

Σχόλιο*

του

David Gale

Μετάφραση: Γιώργος Σωτήροχος

Το αντιπαράδειγμα των Hülsmann και Steinmetz [4] για την ύπαρξη διανυσμάτων τιμών σε γενικευμένα μοντέλα von Neumann είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον και προκάλεσε, τουλάχιστον σε εμένα, μεγάλη έκπληξη. Είχε ήδη επισημανθεί πριν από μεγάλο χρονικό διάστημα από τον John Fei ότι η απόδειξη ύπαρξης στο [1] ήταν ανεπαρκής, και προσπάθησα σκληρά σε μια μεταγενέστερη εργασία μου [2, σελ. 314-315] να δώσω μια ορθή απόδειξη. Αργότερα διαπίστωσα ότι το αποτέλεσμα που αποδείχθηκε στο [2] είναι ουσιαστικά ασθενέστερο από αυτό που υπάρχει στο [1], αλλά παρέμεινα σε άγνοια του γεγονότος ότι το συμπέρασμα στο [1] είναι πράγματι λανθασμένο. Πράγματι το πταίσμα μου είναι ακόμη μεγαλύτερο από ότι υποστηρίχτηκε στο [4], δεδομένου ότι η απόδειξή μου στο [1] είναι ανεπαρκής ακόμη και στην περίπτωση των πολυεδρικών κώνων.

Για να διασωθεί κάτι από το ναυάγιο δίνω στο σχόλιο αυτό μια ορθή απόδειξη για την περίπτωση των πολυεδρικών κώνων. Φαίνεται ότι είναι αρκετά αργά να παρουσιάζεται σήμερα μια απόδειξη για ένα θεώρημα δεκαπέντε ετών, αλλά η μελέτη της βιβλιογραφίας αποκαλύπτει ότι ποτέ δεν παρουσιάστηκε, στο βαθμό που γνωρίζω, μια απλή και πλήρης απόδειξη του αποτελέσματος αυτού. Στο άρθρο των Kemeny, Morgenstern και Thompson [7] βρίσκουμε ότι “η απόδειξη ύπαρξης μιας οικονομικά σημαντικής λύσης είναι ιδιαίτερα μακροσκελής για να συμπεριληφθεί εδώ”. Γίνεται αναφορά σε δύο διαφορετικές αποδείξεις των Kemeny [6] και Thompson [9], αλλά η πρώτη είναι σε μια αναφορά προόδου του Dartmouth College η οποία είναι εξ ορισμού μη διαθέσιμη στο ευρύτερο κοινό ενώ η τελευταία αναφέρεται σε ορισμένες αδημοσίευτες σημειώσεις του Tucker στο κρίσιμο σημείο της απόδειξης. Η απόδειξη του Howe [3] που παρουσιάστηκε τέσσερα χρόνια αργότερα αναφέρεται σε ένα αποτέλεσμα του Tucker [10] για ανισότητες. Αυτός είναι

* Δημοσιεύτηκε στο *Econometrica*, vol. 40, No. 2, 1972.

και ο τρόπος απόδειξης που ακολούθησε ο Nikaido [8]. Λαμβανομένων υπόψιν των ανωτέρω θα ήταν χρήσιμο να δώσουμε μια άμεση απόδειξη η οποία δεν είναι μακροσκελής και προέρχεται από “αρχικές προτάσεις”, δηλαδή, το θεώρημα του διαχωρισμού δυο ξένων κυρτών συνόλων από υπερεπίπεδο (ή το λήμμα του Farkas). Το ακριβές αποτέλεσμα που είναι αναγκαίο για την απόδειξη είναι το ακόλουθο:

ΛΗΜΜΑ: Έστω ότι M είναι ένας $m \times n$ πίνακας και b ένα $m \times 1$ διάνυσμα. Εάν οι ανισότητες

$$x \geq 0, \quad Mx \geq b \quad (1)$$

δεν έχουν λύση, τότε οι ανισότητες

$$p \geq 0, \quad pM \leq 0, \quad pb > 0 \quad (2)$$

έχουν λύση.

Το λήμμα αυτό έπεται άμεσα από το θεώρημα διαχωρισμού, γιατί ο ισχυρισμός ότι η (1) δεν έχει λύση σημαίνει ότι το διάνυσμα b δεν ανήκει στον κώνο που δημιουργείται από τα διανύσματα στήλης m_j του M και τα μοναδιαία αρνητικά διανύσματα $-e_i$ του χώρου m διαστάσεων. Ως εκ τούτου υπάρχει ένα υπερεπίπεδο που έχει το διάνυσμα b από την μια πλευρά και τα m_j και $-e_i$ από την άλλη. Το ορθογώνιο διάνυσμα, p , σε αυτό το υπερεπίπεδο πρέπει να ικανοποιεί την (2).

Ο συμβολισμός μας θα είναι του [7], ο οποίος είναι περισσότερο βολικός από του [1] για την περίπτωση των πολυεδρικών κώνων.

Έστω ότι $A(B)$ είναι ένας $m \times n$ μη-αρνητικός πίνακας με τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο σε κάθε στήλη (γραμμή). Έστω ότι α είναι ο μεγαλύτερος αριθμός τέτοιος ώστε η ανισότητα $(B - \alpha A)x \geq 0$ έχει μια ημιθετική λύση ($x \geq 0, x \neq 0$) (είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο α υπάρχει και είναι θετικός).

ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχουν ημιθετικά διανύσματα x και p τέτοια ώστε:

$$(B - \alpha A)x \geq 0, \quad (3)$$

$$p(B - \alpha A) \leq 0, \quad (4)$$

και

$$pBx > 0^1. \quad (5)$$

1. Μόνον η σχέση (5) παρουσιάζει κάποια δυσκολία. Η επιχειρηματολογία στο [2] όπως και στο [5] αποδεικνύει τα (3) και (4).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι X είναι το σύνολο όλων των ημιθετικών διάνυσμάτων που ικανοποιούν την (3). Το x είναι διάφορο του κενού από τον ορισμό του α . Έστω ότι e_i είναι το ισοστό μοναδιαίο διάνυσμα στον χώρο m -διαστάσεων και ονομάζουμε το e_i αποτελεσματικό εάν $e_i Bx > 0$ για ένα τουλάχιστον x στο X . Τότε πρέπει να υπάρχει ένα αποτελεσματικό e_i , διότι εάν $x \in X$, τότε $Ax \neq 0$ δεδομένου ότι ο πίνακας A δεν έχει καμμία μηδενική στήλη και κατά συνέπεια $Bx \neq 0$ από την (3) δεδομένου ότι ο α είναι θετικός. Υποστηρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα αποτελεσματικό e_i έστω το e_1 , τέτοιο ώστε

$$e_1 (B - \alpha A) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in X \quad (6)$$

Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε για κάθε αποτελεσματικό e_i υπάρχει $x^i \in X$ τέτοιο ώστε $e_i (B - \alpha A)x^i > 0$. Αλλά εάν $\bar{x} = \sum x^i$, θα είχαμε $e_i (B - \alpha A)\bar{x} > 0$ για κάθε αποτελεσματικό e_i , έτσι ώστε θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ένα $\alpha' > \alpha$ έτσι ώστε $e_i (B - \alpha' A)\bar{x} \geq 0$ για κάθε αποτελεσματικό e_i . Από την άλλη πλευρά εάν το e_i είναι μη αποτελεσματικό, τότε $e_i B\bar{x} = e_i A\bar{x} = 0$. Έπεται από τα ανωτέρω ότι θα είχαμε $e_i (B - \alpha' A)\bar{x} \geq 0$ για κάθε i , ή $(B - \alpha' A)\bar{x} \geq 0$, το οποίο βρίσκεται σε αντίφαση με τον ορισμό του α .

Τώρα, η συνθήκη (6) συνεπάγεται ότι οι ανισότητες

$$x \geq 0, \quad (B - \alpha A)x \geq e_1$$

δεν έχουν λύση. Ως συνέπεια από το λήμμα υπάρχει $p \geq 0$ τέτοιο ώστε $p(B - \alpha A) \leq 0$ (συνθήκη (4)) και $pe_1 > 0$. Δεδομένου ότι το e_1 είναι ένα αποτελεσματικό διάνυσμα, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $e_1 Bx > 0$, συνεπώς ισχύει $pBx > 0$ όπως απαιτεί η συνθήκη (5).

Πανεπιστήμιο Καλιφόρνια, Berkeley

Παραπομπές

- [1] Gale, D.: "The Closed Linear Model of Production" in *Annals of Mathematic Studies*, no. 38, Princeton, Princeton University Press, 1956.
- [2] Gale, D.: "*The Theory of Linear Economic Models*", New York, McGraw Hill, 1960.
- [3] Howe, C.W. "An Alternative Proof of the Existence of General Equilibrium in a von Neumann Model", *Econometrica*, 28, 1960, σελ. 635-639.
- [4] Hülsmann, I. and Steinmetz: "A Note on the Non-existence of Optimal Price Vectors in the General Balanced - Growth Model of Gale", *Econometrica*, 40, 1972, σελ. 387-389.

-
- [5] Karlin, S.: "*Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*", Reading, Mass., Addison Wesley, 1959.
 - [6] Kemeny, J.G.: "Game Theoretic Solution of an Economic Problem", Progress Report No. 2, The Dartmouth Mathematics Project, 1956.
 - [7] Kemeny, J.G., Morgestern, O. and Thompson, G.L.: "A Generalisation of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica*, 24, 1956, σελ. 115-135.
 - [8] Nikaido, H.: "*Convex Structures and Economic Theory*", New York, Academic Press, 1968.
 - [9] Thompson, G.L.: "On the Solution of a Game - Theoretic Problem", in *Annals of Mathematic Studies*, no. 38, Princeton, Princeton University Press, 1956.
 - [10] Tucker, A.W.: "Dual Systems of Homogeneous Linear Relations", in *Annals of Mathematic Studies*, no. 38, Princeton, Princeton University Press, 1956.