα στα πλαίσια της πόληςκράτους, με τη σύγχρονη κατάργηση της κληρονομικότητας στις εξουσίες.

(β) Το θέατρο.

(γ) Η πρώτη επιστήμη καθώς και οι πρώτοι μεταθεωρητικοί προβληματισμοί για τη λογική δομή και την οργάνωση ενός συνόλου γνώσεων ώστε να αποτελούν επιστήμη (Αριστοτέλης—Μεγαρείς—Στωικοί).

Όπως μαθαίνουμε από τον Πρόκλο, ο οποίος αντλεί, όπως λέει, από τον Εύδημο (~330 π.Χ.), *«Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τό θεώρημα»*, ο Θαλής από τη Μίλητο είναι ο πρώτος που γενίκευσε σε «νόμο» πέντε [3, σσ. 157, 250, 299, 352] κανόνες που οι πρακτικοί κτίστες ή οι μηχανικοί ήξεραν εμπειρικά. Για παράδειγμα, αυτοί που σχεδίαζαν και έκτιζαν ένα ναό, όταν κατασκεύαζαν το αέτωμα ήξεραν ότι το συγκεκριμένο τρίγωνο που υλοποιούσαν αν είχε τις πλευρές (εκτός της βάσης) ίσες θα είχε και τις προσκείμενες στη βάση γωνίες ίσες. Και είναι βέβαιο ότι τον κανόνα αυτόν τον ήξεραν και οι μηχανικοί και κτίστες της Αιγύπτου και της Βαβυλωνίας. Ωστόσο, η πρώτη διατύπωση σε μορφή καθολικού νόμου, ότι δηλαδή *«τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρός τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν»* [Ευκλείδης Ι, 5] οφείλεται, σύμφωνα με τον Πρόκλο, στον Θαλή.

Ο νέος τρόπος σκέψης, με τη διατύπωση των πρώτων θεωρημάτων, σηματοδοτεί την απαρχή του περάσματος από το προεπιστημονικό εμπειρικό στάδιο στη συγκροτημένη επιστήμη. Θα δώσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα μέσα από τα οποία φαίνεται ο ραγδαίος ποιοτικός μετασχηματισμός που υφίσταται το σύνολο των προεπιστημονικών γνώσεων, μετασχηματισμός που υποδηλώνει την πραγματοποιούμενη επιστημική μεταλλαγή.

1. Η προϊστορία των πρώτων αριθμών

Είναι γνωστό ότι οι Πυθαγόρειοι συνήθιζαν να αναπαριστούν τους αριθμούς με ψηφίδες (παραστατικοί αριθμοί) πάνω σε μια οριζόντια σανίδα. Όλο αυτό το σύστημα ονομαζόταν *ψηφοφορία*. Είχαν δε διαπιστώσει ότι όλοι οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με ψηφίδες στη σειρά, κάθε δε επόμενος του δύο, όπως μας πληροφορεί ο νεοπυθαγόρειος Νικόμαχος, φτιαχνόταν με την προσθήκη μιας ψηφίδας επί ευθείας. Ωστόσο, οι ψηφίδες ενός αριθμού μπορούν να τοποθετηθούν κατά διάφορους τρόπους, εκτός της επί ευθείας τοποθέτησης, και δομούν έτσι διάφορα γεωμετρικά σχήματα: Οι ψηφίδες που αναπαριστούν το 6 δίνουν ένα ορθογώνιο δύο επί τρία, το 8 ένα δύο επί τέσσερα κ.τ.λ.. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *επίπεδοι*, ενώ αυτοί που μπορούσαν να αναπαρασταθούν στο χώρο όπως το 24 ως (2 επί 3 επί 4) ονομάζονται *στερεοί*. Είχαν εντοπιστεί όμως και οι αριθμοί που είχαν μια μόνο δυνατότητα αναπαράστασης, αυτή την επί ευθείας. Τους αριθμούς αυτούς τους μνημονεύει (ή ορίζει;) ο Θυμαρίδας ως *«ἀπλατείς γάρ ἐν τῇ ἐκθέσει, ἐφ' ἕν μόνον διιστάμενοι»* [4, σελ. 163].

Έκθεση ονόμαζαν ακριβώς τη διαδικασία αναπαράστασης με ψηφίδες (ἐκ+θέτω). Αυτός ήταν και ο πρώτος *ορισμός* για τους αριθμούς αυτούς όπως το 3, 5, 7, 11 κ.τ.λ. Δεν έχει χρησιμοποιηθεί καμιά άλλη έννοια παρά μόνο αυτή η ορατή με το μάτι ιδιότητά τους, θεωρούμενη μάλιστα από τον Αριστοτέλη ως ποιοτικό χαρακτηριστικό, δηλαδή ως διαφορά ουσίας: *«Ἕνα μέν δὴ τρόπον τοῦτον λέγεται ἡ ποιότης διαφορὰ οὐσίας, ...ὥσπερ οἱ ἀριθμοὶ ποιοὶ τινες, οἷον οἱ σύνθετοι καὶ μὴ μόνον ἐφ' ἕν ὄντες ἀλλ' ὧν μίμημα τὸ ἐπίπεδον καὶ το στερεόν, οὗτοι δ' εἰσὶν ποσάκις ποσοὶ ἢ ποσάκις ποσάκις ποσοι»* [Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 1020b].

Στον Ευκλείδη όμως οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται *πρώτοι* και ορίζονται με βάση την έννοια της διαιρετότητας: *«Πρῶτος ἀριθμός ἐστί ὁ μονάδι μόνη μετρούμενος»* [Ευκλείδης VII, Ορ. 12]. Αυτό που περιγραφόταν εμπειρικά τώρα ορίζεται από έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό.

2. Η ἔκθεσις

Είδαμε ήδη τι σήμαινε ο όρος *ἔκθεσις* στις εμπειρικές διαδικασίες των Πυθαγόρειων. Στα συγκροτημένα σε παραγωγική επιστήμη μαθηματικά ο όρος έχει άλλο περιεχόμενο: Από το εκτεταμένο απόσπασμα του Ήρωνα που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, το οποίο περιγράφει αναλυτικά τα μέρη του μαθηματικού λόγου, *ἔκθεσις* ήταν το μέρος εκείνο του μαθηματικού λόγου το οποίο έπεται της εκφώνησης και προηγείται της απόδειξης. Πρόκειται για φράσεις επιμαθηματικού χαρακτήρα, οι οποίες από καθαρά λογικογλωσσική σκοπιά παίζουν τον εξής ρόλο: Παρουσιάζουν τα σύμβολα μεταβλητών με τα οποία σημαίνονται τα μαθηματικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην εκφώνηση και ενδεχόμενα κάποια άλλα βοηθητικά, και κλείνεται η συμφωνία με τον αναγνώστη, κατά κανόνα μέσω της προστακτικής του *εἰμί, ἔστω ή ἔστωσαν,* ότι τα σύμβολα αυτά των μεταβλητών θα θεωρούνται καθολικά ποσοδειγμένα [4, 153]. Δηλαδή και εδώ δηλώνεται από την έκθεση μια πράξη με την οποία έρχονται στο προσκήνιο τα μαθηματικά αντικείμενα πάνω στα οποία θα αναπτυχθεί ο συλλογισμός της απόδειξης. Και εδώ τα μαθηματικά αντικείμενα *ἐκ-τίθενται,* ωστόσο ενώ η πράξη αυτή στο προεπιστημονικό στάδιο ήταν *υλική* τώρα είναι *λογικογλωσσική!!!*

3. Η απόδειξη

Ανάλογη είναι η εξέλιξη του περιεχομένου του όρου *«ἀπόδειξη». «Δείκνυμι»* σήμαινε δείχνω συγκεκριμένα [7, σελ. 200]. Δείχνω δηλαδή με το δάκτυλο το αποτέλεσμα μιας υλικής διαδικασίας (π.χ. πάνω στη ψηφοφορία), πώς επαληθεύεται κάποια θέση (πρόταση)· πώς, για παράδειγμα, με την αναδιάταξη των ψηφίδων φαίνεται ότι το άθροισμα άρτιων είναι άρτιος. Αργότερα σήμαινε ανάπτυξη ενός συλλογισμού που άρχιζε από αληθείς προκείμενες, δηλαδή ενός *«επιστημονικού»,* όπως τους ονόμαζε ο Αριστοτέλης, συλλογισμού, ορολογία που χρησιμοποιεί και ο Ήρωνας αλλά και ο Πρόκλος [3, σελ. 203] για να ορίσει κατά κάποιον τρόπο την απόδειξη: *«Ἡ δὲ ἀπόδειξις ἐπιστημονικῶς ἐκ τῶν ὁμολογηθέντων συνάγει τὸ προκείμενον»* [Ήρων ο Αλεξανδρεύς, *Γεωμετρικά,* 136.13.10].

Η *απόδειξη* λοιπόν από πράξη υλική (επαλήθευση) κατά την προεπιστημονική εμπειρική περίοδο, έγινε πράξη λογική. Ο A. Szabö μάλιστα θεωρεί την εμφάνιση της έμμεσης απόδειξης (αναγωγή σε άτοπο) ως την τελική ρήξη με τον εμπειρισμό [7, σελ. 214].

4. Η θεμελίωση

Η επιλογή των αρχών, δηλαδή των αξιωμάτων και των ορισμών, ώστε και εσωτερικές αντιφάσεις να μην εμφανίζονται αλλά και οι παράγωγες αποφάνσεις να εναρμονίζονται με τα κοινά αποδεκτά για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων, ήταν αποτέλεσμα μακρόχρονου προβληματισμού και διαμάχης, πολλές φορές οξύτατης [9].

Μέχρι τα μισά περίπου του 3ου π.Χ. αιώνα, οπότε ο Αρχιμήδης με το έργο του *Περί σφαῖρας και κυλίνδρου* [19, τόμ. Α, Μέρ. Β, σελ. 8] εισήγαγε πέντε ακόμα αξιώματα, στη Γεωμετρία υπήρχε διάχυτη μια *ατομική* αντίληψη· είτε με τη μορφή της αριθμοθεωρητικής ατομικής αντίληψης των Πυθαγορείων είτε με την καθαρά υλιστική του Δημόκριτου είτε με την ιδεαλιστική γεωμετρική (κανονικά στερεά) του Πλάτωνα. Έτσι ο μαθητής του Δημόκριτου Αντιφών, περισσότερο από έναν αιώνα πριν τη συγγραφή των *Στοιχείων* από τον Ευκλείδη, τετραγώνισε τον κύκλο δεχόμενος την υλιστική ατομική αντίληψη. Σύμφωνα με την περιγραφή του Συμπλίκιου [10, στ. 9.45.12], ο Αντιφών, αφού εγγράψει στον κύκλο ένα τετράγωνο, διπλασιάζει τον αριθμό των πλευρών του, διχοτομώντας τα αντίστοιχα τόξα με μεσοκάθετες στις πλευρές. Η διαδικασία αυτή σταματά όταν η πλευρά του κανονικού πολυγώνου έχει μικράνει τόσο ώστε να αποτελείται από δύο διαδοχικά άτομα, οπότε δεν υπάρχει πλέον άλλη δυνατότητα διχοτόμησης, αφού μεταξύ δύο διαδοχικών ατόμων υπάρχει το κενό. Τότε ο Αντιφών θεωρεί ότι το πολύγωνο έχει ταυτιστεί με τον κύκλο. Το πολύγωνο όμως τετραγωνίζεται άρα και ο κύκλος! Η λύση αυτή του Αντιφώνα ονομάστηκε κατά τον Σιμπλίκιο *«ψευδάριο»*, διότι ως συλλογισμός μεν ήταν σωστός, δε στηριζόταν όμως σε αληθείς προκείμενες (ή αρχές [3, σ. 59]). Έτσι, δεν ήταν, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, επιστημονικός συλλογισμός. Οι προκείμενες του Αντιφώνα [11] δεν απέκλειαν μια ευθεία και ο κύκλος να έχουν δύο κοινά σημεία χωρίς μέρος της να βρίσκεται μέσα στον κύκλο, αφού μεταξύ των δυο αυτών σημείων (ατόμων) υπήρχε το κενό. Μια τέτοια ευθεία, στο πλαίσιο του Αντιφώνα, μπορούσε να ήταν και εφαπτομένη. Σύμφωνα με τις «αρχές» όμως των *Στοιχείων* του Ευκλείδη κάτι τέτοιο δεν είναι επιτρεπτό. Στο τρίτο βιβλίο, ο δεύτερος ορισμός ορίζει ότι *«εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἅπτομένη τοῦ κύκλου καί ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τόν κύκλον»* [Ευκλείδης, ΙΙΙ, Ορ. 2]. Ενώ η δεύτερη πρόταση του ίδιου βιβλίου είναι έτσι διατυπωμένη ώστε να απαντά ευθέως στον Αντιφώνα: *«Ἐάν κύκλου ἐπί τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπί τά σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντός πεσεῖται τοῦ κύκλου»* [Ευκλείδης, ΙΙΙ.2]. Δηλαδή εάν μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία, τότε η ευθεία θα πέσει μέσα στον κύκλο, δηλαδή θα τον τμήσει. Ο τετραγωνισμός λοιπόν του Αντιφώνα ήταν λάθος σύμφωνα με τη θεμελιώσει αυτή, διότι δύο σημεία (τα διαδοχικά του Αντιφώνα) ορίζουν μια ευθεία, όπως απαιτεί το δεύτερο αίτημα του Ευκλείδη. Η ευθεία δε αυτή «ἐντός πεσεῖται τοῦ κύκλου». Στην κατασκευή λοιπόν του Αντιφώνα ένα μέρος του κύκλου που βρίσκεται μεταξύ πλευράς του πολυγώνου και περιφέρειας μένει εκτός τετραγωνισμού! Έτσι ο Ευκλείδης σώζει τη δυνατότητα για επ' άπειρο διχοτόμηση μιας γραμμής.

Η δυνατότητα ωστόσο αυτή ανοίγει το δρόμο για τον Ζήνωνα και τα παράδοξά του. Θα πρέπει λοιπόν να δεχτούμε ότι μάλλον έχει δίκιο ο A. Szabö [7, σελ. 320], ο οποίος υποστηρίζει ότι η όγδοη από τις κοινές έννοιες (αξιώματα) του Ευκλείδη *«καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν»* απαντά ευθέως στο παράδοξο της αρένας του Ζήνωνα, σύμφωνα με το οποίο το μισό και το όλο είναι ίσα, και το εξοβελίζει από το σώμα των μαθηματικών.

5. Ο λόγος π της περιμέτρου προς τη διάμετρο ενός κύκλου

Στα εμπειρικά μαθηματικά των Αιγυπτίων εμφανίζεται στο πρόβλημα 50 του παπύρου του Ριντ, το οποίο είναι διατυπωμένο ως εξής:

«Ένας στρογγυλός αγρός έχει διάμετρο 9 χετ. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πάρε το 1/9 της διαμέτρου. Έχεις 1 και υπόλοιπο 8. Πολλαπλασίασε το 8 με το 8. Αυτό κάνει 64 σέτατ».

Σε σύγχρονη γλώσσα ο γενικός τύπος που ακολουθείται είναι:

$$E=(\delta-1/9\delta)^2$$

Αυτό, αντιστοιχεί στην τιμή π=3,1605, χωρίς ωστόσο να φαίνεται ότι υπάρχει καν η έννοια του λόγου. Αυτός είναι και ο χαρακτήρας τούτων των εμπειρικών μαθηματικών.

Αντίθετα, στα συγκροτημένα σε επιστήμη μαθηματικά το πρόβλημα του π αντιμετωπίζεται από τον Αρχιμήδη στο *Κύκλου μέτρησις* ως εξής:

«Παντός κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί και ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μέν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δέ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις».

Που σημαίνει:

$$3\ 10/71<\pi<3\ 1/7$$

Υπάρχουν ακόμα αρκετά εύγλωττα παραδείγματα, ωστόσο αυτά αρκούν για να φανεί ότι το νέο πλαίσιο, το επιστημονικό, είναι εντελώς διαφορετικό από το σύνολο των προεπιστημονικών εμπειρικών γνώσεων, αν και συνολικά τις εμπεριέχει. «*Η επιστήμη*», γράφει ο Ε. Μπιτσάκης, «*αναδύεται μέσα από το προϋπάρχον υλικό, ως η θεωρητική του έκφραση, και ταυτόχρονα ως άρνηση των προηγουμένων προεπιστημονικών ή και ιδεολογικών ερμηνειών. Για πολλούς, η γένεση μιας επιστήμης ή μια επιστημονική επανάσταση δεν είναι παρά μια αναδιάρθρωση (restructuration) της γνώσης. Ωστόσο μια τέτοια αντίληψη της επιστήμης είναι ποσοτική και μηχανική. Γιατί η επιστήμη που γεννιέται δεν είναι η επαγωγική γενίκευση που ενσωματώνει και αναδιαρθρώνει το προηγούμενο υλικό. Η επιστήμη είναι ένα νέο εννοιολογικό σύστημα που δεν προκύπτει άμεσα από το παρατηρισιακό ή το πειραματικό υλικό που πρέπει να ερμηνεύσει*» [12, σ. 126].

Ο μαθηματικός λόγος αποτέλεσε είτε το πλαίσιο είτε το πρότυπο για την ανάπτυξη άλλων επιστημονικών γνώσεων

Το γόνιμο κλίμα του ελληνικού ορθολογισμού δεν άγγιξε μόνο τα μαθηματικά. Ο νέος τρόπος σκέψης είχε ως αποτέλεσμα να έλθουν στο προσκήνιο της ιστορίας, να *περάσουν από το μύθο στο λόγο* κι άλλες επιστήμες, με πρώτη την *Αστρονομία*. Το κρίσιμο σημείο θα πρέπει να θεωρηθεί η διδασκαλία στην Ακαδημία του Πλάτωνα του Εύδοξου του Κνίδιου (408-355 π.Χ.), μαθητή στα μαθηματικά του Πυθαγόρειου Αρχύτα του Ταραντίνου (~400 π.Χ.). Δυστυχώς έργα του Εύδοξου στην περιοχή αυτή δεν έχουν διασωθεί. Έχει όμως διασωθεί το έργο του Αυτόλυκου [13], γραμμένο (~330 π.Χ.) λίγα χρόνια μετά το θάνατο του Εύδοξου και πριν τη συγγραφή των *Στοιχείων* από τον Ευκλείδη.

Πρόκειται για το μοναδικό ολοκληρωμένο επιστημονικό έργο το οποίο είναι αρχαιότερο από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και έχει διασωθεί. Είναι τα τρία βιβλία του *Περί κινουμένης σφαίρας*, με δώδεκα αποδεδειγμένες προτάσεις, και τα δύο βιβλία *Περί ἐπιτολῶν καί δύσεων α′ καί β′*, με δεκατρείς και δεκαοκτώ προτάσεις αντίστοιχα. Η δομή των έργων αυτών είναι ίδια με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη: Προτάσσονται οι ορισμοί και ακολουθούν οι προτάσεις με τις αποδείξεις τους. Η ενότητα δε εκφώνηση-απόδειξη έχει την ίδια λογική δομή με αυτή των μαθηματικών έργων. Μπορεί κανείς να διακρίνει τα ίδια μέρη: Πρόταση-Έκθεση-Διορισμό-Κατασκευή-Απόδειξη-Συμπέρασμα. Η μόνη διαφορά είναι ότι μετά τη διατύπωση του συμπεράσματος δεν κλείνει με την κλασική φράση του Ευκλείδη ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Πρόκειται για την καλύτερη απόδειξη ότι η δομή του μαθηματικού λόγου ήταν κατακτημένη την εποχή του Ευκλείδη.

Στο *Περί κινουμένης σφαίρας* προτάσσονται ως αρχές ένας ορισμός για την ομαλή κίνηση (ευθύγραμμη ή κυκλική), μια απόφανση που δηλώνει ότι στην ομαλή κίνηση ο λόγος των χρόνων είναι ίσος με το λόγο των διανυθέντων μεγεθών. Το έργο αυτό, ιδωμένο με σημερινό μάτι, αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο γραμμένο στο μαθηματικό λόγο της εποχής, χρήσιμο για τα δύο καθαρά αστρονομικά έργα που προαναφέραμε, τα οποία είναι γραμμένα με την ίδια δομή.

Γνώσεις γύρω από τη *Φυσική* εμφανίζονται στους κλάδους της Κινηματικής, της Μηχανικής (Στατική), της Υδροστατικής και της Οπτικής.

Η *Κινηματική* δεν εμφανίζεται συγκροτημένη, ωστόσο ορισμένες έννοιες διαχέονται μέσα σε έργα μαθηματικά ή φιλοσοφικά. Είδαμε ήδη την ομαλή κίνηση στο έργο του Αυτόλυκου. Ο Αρχιμήδης ονομάζει την κίνηση αυτή *ισοταχή,* χωρίς να την ορίζει, ενώ το αναπόδεικτο της αναλογίας διαστημάτων-χρόνων του Αυτόλυκου, στο έργο *Περί Ἑλίκων* του Αρχιμήδη είναι θεώρημα το οποίο γενικεύεται από ένα ακόμα θεώρημα στο ίδιο έργο. Ο Αρχιμήδης σε τούτο το καθαρά μαθηματικό έργο του διαπραγματεύεται αυτές τις έννοιες για να ορίσει την περίφημη *ἕλικά* του ως συνδυασμό δύο ομαλών κινήσεων, μιας ευθύγραμμης και μιας κυκλικής.

Ο Αριστοτέλης έχει διαπραγματευτεί διεξοδικά τις έννοιες αυτές, τις έχει συσχετίσει με τη δύναμη που τη θεωρεί ως το αίτιο της κίνησης: «Εάν το Β κινείται από τη δύναμη Α στην απόσταση Γ στο χρόνο Δ, στον ίδιο χρόνο η δύναμη Α θα κινήσει το μισό του Β δύο φορές μακρύτερα από το Γ....» [*Φυσικά,* 250α, 1]. Η ταχύτητα λοιπόν για τον Αριστοτέλη (ή πιο σωστά ο λόγος Γ/Δ) βρίσκεται σε γραμμική σχέση με το λόγο της δύναμης προς την αντίσταση [15, τόμ. Ι, εισ.], είναι:

$$Γ/Δ=λΑ/Β \text{ (ή } υ=λΑ/Β)$$

Όμως, πάντα κατά τον Αριστοτέλη, μια δύναμη για να κινήσει ένα σώμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από κάποια οριακή, την κινούσα δύναμη. Δηλαδή ο λόγος Α/Β (δύναμη προς αντίσταση) πρέπει να είναι μεγαλύτερος από κάποιο όριο για να έχουμε κίνηση και να ισχύει ο προηγούμενος νόμος. Προφανώς η θεώρηση αυτή δεν είναι ορθή. Ωστόσο, ο σκοπός της διαπραγμάτευσης αυτής, όπως υποστηρίζει ο During [14, σ. 33] είναι να αντικρούσει τον Ζήνωνα και όχι να ερμηνεύσει το φυσικό φαινόμενο της κίνησης.

Η *Μηχανική* (Στατική και Υδροστατική) βρίσκουν στο έργο του Αρχιμήδη τη συγκρότησή τους κατά τα πρότυπα των μαθηματικών. Τα δύο έργα του που έχουν διασωθεί *Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν Α΄ και Β΄* αποτελούν έργα αξιωματικοποιημένης Φυσικής (Στατική του Ζυγού) γραμμένα με τα μαθηματικά της εποχής ή, όπως γράφει ο Ch. Mulger, είναι έργα *«όπου η μαθηματική ανάλυση είναι εφαρμοσμένη στη Στατική του Ζυγού, όπου ο Αρχιμήδης θέτει τα θεμέλια μιας καινούργιας επιστήμης».*

Ο Αρχιμήδης, στα πλαίσια αυτού του έργου, διαπιστώνει, σε αντίθεση με τον Αριστοτέλη, ότι οσοδήποτε μεγάλο βάρος μπορεί να κινηθεί από οσοδήποτε μικρή δύναμη και ο Πάππος αποδίδει σ' αυτόν τούτη την ανακάλυψη. Είναι δε πολύ πιθανόν ότι, κατανοώντας τη μεγάλη σημασία της, σε συνδυασμό με τη μέχρι τότε λαθεμένη επικρατούσα αντίληψη του Αριστοτέλη, να αναφώνησε την περίφημη φράση *«δώσε μου μέρος να ακουμπήσω και θα κινήσω τη γη»!* Εξάλλου, ο μεγάλος διανοητής και επιστήμονας απέδειξε πειραματικά τον ισχυρισμό του καθελκύοντας μόνος του το πλοίο Συρακωσία στο λιμάνι των Συρακουσών. Όπως δε υποστηρίζει ο Ch. Mulger [15, τόμ. Ι, εισ.], το εγχείρημα αυτό απαντά ευθέως στον Αριστοτέλη, ο οποίος χρησιμοποιεί το παράδειγμα της καθέλκυσης ενός πλοίου για να στηρίξει τη θέση του για την ύπαρξη του ορίου της κινούσας δύναμης: Πολλοί εργάτες, κατά τον Αριστοτέλη, μπορούν να τραβήξουν το πλοίο προς τη θάλασσα αλλά εάν ελαττώνεται ο αριθμός των εργατών θα φτάσουμε σε κάποιον αριθμό όπου πλέον θα είναι αδύνατη η κίνηση. Ο Αριστοτέλης είναι δέσμιος της εμπειρικής παρατήρησης, ενώ στο καθαρά επιστημονικό έργο του Αρχιμήδη ανατρέπεται αυτή η πλάνη.

Και η *Υδροστατική* βρήκε τη θεμελίωσή της από τον Αρχιμήδη στα έργα *Ὀχουμένων Α΄ καί Β΄*. Ως αρχές προτάσσονται τα εξής: *«Ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον τοιαύταν, ὥστε τῶν μερέων αὐτοῦ τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ συνεχέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ ἧσσον θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον θλιβομένου, καὶ ἕκαστον δέ τῶν μερέων αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ ὑπεράνω αὐτοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον ἐόντι...».*

Ο Αρχιμήδης βλέπει εδώ την πίεση που ασκείται από τα υπερκείμενα στοιχειώδη τμήματα του υγρού. Δυο χιλιάδες χρόνια μετά ο Πασκάλ, σε μια ανακοίνωση του 1663, θα ολοκληρώσει τη σκέψη του Αρχιμήδη αποδεικνύοντας ότι η πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού κατανέμεται σε κάθε σημείο του υγρού, προς όλες τις κατευθύνσεις και όχι μόνο κατακόρυφα.

Οι αρχές όμως που είχε θέσει ο Αρχιμήδης του επιτρέπουν να αποδείξει όχι μόνο τη γνωστή αρχή της άνωσης αλλά, μεταξύ των άλλων, ότι η επιφάνεια οποιουδήποτε υγρού που ηρεμεί δεν είναι επίπεδη αλλά έχει τη μορφή μιας σφαίρας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με το κέντρο της γης (πρόταση 2)!

Σε ό,τι αφορά την *Οπτική*, το αρχαιότερο έργο που διαθέτουμε είναι τα *Ὀπτικά* του Ευκλείδη. Το έργο αναφέρεται από τον Πρόκλο [3, σ. 69] αλλά και από τον Πάππο [19, σ. 568, 594]. Πρόκειται για ένα έργο γεωμετρικής οπτικής γραμμένο κατά τα πρότυπα των *Στοιχείων*. Προηγούνται έξη αιτήματα ως αρχές:

«Ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὄματος ἐξαγομένας αὐθείας γραμμάς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων. καὶ τὸ [μὲν] ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα ἐν τῷ ὄμματι τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων κ.λ.π.».

Ακολουθούν δε 58 προτάσεις με τις αποδείξεις τους. Το έργο του Αρχιμήδη *Κατοπτρικά* δεν έχει βρεθεί, αναφέρεται όμως από τον Θέωνα τον Αλεξανδρινό και άλλους συγγραφείς. Τελευταία βρέθηκε σε βιβλιοθήκη της Τεχεράνης μια αραβική μετάφραση του έργου *Περί πυρείων κατόπτρων* του Διοκλή. Είναι ένα έργο οπτικής των κοίλων κατόπτρων, γραμμένο με τρόπο μαθηματικό, στο οποίο ο Διοκλής αναφέρει ρητά τον Αρχιμήδη ως τον πρώτο θεωρητικό και κατασκευαστή τέτοιων κατόπτρων.

Συμπερασματικά

Η αρχαία ελληνική σκέψη έβλεπε τον κόσμο στην ενότητά του. Η ενότητα αυτή αποτελεί την αντικειμενική βάση της ενότητας των επιστημών. Οι επιστήμες αναδύθηκαν ως ενότητα μέσα από το φιλοσοφικό στοχασμό. Ο πρώτος διαχωρισμός τους είναι τυπικός, δηλαδή είναι συνέπεια της αξιωματικοποίησης. Διαφέρουν ως προς τα *αιτήματα,* με το ευκλείδειο περιεχόμενο του όρου.

Η συσσώρευση γνώσεων, τεχνικών και εμπειρίας της προεπιστημονικής εμπειρικής περιόδου αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για την έναρξη της διαδικασίας γένεσης της επιστήμης, όχι όμως και ικανή. Οι επιστήμες δε γεννήθηκαν στις δεσποτικές κοινωνίες της Ανατολής, όπου η συσσώρευση εμπειρικών γνώσεων είχε ίσως εξαντλήσει τα ανώτερα όριά της, αλλά μέσα στις κοινωνικές συνθήκες της πόλης-κράτους. Η αναμφισβήτη διάχυση προς τον ελλαδικό χώρο μάλλον επιβεβαιώνει παρά αναιρεί τη θέση αυτή.

Η διαδικασία γένεσης της πρώτης επιστήμης εμφανίζεται ως διαδικασία συνέχειας και ρήξης. Συνέχειας, αφού οι βασικοί εννοιολογικοί πυρήνες ενσωματώνονται στο νέο πλαίσιο, και ρήξης, αφού η φύση των αντικειμένων, η γλώσσα και η μέθοδος είναι εντελώς νέες.

Σχόλια - Παραπομπές

1. Για μια πιο ολοκληρωμένη θεώρηση του ελληνικού μαθηματικού λόγου: Ε. Παπαδοπετράκη, «Μια Μεταθεωρία για τον Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο», *Πρακτικά 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε.,* Πάτρα 1993.

2. (α) Robert Blanchè, *La logique et son histoire* (D' Aristote a Russell), *Collection U,* Armand Colin, Paris 1970
(β) M.I. Bochenski, *Ancient Formal Logic,* North - Holland Publishing Company, Amsterdam 1963.

3. Procli Diadochi, *Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii,* Friedlein G., Lipsiae M.DCCC.LXXIII.

4. Ε. Παπαδοπετράκη, «Η σχέση σημαίνοντος σημαινόμενου στον Αρχαίο Ελληνικό Μαθηματικό λόγο», στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας,* Επιμέλεια Δ. Αναπολιτάνος-Β. Καρασμάνης. Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1993

5. J. Bernal, *Η Επιστήμη στην Ιστορία,* Τόμος Α΄, Εκδ. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα 1983.

6. (α) Bunt. L. - Jones P. - Pedient J., *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών,* Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, Αθήνα 1981.
(β) B.L. Van Der Waerden, *Science Awakening,* Kluwer Academic Publishers, 1961.
(γ) C. Boyer, *A History of mathematics,* John Wieley & Sons Inc., New York 1968
(δ) Ε. Παπαδοπετράκη, «Οι Απαρχές του Μαθηματικού Λόγου», *Διεπιστημονικό Συμπόσιο για τη Γλώσσα-Πρακτικά,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

7. A. Szabö, *Le debuts des Mathématiques Grecques,* ed. VRIN, Paris 1977

8. Θ. Βέικος, «Από το μύθο στο λόγο», περιοδικό *Ουτοπία,* τεύχος 15/1995 ή Περιοδικό *Νέα Δομή,* τεύχος 2/1976

9. «Ἀριστόξενος δ' ἐν τοῖς ἱστορικοῖς ὑπομνήμασι φησι Πλάτωνα θελῆσαι συμφλέξαι τά Δημοκρίτου συγγράμματα ὁπόσα ἐδυνήθη συναγαγεῖν. Ἀμύκλαν δὲ καί Κλεινίαν τούς Πυθαγορικούς κωλύσαι αὐτόν, ὡς οὐδέν ὄφελος, παρά πολλοῖς γάρ εἶναι ἤδη τά βιβλία» [Diogenis IX, 40] (Diogenes Laertius, *De vitis et placitis philosophorum,* IX, 40)

10. Σιμπλίκιος, *Siplich in Physikorum,* Ed Diels Lipsiae.

11. Είναι πολύ πιθανόν οι αρχές στις οποίες στηρίχτηκε ο Αντιφών να περιέχονταν, ρητά ή έμμεσα, σε κάποιο από τα μαθηματικά έργα του Δημόκριτου τα οποία δυστυχώς δεν έχουν διασωθεί. Κατά τον Διογένη το Λαέρτιο (IX, 45-49), ο Θρασύλος είχε ταξινομήσει σε τετραλογία τα έργα του Δημόκριτου, ως μαθηματικά δε έργα αναφέρει τα *Περί διαφορῆς γνώμης ἤ Περί ψαύσιος κύκλου καί σφαίρης, Περί γεωμετρίης, Γεωμετρικῶν, Ἀριθμοί, Περί ἀλόγων γραμμῶν καί ναστῶν α' και β', Ἐκπετάσματα.*

12. Ε. Μπιτσάκη, *Θεωρία και Πράξη,* Εκδ. Gutenberg, Αθήνα 1983.

13. Αυτόλυκος, *Περί κινουμένης σφαίρας, Περί Επιτολών και Δύσεων Α΄, Β΄* Par G. Aujac, Ed Les belles Lettres, Paris 1979.

14. I. During, *Ο Αριστοτέλης,* τόμος Β΄, Εκδ. Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα 1994.

15. Ch. Mugler, *Archimede,* Text et traduction, Tome I, II, III, IV, Ed Les belles Lettres, Paris 1979

16. Αρχιμήδους, *Άπαντα.*

17. Αριστοτέλους, *Φυσικά, Όργανον.*

18. Ευκλείδου, *Στοιχεία.*

19. Ε. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα,* Τόμος Α΄, σελ. 31.