ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ - 9 - ΦΘΙΝΟΠΩΡΟ 2001 - σσ. 105 - 116

Σχετικά με την Εξίσωση Τυποποίησης

του

*Κώστα Γόγολου**

Ως γνωστόν στα νεορικαρδιανά μοντέλα για να προσδιοριστούν απόλυτες τιμές πρέπει πρώτα να προσδιοριστεί αυθαίρετα η τιμή ενός εμπορεύματος (ή ενός καλαθιού εμπορευμάτων). Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται με την εισαγωγή μιας εξίσωσης την οποία την ονομάζουμε *εξίσωση τυποποίησης*.

Στα πλαίσια μιας δεδομένης τεχνικής απλής παραγωγής [A, L], η συνήθης εξίσωση τυποποίησης των τιμών είναι μια εξίσωση της μορφής $pd = \alpha$, όπου p το διάνυσμα των τιμών των εμπορευμάτων, d ένα συγκεκριμένο καλάθι εμπορευμάτων, το οποίο το ονομάζουμε *τυπικό εμπόρευμα*, και α μια θετική σταθερά με ή χωρίς διάσταση. Προφανώς, δια της εξίσωσης αυτής καθορίζουμε αυθαίρετα την τιμή του καλαθιού εμπορευμάτων d, αφού την θέτουμε ίση με την σταθερά α[1].

Έχει αποδειχτεί ότι οι τιμές που προσδιορίζονται όταν στα πλαίσια μιας δεδομένης τεχνικής, όπως λ.χ. η τεχνική απλής παραγωγής [A, L], εισαχθεί μια εξίσωση τυποποίησης των τιμών $pd = \alpha$, δεν αποτελούν χαρακτηριστικά μεγέθη αυτής της ίδιας της τεχνικής, αλλά χαρακτηριστικά μεγέθη εκείνου του συστήματος, το οποίο χρησιμοποιεί την εν λόγω τεχνική και ως καθαρό προϊόν του παράγει το τυπικό εμπόρευμα d. Το τελευταίο σύστημα το ονομάζουμε *τυπικό υποσύστημα*[2].

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές στα πλαίσια της τεχνικής [A, L] είναι να εξισώσουμε την τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου με την μονάδα, ήτοι να εισάγουμε την εξίσωση $w = 1$[3]. Οι απόλυτες τιμές που προκύπτουν για δεδομένο ποσοστό κέρδους δια της εξίσωσης $w = 1$ είναι εκφρασμένες σε «αγοραζόμενη εργασία». Οι ίδιες αυτές απόλυτες τιμές είναι ίσες με τις απόλυτες τιμές που προκύπτουν για το ίδιο ποσοστό

---

* Διδάκτορας του Τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου Πανεπιστημίου.

1. Για μια τέτοιας μορφής εξίσωση τυποποίησης βλέπε π.χ. Salvadori/Steedman (1988).
2. Οι έννοιες *τυπικό υποσύστημα* και *τυπικό εμπόρευμα* έχουν εισαχθεί και αναλυθεί από τον Σταμάτη με μια σειρά δημοσιεύσεων που ξεκινά από το 1983, π.χ. βλέπε Stamatis (1983), Stamatis (1988) και Stamatis (1998).
3. Βλέπε π.χ. Levhari (1965).

κέρδους και για οποιαδήποτε εξίσωση τυποποίησης της μορφής pd = α, όταν αυτές οι τελευταίες διαιρεθούν δια του ονομαστικού ωρομισθίου w.

Ας σημειωθεί ότι η εργασία, όταν το πραγματικό ωρομίσθιο είναι άγνωστο, είναι ένα μη παραγόμενο από την εν λόγω τεχνική εμπόρευμα. Ως εκ τούτου για w = 1 οι τιμές, σε αντίθεση με την εξίσωση τυποποίησης pd = α, ορίζονται σε όρους ενός μη παραγόμενου από την εν λόγω τεχνική εμπόρευμα. Αν και στην περίπτωση αυτή από την εξίσωση w = 1 προκύπτουν –για δεδομένο ποσοστό κέρδους– απόλυτες τιμές και ως εκ τούτου η εν λόγω εξίσωση φαίνεται να αποτελεί εξίσωση τυποποίησης, ωστόσο, όμως, υπάρχουν άπειρες εξισώσεις τυποποίησης της μορφής pd = α, οι οποίες για δεδομένο ποσοστό κέρδους οδηγούν στις ίδιες απόλυτες τιμές που οδηγεί για το εν λόγω ποσοστό κέρδους η εξίσωση w = 1[4]. Επίσης κατά την τυποποίηση δια της w = 1, πρώτον, δεν προκύπτει w-r-σχέση και, δεύτερον, δεν δύναται να ορισθεί η έννοια του μέγιστου οικονομικά σημαντικού ποσοστού κέρδους (επειδή ως γνωστό το τελευταίο ορίζεται για w = 0). Το ότι για w = 1 δεν είναι δυνατό να ορισθεί η έννοια του μέγιστου οικονομικά σημαντικού ποσοστού κέρδους και το ότι για άγνωστο πραγματικό ωρομίσθιο και δεδομένο ποσοστό κέρδους υπάρχουν άπειρες εξισώσεις τυποποίησης της μορφής pd = α, οι οποίες οδηγούν σε ονομαστικό ωρομίσθιο w = 1, σημαίνει ότι η εν λόγω εξίσωση δεν είναι εξίσωση τυποποίησης αλλά ένας εξωγενής προσδιορισμός του ύψους του ονομαστικού ωρομισθίου. Ωστόσο όμως από την άποψη ότι αποτελεί μια εξίσωση, δια της οποίας –για δεδομένο ποσοστό κέρδους– προκύπτουν απόλυτες τιμές, θα θεωρήσουμε ότι αποτελεί και αυτή, υπό ευρεία έννοια, μια εξίσωση τυποποίησης.

***

---

4. Αυτό ισχύει επειδή το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με την τιμή του πραγματικού ωρομισθίου, ισχύει δηλαδή pφ = w, όπου φ το πραγματικό ωρομίσθιο. Ως εκ τούτου, αν το ονομαστικό ωρομίσθιο καθοριστεί εξωγενώς ίσο με την μονάδα, ήτοι w = 1, έπεται pφ = 1. Επειδή όμως, α) για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο και για δεδομένο ποσοστό κέρδους οι τιμές στα πλαίσια μιας τεχνικής, έστω της [A, L], προσδιορίζονται μονοσήμαντα, β) για τις εν λόγω μονοσήμαντα προσδιορισμένες τιμές υπάρχουν άπειρα καλάθια πραγματικού ωρομισθίου που ικανοποιούν την εξίσωση pφ = 1, και γ) η εξίσωση pφ = 1 για δεδομένο φ είναι και αυτή μια εξίσωση τυποποίησης της μορφής pd = α, όπου α = 1 και d = φ, έπεται ότι για δεδομένο ποσοστό κέρδους υπάρχουν άπειρες εξισώσεις τυποποίησης της μορφής pd = α, οι οποίες αντιστοιχούν σε ονομαστικό ωρομίσθιο ίσο με την μονάδα. [Αναλυτικότερα βλέπε Σταμάτης (1992), σελ. 161, 170-177].

Μια γενικότερη μορφή εξίσωσης τυποποίησης είναι η εξίσωση τυποποίησης pd + aw = α[5,6]. Δια της εξίσωσης αυτής, θέτουμε αυθαιρέτως το άθροισμα της τιμής ενός καλαθιού παραγόμενων εμπορευμάτων και την τιμή μιας συγκεκριμένης ποσότητας εργασίας ίσο με την σταθερά α. Αν η σταθερά *α* έχει διάσταση, τότε οι τιμές μετρώνται σε όρους του καλαθιού των παραγόμενων και μη παραγόμενων εμπορευμάτων $[d^T, a]$. Περαιτέρω για τα ονομαστικά μεγέθη που προκύπτουν από την εξίσωση αυτή ισχύει ό,τι ισχύει και για την εξίσωση pd = α. Τα ονομαστικά μεγέθη δηλαδή που προκύπτουν από την εξίσωση τυποποίησης pd + aw = α είναι και αυτά χαρακτηριστικά μεγέθη του τυπικού υποσυστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, αν διερευνήσουμε τους παράγοντες που προσδιορίζουν την θέση και την κλίση της w-r-καμπύλης[7], η οποία προκύπτει για την εν λόγω εξίσωση τυποποίησης στα πλαίσια μιας δεδομένης τεχνικής, διαπιστώνουμε ότι η θέση και η κλίση της w-r-καμπύλης εξαρτάται αποκλειστικά: α) από την εξίσωση τυποποίησης και β) από χαρακτηριστικά μεγέθη του τυπικού υποσυστήματος, του συστήματος δηλαδή που χρησιμοποιεί την εν λόγω τεχνική και ως καθαρό προϊόν του παράγει το καλάθι εμπορευμάτων d[8]. Ειδικότερα προκύπτουν τα εξής:

5. Μιας τέτοιας μορφής εξίσωση τυποποίησης εισάγεται από τον Hahn στο Hahn (1982), σελ. 356.
6. Η εξίσωση pd + aw = α μπορεί να θεωρηθεί εξίσωση τυποποίησης μόνο όταν ως εξίσωση τυποποίησης θεωρηθεί και η εξίσωση w = 1. Διαφορετικά, η εισαγωγή της, στα πλαίσια μιας δεδομένης τεχνικής, αποτελεί απλώς έναν διαφορετικό τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε απόλυτες τιμές στα πλαίσια της εν λόγω τεχνικής. Επιπλέον, επειδή τα όσα θα εκτεθούν στην συνέχεια δεν επηρεάζονται από την ακριβή φύση της εν λόγω εξίσωσης, μπορούμε να καλούμε και αυτή την εξίσωση εξίσωση τυποποίησης, αρκούμενοι στο γεγονός ότι με την εισαγωγή της για δεδομένο ποσοστό κέρδους προκύπτουν απόλυτες τιμές.
7. Προφανώς μια w-r-καμπύλη παριστά μια w-r-σχέση. Ως εκ τούτου, οι παράγοντες που καθορίζουν την θέση και την κλίση μιας w-r-καμπύλης αποτελούν και τους παράγοντες που καθορίζουν την w-r-σχέση την οποία –η εν λόγω w-r-καμπύλη– απεικονίζει.
8. Ισχύει δηλαδή αναλογικά ό,τι ισχύει για την θέση και την κλίση της w-r-καμπύλης όταν ως εξίσωση τυποποίησης εισάγουμε την εξίσωση pd = α. Προφανώς, βέβαια, στα πλαίσια της εξίσωσης τυποποίησης pd + aw = α καίτοι το τυπικό εμπόρευμα είναι το καλάθι εμπορευμάτων $[d^T, a]$, το τυπικό υποσύστημα παράγει ως καθαρό προϊόν μόνο το καλάθι εμπορευμάτων d, κι αυτό γιατί στα πλαίσια του υποδείγματος η εργασία εξ ορισμού αποτελεί ένα μη παραγόμενο εμπόρευμα. [Για την θέση και την κλίση της w-r-καμπύλης στα πλαίσια της εξίσωσης τυποποίησης pd = α βλέπε Stamatis (1988) και Stamatis (1998)].

Έστω η δεδομένη παραγωγική μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής [A, L][9] και έστω η εξίσωση τυποποίησης pd + aw = α. Η w-r-καμπύλη, η οποία αντιστοιχεί για την εν λόγω εξίσωση τυποποίησης στην υπό θεώρηση τεχνική, προκύπτει ως εξής:

$$pd + aw = \alpha \;\Rightarrow$$

$$w = \frac{\alpha}{a + L[I-(1+r)A]^{-1}d} \tag{1}$$

$$\text{για } r < \frac{1-\lambda}{\lambda} \equiv R$$

και

$$w = 0 \tag{2}$$

$$\text{για } r = R$$

όπου λ (< 1) η Perron-Frobenius ιδιοτιμή της μήτρας A και R το μέγιστο οικονομικά σημαντικό ποσοστό κέρδους.
Επίσης, για r < R, η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$w = \frac{\alpha - aw}{L[I-(1+r)A]^{-1}d} = \frac{pd}{L[I-(1+r)A]^{-1}d} \tag{3}$$

Αν X το ακαθάριστο προϊόν του τυπικού υποσυστήματος και ως εκ τούτου για το καθαρό προϊόν του τυπικού υποσυστήματος ισχύει $d = X - AX$, τότε για την w-r-καμπύλη του τυπικού υποσυστήματος ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$pX - pAX = rpAX + wLX \;\Rightarrow\; pd = rpAX + wLX \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; w = \frac{pd}{LX} - r\frac{pAX}{LX} \tag{4}$$

$$\text{με } 0 \le r \le R$$

Στην (4) ο λόγος της τιμής pd του καθαρού προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος προς την ζωντανή εργασία LX του τυπικού υποσυστήματος[10], ήτοι ο

9. Ως γνωστόν για μια παραγωγική μη διασπώμενη τεχνική [A, L] ισχύει $(I - A)^{-1} > 0$.

10. Ως γνωστόν, το γινόμενο LX ενός συστήματος παραγωγής [A, L, X], το οποίο χρησιμοποιεί την τεχνική [A, L] και ως ακαθάριστο προϊόν παράγει το καλάθι εμπορευμάτων X, παριστά την ζωντανή εργασία που ξοδεύεται στο εν λόγω σύστημα για την παραγωγή του ακαθάριστου προϊόντος X.

λόγος pd / LX, παριστά την για δεδομένο ποσοστό κέρδους τιμιακή παραγωγικότητα της εργασίας του τυπικού υποσυστήματος. Παρόμοια, ο λόγος της τιμής των μέσων παραγωγής AX του τυπικού υποσυστήματος προς την ζωντανή εργασία LX, ήτοι ο λόγος pAX / LX, παριστά την για δεδομένο ποσοστό κέρδους τιμιακή ένταση κεφαλαίου του τυπικού υποσυστήματος.

Επιπρόσθετα, δεδομένης της εξίσωσης τυποποίησης pd + aw = α, για την w-r-καμπύλη του τυπικού υποσυστήματος για r<R ισχύει

$$pd = rpAX + wLX = \alpha - aw \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; rpAX + wLX + aw = \alpha \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; rwL[I-(1+r)A]^{-1}AX + wLX + aw = \alpha \;\Rightarrow$$
$$w = \frac{\alpha}{a + rL[I-(1+r)A]^{-1}AX + LX} \tag{5}$$

Συνεπώς, η w-r-καμπύλη του τυπικού υποσυστήματος για r<R δίνεται είτε από την (4) είτε από την (5). Μπορεί όμως να δειχτεί ότι η (5) είναι ισοδύναμη με την (1) και συνεπώς ισοδύναμη με την (3).

Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα ακόλουθα:

Από το σύστημα των τιμών $p = (1 + r)pA + wL \;\Rightarrow\; p[I-(1+r)A] = wL$, για r < R έπεται

$$p = wL[I-(1+r)A]^{-1} = (1+r)pA + wL \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; wL[I-(1+r)A]^{-1} = (1+r)\,wL[I-(1+r)A]^{-1}A + wL \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; L[I-(1+r)A]^{-1} = (1+r)L[I-(1+r)A]^{-1}A + L \tag{6}$$

Ως εκ τούτου από την (1) και την (6) έπεται

$$w = \frac{\alpha}{a + L[I-(1+r)A]^{-1}d} = \frac{\alpha}{a + (1+r)L[I-(1+r)A]^{-1}Ad + Ld} \tag{7}$$

Ισχύει επίσης

$$L[I-(1+r)A]^{-1}[d + AX] = L[I-(1+r)A]^{-1}X \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; L[I-(1+r)A]^{-1}d + L[I-(1+r)A]^{-1}AX = L[I-(1+r)A]^{-1}X \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \{(1+r)L[I-(1+r)A]^{-1}Ad + Ld\} + L[I-(1+r)A]^{-1}AX =$$
$$= L[I-(1+r)A]^{-1}AX \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (1+r)\,L[I-(1+r)A]^{-1}Ad+Ld =$$
$$= L[I-(1+r)A]^{-1}X - L[I-(1+r)A]^{-1}AX \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (1+r)\,L[I-(1+r)A]^{-1}Ad+Ld =$$
$$= \{(1+r)\,L[I-(1+r)A]^{-1}AX+LX\} - L[I-(1+r)A]^{-1}AX \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (1+r)\,L[I-(1+r)A]^{-1}Ad+Ld = rL[I-(1+r)A]^{-1}AX+LX \qquad (8)$$

Από την (8) όμως και την (7) έπεται

$$w=\frac{\alpha}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d}=\frac{\alpha}{a+(1+r)L[I-(1+r)A]^{-1}Ad+Ld}=$$

$$=\frac{\alpha}{a+rL[I-(1+r)A]^{-1}AX+LX} \qquad (9)$$

Ως εκ τούτου αποδείξαμε ότι για $r < R$ η w-r-καμπύλη που προσδιορίζεται από τις (1) και (3) είναι ταυτή με την w-r-καμπύλη που προσδιορίζεται από την (5). Αποδείξαμε δηλαδή ότι η w-r-καμπύλη που προσδιορίζεται από τις (1) και (3) είναι ταυτή με την w-r-καμπύλη του τυπικού υποσυστήματος. Τα ίδια ισχύουν και για $r = R$, την περίπτωση αυτή όμως θα την εξετάσουμε σε άλλο σημείο στη συνέχεια.

Για τη θέση και την κλίση της w-r-καμπύλης ισχύουν τα ακόλουθα:

A) Για το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο W παίρνουμε από τις (1), (3) και (4) θέτοντας $r = 0$:

$$W=\frac{\alpha}{a+LX}=\frac{\alpha-aW}{L(I-A)^{-1}d}=\frac{p\,d}{L(I-A)^{-1}d}=\frac{p\,d}{LX} \qquad (10)$$

Επειδή το τυπικό εμπόρευμα d είναι το καθαρό προϊόν του τυπικού υποσυστήματος, έπεται ότι το διάνυσμα $(I-A)^{-1}d$ παριστά το ακαθάριστο προϊόν του τυπικού υποσυστήματος. Συνεπώς, το βαθμωτό $L(I-A)^{-1}d$ παριστά την ποσότητα της ζωντανής εργασίας LX που χρησιμοποιεί το τυπικό υποσύστημα. Η τελευταία αυτή ποσότητα εργασίας είναι, ως γνωστόν, ίση με την ζωντανή και νεκρή εργασία που δαπανήθηκε για την παραγωγή του καθαρού προϊόντος d του τυπικού υποσυστήματος. Σύμφωνα με την (10), λοιπόν, το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο W είναι ίσο με τον λόγο την τιμής pd του καθαρού προϊόντος d του τυπικού υποσυστήματος προς την ποσότητα της ζωντανής και νεκρής εργασίας $L(I-A)^{-1}d$ που ξοδεύτηκε για την παραγωγή αυτού του καθαρού προϊόντος και ίσο, επίσης, με τον λόγο της τιμής του καθαρού προϊόντος d του τυπικού υποσυστήματος προς την ποσότητα της ζωντανής εργασίας LX, η οποία ξοδεύτηκε για την παραγωγή του ακαθάριστου προϊόντος X του τυπικού υποσυστήματος. Ο λόγος αυτός παριστά, προφανώς, την τιμιακή παραγωγικότητα της εργασίας στο τυπικό υποσύστημα όταν $r = 0$. Έτσι λοιπόν σύμφωνα με την (10) το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο W είναι ίσο με την τιμιακή παραγωγικότητα της εργασίας στο τυπικό υποσύστημα, όταν $r = 0$.

B) Για το μέγιστο ποσοστό κέρδους R ισχύει $w = 0$, $pd = \alpha$, και $p = (1 + R)pA$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$pd = (1+R)pAd \Rightarrow R = \frac{pd - pAd}{pAd} = \frac{\alpha - pAd}{pAd} \tag{11}$$

Για $X = d + AX$, όμως, και $p = (1 + R)pA$ έπονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$pX = (1 + R)pAX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pd + pAX = (1 + R)pAX \tag{11a}$$

$$\Rightarrow pd = RpAX \tag{11b}$$

$$\Rightarrow pd = (1 + R)pAd = RpAX \tag{11c}$$

$$\Rightarrow pAd = \frac{R}{1+R}pAX \tag{11d}$$

$$\Rightarrow \frac{1+R}{R}pAd = pAX \tag{11e}$$

και

$$pd - pAd = RpAd \tag{11f}$$

Ως εκ τούτου έπεται επίσης

$$R = \frac{pd - pAd}{pAd} = \frac{RpAd}{pAd} = \frac{RpAd}{\frac{R}{1+R}pAX} = \frac{(1+R)pAd}{pAX} = \frac{pd}{pAX} \tag{12}$$

Η τελευταία σχέση όμως δηλώνει ότι το μέγιστο ποσοστό κέρδους είναι ίσο με την τιμή του καθαρού προϊόντος του συστήματος παραγωγής, το οποίο ως καθαρό προϊόν του παράγει το τυπικό εμπόρευμα, προς την τιμή των μέσων παραγωγής, τα οποία απαιτήθηκαν από το εν λόγω σύστημα παραγωγής για την παραγωγή του τυπικού εμπορεύματος ως καθαρού προϊόντος. Επειδή όμως ισχύει

$$R=\frac{pd}{pAX}=\frac{\alpha}{pAX}=\frac{\alpha-pAd}{pAd}=\frac{pd-pAd}{pAd} \tag{13}$$

έπεται ότι ο λόγος $\frac{\alpha-pAd}{pAd}$ εκφράζει ό,τι και ο λόγος $\frac{\alpha}{pAX}$, ήτοι το μέγιστο ποσοστό κέρδους του τυπικού υποσυστήματος[11].

Γ) Από την (1) έπεται ότι για την κλίση, $\dot{w}$, της w-r-καμπύλης ισχύει (στο παρόν σημείωμα συμβολίζουμε με $\dot{y}$ την παράγωγο ενός μεγέθους y ως προς το r)[12]

$$\dot{w}=\frac{-pA[I-(1+r)A]^{-1}d}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d} \tag{14}$$

όπου $r < R$

Από την (4) για την κλίση της w-r-σχέσης του τυπικού υποσυστήματος έπεται

11. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους ως το μέγιστο ποσοστό κέρδους του τυπικού υποσυστήματος μπορεί να κατανοηθεί σαφέστερα στα πλαίσια των διασπώμενων τεχνικών. Στη γενική περίπτωση στα πλαίσια των διασπώμενων τεχνικών αποδεικνύεται ότι το μέγιστο οικονομικά σημαντικό ποσοστό κέρδους μεταβάλλεται συναρτήσει του τυπικού υποσυστήματος. [Βλέπε Stamatis (1998), σελ. 18-21].

12. Πιο συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:

α) Για $r < R$, από το σύστημα των τιμών $p = (1 + r)pA + wL$ έπεται

$$\dot{p}d = pA[I-(1+r)A]^{-1}d+\dot{w}L[I-(1+r)A]^{-1}d \tag{I}$$

β) Από την εξίσωση τυποποίησης $pd + aw = \alpha \Leftrightarrow pd = \alpha - aw$ έπεται

$$\dot{p}d = -a\dot{w} \tag{II}$$

γ) Αντικαθιστώντας την (II) στην (I) συνεπάγεται

$$-pA[I-(1+r)A]^{-1}d=\dot{w}(a+L[I-(1+r)A]^{-1}d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{w}=\frac{-pA[I-(1+r)A]^{-1}d}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d}.$$

Η τελευταία σχέση είναι η ζητούμενη.

$$\dot{w}=\frac{\dot{p}d}{LX}-\frac{pAX}{LX}-r\frac{\dot{p}Ad}{LX}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{w}+a\dot{w}\frac{1}{LX}=-\frac{pAX}{LX}-\frac{\dot{p}Ad}{LX}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{w}=\frac{LX}{LX+a}\left(-\frac{pAX}{LX}-r\frac{\dot{p}Ad}{LX}\right) \qquad (15)$$

Αποδεικνύεται όμως ότι για $r < R$ η (15) είναι ταυτή με την (14)[13]. Ήτοι

13. Η απόδειξη έχει ως εξής: μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\dot{w}=\frac{-pA[I-(1+r)A]^{-1}d}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d}=\left(\frac{LX}{a+LX}\right)(-\dot{k}r-k)$$

όπου $k=\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}=\frac{pAX}{LX}$, $\dot{k}r=[pA+\dot{w}L]^{-1}[I-(1+r)A]^{-1}\frac{A(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r$

Ήδη έχουμε εξηγήσει ότι το δεξί μέρος της σχέσης εκφράζει την κλίση της w-r-καμπύλης του τυπικού υποσυστήματος. Για την κλίση της w-r-σχέσης του τυπικού υποσυστήματος όμως έπονται τα ακόλουθα:

$$\dot{w}=\left(\frac{LX}{LX+a}\right)(-\dot{k}r-k)=\left(\frac{LX}{LX+a}\right)\{-(pA+\dot{w}L)[I-(1+r)A]^{-1}\frac{A(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r-\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}\}\rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{w}=\left(\frac{LX}{LX+a}\right)\{-pA[I-(1+r)A]^{-1}\frac{A(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r-\dot{w}\frac{1}{w}\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r-\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}\}\rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{w}\{1+\left(\frac{LX}{LX+a}\right)\frac{1}{w}\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r\}=\left(\frac{LX}{LX+a}\right)\{-pA[I-(1+r)A]^{-1}\frac{A(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}r-\frac{pA(I-A)^{-1}d}{L(I-A)^{-1}d}\}\rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{w}=\frac{LX\{-pA[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr-pA(I-A)^{-1}d\}}{(LX+a)L(I-A)^{-1}d}\,\frac{(LX+a)wL(I-A)^{-1}d}{(LX+a)wL(I-A)^{-1}d+LXpA(I-A)^{-1}dr}\rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{w}=\frac{LX\{-pA[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr-pA(I-A)^{-1}d\}}{(LX+a)L(I-A)^{-1}d+LX\frac{1}{w}pA(I-A)^{-1}dr}\rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{w}=-\frac{LXpA\{[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)^{-1}d\}}{[aL(I-A)^{-1}d]+LX\{L(I-A)^{-1}d+L[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)dr\}}\rightarrow$$

$$\dot{w}=\frac{-pA[I-(1+r)A]^{-1}d}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d}=\frac{LX}{LX+a}\left(-\frac{pAX}{LX}-r\frac{\dot{p}Ad}{LX}\right) \quad (16)$$

Ως εκ τούτου ό,τι εκφράζει η (15) εκφράζει και η (14). Η (15) όμως εκφράζει ότι η κλίση της w-r-καμπύλης εξαρτάται αποκλειστικά: α) από την ζωντανή εργασία **LX**, η οποία ξοδεύτηκε από το τυπικό υποσύστημα, β) από τη σταθερά a της εξίσωσης τυποποίησης, γ) από την τιμιακή ένταση κεφαλαίου $\frac{pAX}{LX}$ του τυπικού υποσυστήματος, δ) από το ποσοστό κέρδους r και ε) από τον λόγο της οριακής μεταβολής της τιμιακής έντασης κεφαλαίου του τυπικού υποσυστήματος, η οποία επέρχεται συνεπεία μιας οριακής μεταβολής του ποσοστού κέρδους, προς αυτήν την οριακή μεταβολή του ποσοστού κέρδους, ήτοι από τον λόγο $(\dot{p}AX)/(LX)$ [14,15]. Από αυτά όμως έπεται ότι η κλίση της w-

---

$$\rightarrow \dot{w}=-\frac{pA\{[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)^{-1}d\}}{a+L\{[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)d\}}$$

Επίσης ισχύει

$[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)^{-1}d=[I-(1+r)A]^{-1}d \rightarrow$

$\rightarrow \{[I-(1+r)A]^{-1}Ar+I\}(I-A)^{-1}d=[I-(1+r)A]^{-1}d \rightarrow$

$\rightarrow \{Ar+[I-(1+r)A]\}(I-A)^{-1}d=d \rightarrow$

$\rightarrow \{Ar+I-A-Ar\}(I-A)^{-1}d=d \rightarrow$

$\rightarrow (I-A)(I-A)^{-1}d=d \rightarrow$

$\rightarrow d=d$

Συνεπώς, δεδομένου ότι $[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)^{-1}d=[I-(1+r)A]^{-1}d$, έπεται ότι

$$\dot{w}=-\frac{pA\{[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)^{-1}d\}}{a+L\{[I-(1+r)A]^{-1}A(I-A)^{-1}dr+(I-A)d\}}=$$

$$=-\frac{pA[I-(1+r)A]^{-1}d}{a+L[I-(1+r)A]^{-1}d}=\left(\frac{LX}{a+LX}\right)(-\dot{\kappa}r-\kappa)$$

[Βλέπε Stamatis (1998), σελ.15-17].

14. Η (16) εκφράζει ότι η κλίση της w-r-καμπύλης είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του παράγοντα $\left(-\frac{pAX}{LX}-r\frac{\dot{p}AX}{LX}\right)$, όπου το εν λόγω σταθερό πολλαπλάσιο, ήτοι το $\frac{LX}{LX+a}$, εξαρτάται

r-καμπύλης δεν είναι χαρακτηριστικό μέγεθος της δεδομένης τεχνικής, αλλά χαρακτηριστικό μέγεθος του τυπικού υποσυστήματος, αφού εξαρτάται αποκλειστικά από την εξίσωση τυποποίησης και το τυπικό υποσύστημα.

Συνεπώς, στο παρόν σημείωμα αποδείξαμε ότι τα ονομαστικά μεγέθη και η w-r-σχέση που προκύπτουν από την εν λόγω γενική μορφή της εξίσωσης τυποποίησης, ήτοι από την εξίσωση pd + aw = α, αποτελούν και αυτά, όπως και για την εξίσωση τυποποίησης pd = α, όχι χαρακτηριστικά μεγέθη της τεχνικής, αλλά του τυπικού υποσυστήματος.

αποκλειστικά από την ζωντανή εργασία LX του τυπικού υποσυστήματος και την σταθερά a της εξίσωσης τυποποίησης.

15. Ας σημειωθεί εδώ ότι, υπό την ισχύ i) για r < R, των σχέσεων (4) και (9), ii) για r = R, της (11c) και iii) ανεξαρτήτως του r, της (II), είναι δυνατόν να δειχθεί ότι η κλίση της w-r-καμπύλης δίνεται από την (15) ακόμα και στην περίπτωση που r = R. Συγκεκριμένα, αν για δεδομένο ποσοστό κέρδους συμβολίσουμε με p(r), w(r) και κ(r) το διάνυσμα των τιμών, την w-r-σχέση και την τιμιακή ένταση κεφαλαίου αντίστοιχα, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\dot{w}(R)=\lim_{r\to R}\frac{w(R)-w(r)}{R-r}=\lim_{r\to R}\frac{0-\frac{p(r)d}{LX}+r\frac{p(r)AX}{LX}+R\frac{p(r)AX}{LX}-R\frac{p(r)AX}{LX}}{R-r}=$$

$$=\lim_{r\to R}\Big[\frac{-\frac{p(r)AX}{LX}(R-r)}{R-r}\Big]+\lim_{r\to R}\Big[\frac{-\frac{p(r)d}{LX}+R\frac{p(r)AX}{LX}}{R-r}\Big]=$$

$$=-\frac{p(R)AX}{LX}+\lim_{r\to R}\Big[\frac{\frac{-p(r)d+Rp(r)AX-Rp(R)AX+Rp(R)AX}{LX}}{R-r}\Big]=$$

$$=-\frac{p(R)AX}{LX}+\lim_{r\to R}\Big[\frac{\frac{-p(r)d+Rp(R)AX}{LX}}{R-r}\Big]-\lim_{r\to R}\Big[\frac{R\frac{p(R)AX-p(r)AX}{LX}}{R-r}\Big]=$$

$$=-\frac{p(R)AX}{LX}+\lim_{r\to R}\Big[\frac{\frac{p(R)d-p(r)d}{LX}}{R-r}\Big]-\lim_{r\to R}\Big[\frac{R\frac{p(R)AX-p(r)AX}{LX}}{R-r}\Big]=$$

$$=-\frac{p(R)AX}{LX}+\frac{\dot{p}(R)d}{LX}-R\frac{\dot{p}(R)AX}{LX}=-\kappa(R)-\frac{\dot{p}(R)d}{LX}-R\dot{\kappa}(R)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \dot{w}(R)=-\kappa(R)-\frac{a}{LX}\dot{w}(R)-R\dot{\kappa}(R)=\frac{LX}{LX+a}(-\kappa(R)-R\dot{\kappa})$$

Ως εκ τούτου και για r = R η κλίση της w-r-καμπύλης προσδιορίζεται από τα ίδια μεγέθη όπως και για r < R. [Μπορεί να αποδειχθεί ότι η παράγωγος w(R) υπάρχει, βλέπε Βουγιουκλάκης/Μαριόλης (1992), σελ. 149-166 και Kurz/Salvadori (1995), σελ. 99].

Αναφορές

Βουγιουκλάκης, Π. / Μαριόλης, Θ. (1992), Ο προσδιορισμός των τιμών και η σχέση ονομαστικού ωρομισθίου - ποσοστού κέρδους στα γραμμικά συστήματα παραγωγής, *Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας*, τ. 10, σελ. 113-190.

Hahn, F. (1982), The neo-Ricardians, *Cambridge Journal of Economics*, τόμος 6, σελ. 353-374.

Kurz, H. / Salvadori, N. (1995), *Theory of production*, Cambridge University Press.

Levhari, D. (1965), A Non Substitution Theorem and Switching of Techniques, *Quarterly Journal of Economics*, τόμος 40, σελ. 165-195.

Salvadori, N. / Steedman, I. (1988), Joint Production Analysis in a Sraffian Framework, *Bulletin of Economic Research*, τόμος 40, σελ. 98-105.

Stamatis, G. (1983), *Sraffa und sein Verhältnis zu Ricardo und Marx*, Göttingen.

Stamatis, G. (1988), *Über das Normwaresubsystem und die w-r-relation. Ein Beitrag Zur Theorie linearer Productionssysteme*, Athens.

Stamatis, G. (1998), On the Position and the Slope of the w-r-Curve, *Political Economy*, τ. 2, σελ. 5-25.

Σταμάτης, Γ. (1992), *Ο Sraffa και η σχέση του με τον Ricardo και τον Marx,* Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα [Μετάφραση του Stamatis, G. (1983)].