ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ - 3 - ΦΘΙΝΟΠΩΡΟ 1998 - ΣΕΛ. 133 - 137

Ένα σημείωμα για την μη-ύπαρξη αρίστου διανύσματος τιμών στη γενική μορφή του ισόρροπου μοντέλου μεγέθυνσης του Gale*

των

J. Hülsmann και V. Steinmetz

Μετάφραση: *Γιώργος Σωτήρχος*

Στο μοντέλο μεγέθυνσης των Kemeny, Morgenstern και Thompson [2, σελ. 115-135] ο χώρος παραγωγής είναι ένας κλειστός κυρτός και πολυεδρικός κώνος στο R^{2n} με ορισμένες επιπλέον ιδιότητες. Στο μοντέλο μεγέθυνσης του Gale [1, σελ. 285-303] ο χώρος παραγωγής ικανοποιεί τις ίδιες ακριβώς υποθέσεις εκτός από την ιδιότητα να είναι πολυεδρικός. Ως εκ τούτου το μοντέλο του Gale μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του μοντέλου των ΚΜΤ. Στο σημείωμα αυτό θα αποδειχθεί ότι σε αντίθεση με ένα κεντρικό θεώρημα του Gale, η ύπαρξη ενός αρίστου διανύσματος τιμών δεν μπορεί να επιβεβαιωθεί σε αυτόν τον γενικευμένο χώρο παραγωγής.

Για να περιγράψουμε την δυσκολία στο μοντέλο μεγέθυνσης του Gale απαριθμούμε τις ιδιότητες του χώρου παραγωγής και τους θεμελιώδεις ορισμούς όπως αυτοί δόθηκαν από τον Gale.

---

* Δημοσιεύτηκε στο *Econometrica*, vol. 40, No. 2, 1972.

Σχόλιο του Μεταφραστή

Το άρθρο του Gale που μεταφράστηκε και δημοσιεύτηκε στο προηγούμενο τεύχος της *Πολιτικής Οικονομίας* έχει ένα λάθος στην απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης αρίστου διανύσματος τιμών. Το λάθος επισημάνθηκε περίπου είκοσι χρόνια μετά την αρχική δημοσίευση του εν λόγω άρθρου από τους Hülsmann και Steinmetz και δημοσιεύτηκε ένα αντιπαράδειγμα που πληρεί μεν τις προϋποθέσεις του μοντέλου Gale αλλά δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη άριστου διανύσματος τιμών, το οποίο και δημοσιεύουμε στην συνέχεια. Επίσης δημοσιεύεται και η απάντηση του Gale στο εν λόγω αντιπαράδειγμα.

Η ανακάλυψη του λάθους έχει συνέπειες και για τις αποδείξεις των γνωστών θεωρημάτων Perron-Frobenius που έδωσε ο Gale, δεδομένου ότι στηρίζονται στο θεώρημα ύπαρξης ενός αρίστου διανύσματος τιμών. Μια ανακατασκευή της απόδειξης για μη-γραμμικές αλλά γραμμικά ομογενείς διαδικασίες παραγωγής που πληρούν ορισμένες επιπλέον προϋποθέσεις από αυτές που θέτει ο Gale θα δοθεί σε προσεχές τεύχος της Πολιτικής Οικονομίας.

Οι τεχνολογικές δυνατότητες παραγωγής περιγράφονται από τον χώρο παραγωγής $p = (a, b) = (a_1, ..., a_n ; b_1, ..., b_n) \geq 0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(0, b) \in T$ συνεπάγεται ότι $b = 0$,

(iia) Το T είναι ένα κλειστό σύνολο,

(iib) Εάν $p_1, p_2 \in T$ τότε $p_1 + p_2 \in T$

(iic) Εάν $p \in T$ και $\lambda \in R$, $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda p \in T$, και

(iii) Για κάθε $i = 1, ..., n$ υπάρχει (a', b') τέτοιο ώστε $b'_i > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Ο *τεχνολογικός συντελεστής διαστολής* α_j του αγαθού j στην διαδικασία (a, b) ορίζεται ως:

$$\alpha_j(a,b) = \begin{cases} \dfrac{b_j}{a_j} & \text{για } a_j > 0 \\ \infty & \text{για } a_j = 0,\ b_j > 0 \\ \text{απροσδιόριστο} & \text{για } a_j = b_j = 0 \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ο *τεχνολογικός συντελεστής διαστολής* της διαδικασίας $(a, b) \neq 0$ ορίζεται ως:

$$\alpha(a,b) = \min_j \alpha_j(a,b) \quad \text{για } a_j + b_j > 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Ο *τεχνολογικός συντελεστής διαστολής* α_T του χώρου παραγωγής T ορίζεται ως

$$\alpha_T = \sup \alpha(a,b) \quad \text{για } (a,b) \in T \quad \text{και } (a,b) \neq 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Δεδομένου ενός διανύσματος τιμών $0 \leq y \in R^n$ και μιας διαδικασίας $(\alpha, b) \in T$ ο *οικονομικός συντελεστής διαστολής* της διαδικασίας (α, b) για το διάνυσμα τιμών y ορίζεται ως:

$$\beta(a,b;y) = \begin{cases} \dfrac{b \cdot y}{a \cdot y} & \text{για } ay > 0 \\ \infty & \text{για } ay = 0,\ by > 0 \\ \text{απροσδιόριστο} & \text{για } ay = by = 0 \end{cases}$$

Από τους ανωτέρω ορισμούς προκύπτει ότι για αυτά τα T υπάρχει πάντα μια άριστη διαδικασία τέτοια ώστε $\alpha(p) = \alpha_T$.

Στο παρακάτω κεντρικό θεώρημα [1, σελ. 290] ο Gale επιβεβαιώνει την ύπαρξη ενός διανύσματος τιμών ισορροπίας y.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Εάν T είναι ένας χώρος παραγωγής με τεχνολογικό συντελεστή διαστολής α_T, τότε υπάρχει μια άριστη διαδικασία $(\bar{a},\bar{b})$ και ένα διάνυσμα τιμών y τέτοιο ώστε (i) $\beta(\bar{a},\bar{b};y) = \alpha_T$ και (ii) $\beta(a,b;y) \leq \alpha_T$ για κάθε $(a, b) \in T$ για το οποίο το $\beta(a,b;y)$ ορίζεται.

Ο Gale ονομάζει αυτό το διάνυσμα τιμών άριστο. Θα δείξουμε ότι το θεώρημα αυτό στην γενική περίπτωση δεν είναι αληθές, δηλαδή ότι υπάρχουν χώροι παραγωγής με τις ιδιότητες που προϋποθέτει ο Gale, αλλά στους οποίους δεν υπάρχει διάνυσμα τιμών που ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του θεωρήματος.

Έστω ότι $T_0 \subseteq R^6$ είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$T_0 = \left\{(1,1,t;3,2 \pm \sqrt{1-(t-1)^2},t) \mid 0 \leq t \leq 2\right\}$$

Έστω ότι ο χώρος παραγωγής είναι ο κυρτός κώνος T που δημιουργείται από το T_0. Προφανώς ο T ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν ανωτέρω. Κατά συνέπεια ο T είναι ένας χώρος παραγωγής ενός μοντέλου Gale.

Ο τεχνολογικός συντελεστής διαστολής του κώνου T είναι $\alpha_T = 2$. Η άριστη διαδικασία δίδεται από το διάνυσμα $p = \lambda(1, 1, 0 ; 3, 2, 0)$ για $\lambda > 0$, δεδομένου ότι για κάθε διαδικασία $(a, b) \in T$, $a_3 = b_3$ και κατά συνέπεια $a_3 > 0$ συνεπάγεται $\alpha(a, b) \leq \alpha(a_3, b_3) = 1$, και όλες οι διαδικασίες $(a, b) \in T$ με $a_3 = 0$ είναι όπως έχουν περιγραφεί ανωτέρω.

Κάθε διάνυσμα τιμών $y = (y_1, y_2, y_3)$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) του θεωρήματος πρέπει να έχει τις ιδιότητες $y_1 = 0$ και $y_2 > 0$. Δεδομένου ότι $y' = y / (y_1, y_2, y_3)$ (ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) εάν και μόνο εάν το y τις ικανοποιεί, μπορούμε να περιορίσουμε την ανάλυσή μας στο σύνολο των διανυσμάτων τιμών:

$$Y_T = \{0, v, 1 - v \mid 0 < v \leq 1\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Για κάθε $y \in Y_T$ υπάρχει μια διαδικασία $(a, b)y \in T_0 \subseteq T$ όπου $\beta(a,b;y) > 2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω ότι $y=(0,\nu,1-\nu)$ με $\frac{1}{2}<\nu\leq 1$. Τότε $(a,b)_y=(1,1,1;3,3,1)\in T_0$

και $\beta(a,b;y)=\dfrac{3\nu+1-\nu}{\nu+1-\nu}=\dfrac{2\nu+1}{1}>2.$

(ii) Έστω ότι $y=(0,\nu,1-\nu)$ με $0<\nu\leq\frac{1}{2}$. Τότε

$$(a,b)_y=(1,1,\nu^2;3,2+\sqrt{1-(\nu^2-1)^2},\nu^2)\in T_0$$

και

$$\beta(a,b;y)=\frac{\nu(2+\sqrt{1-(\nu^2-1)^2})+(1-\nu)\nu^2}{\nu+\nu^2(1-\nu)}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2\nu^2-\nu^4}+(1-\nu)\nu^2}{1+\nu(1-\nu)}$$

$$=1+\frac{1+\nu\sqrt{2-\nu^2}}{1+\nu(1-\nu)}$$

Το ν έχει οριστεί έτσι ώστε $0<\nu\leq\frac{1}{2}$ και συνεπάγεται ότι

$1-\nu<\sqrt{2-\nu^2}$ και $1<\dfrac{1+\nu\sqrt{2-\nu^2}}{1+\nu(1-\nu)}$, κατά συνέπεια $\beta(a,b;y)>2$.

Συνεπώς έχουμε αποδείξει ότι για κάθε διάνυσμα τιμών που ικανοποιεί την συνθήκη (i) του θεωρήματος υπάρχει μια διαδικασία $(a, b)\in T$ με $\beta(a,b;y)>\alpha_T=2$ σε αντίφαση με την συνθήκη (ii).

Εν τέλει αναφερόμαστε εν συντομία στην απόδειξη [1, σελ. 291] του θεωρήματος, δεδομένου του γεγονότος ότι είναι ανεπαρκές να δίδεται ένα αντιπαράδειγμα χωρίς να γνωρίζουμε το σφάλμα στην απόδειξη.

Από την υπόθεση ότι για το σύνολο

$$V=\{(v_1,\dots,v_n)\mid v\leq 0, v_i<0 \text{ για } i=1,\dots,k\}\subseteq R^n,$$

$V\cap C=\varnothing$, όπου ο C είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος στο R^n, ο Gale συμπεραίνει ότι $\overline{V}\cap C\neq\varnothing$ όπου

$$V \subseteq \bar{V} = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i < 0 \text{ για } i = 1, \ldots, k\}$$

το οποίο δεν ισχύει εν γένει.

Το ανωτέρω αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε κατά τέτοιο τρόπο ώστε για τα σύνολα C, V και $\bar{V}$, τα οποία δημιουργούνται από το T και το α_T, να ισχύει μεν $V \cap C = \emptyset$ αλλά $\bar{V} \cap C \neq \emptyset$.

Πανεπιστήμιο Karlsruhe

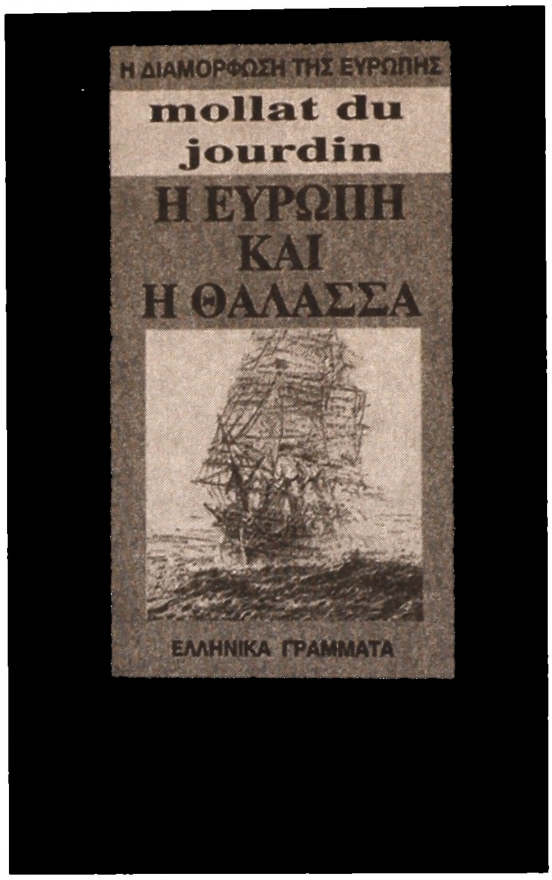
Παραπομπές

[1] Gale, D.: "The Closed Linear Model of Production" στο Kuhn, H.W. και Tucker, A.W.: *Linear Inequalities and Related Systems,* Annals of Mathematical Studies, Vol. 38, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1956.

[2] Kemeny, J.G., Morgenstern, O. και Thompson, G.L.: "A Generalisation of the von Neumann Model of an Expanding Economy", *Econometrica,* 24, (1956), σελ. 115-135.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Δύναμη στη γνώση



Γιγάντια χερσόνησος, αγκαλιασμένη από τις θάλασσες, η Ευρώπη τις βίωσε, πράγματι, ως σύνορα του φόβου ή όχθες της ελπίδας, ως ακούραστους φορείς εμπορευμάτων, ιδεών, ανθρώπων. «Στο Νότο βρίσκεται η Μεσόγειος, με τους αρχαίους πολιτισμούς της, τους ορίζοντες του ελληνικού και του αραβικού κόσμου, της Εγγύς Ανατολής και της Βόρειας Αφρικής, του Ισλάμ και του πετρελαίου. Στο Βορρά, ζει ο κόσμος των Βίκινγκς, των σάγκα, της ρέγκας, του σολομού και της φάλαινας, του Πόλου και του πετρελαίου της Βόρειας Θάλασσας. Στη Δύση, εκτείνεται η απεραντοσύνη του Ωκεανού – αν και σήμερα έχει κατά πολύ χάσει το νόημά της – με τους ορίζοντες της Αμερικής και της Αφρικής, και πιο μακριά, οι μυθικές Ινδίες, Δυτικές και Ανατολικές, οι χώρες των έγχρωμων πληθυσμών – ένας αχανής κόσμος αγνοημένος ή ελάχιστα γνωστός ως το τέλος του Μεσαίωνα, ο οποίος ωστόσο απέκτησε θεμελιώδη σημασία για την Ευρώπη. Η θάλασσα απομονώνει και συνάμα ενώνει».

- Ακαδημίας 88, 106 78 Αθήνα. Τηλ.: 3302415, 3820612 - fax: 3836658
- Γ. Γενναδίου 6, 106 78 Αθήνα. Τηλ.: 3817826, 3806661 - fax: 3836658
- Στοά Ορφέως, Στοά Βιβλίου Πεσμαζόγλου 5, 105 59 Αθήνα. Τηλ.: 3211246
- Θεσσαλονίκη: Κ. Μελενίκου 30, 546 35. Τηλ.: 245222