

Περί ενός οικονομικού συστήματος εξισώσεων και μιας γενίκευσης της πρότασης του Brouwer περί σταθερού σημείου

του

*J. v. Neumann (Princeton N.J.)**

Μετάφραση: Ζωή Στεφανοπούλου

Θέωρηση: Γιώργος Σταμάτης

Το αντικείμενο αυτής της σημείωσης είναι η επίλυση ενός τυπικού οικονομικού συστήματος εξισώσεων. Το σύστημα αυτό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Τα αγαθά παράγονται όχι μόνο από “τους φυσικούς συντελεστές παραγωγής”, αλλά κατά κύριο λόγο, *το ένα από το άλλο*, δηλαδή οι διαδικασίες παραγωγής δύνανται να είναι *κυκλικές*, αυτό σημαίνει ότι το αγαθό G_1 παράγεται με τη βοήθεια του αγαθού G_2 και το G_2 με τη βοήθεια του G_1 .

(2) Υπό ορισμένες συνθήκες οι τεχνικά δυνατές διαδικασίες παραγωγής είναι περισσότερες από τα αγαθά. Έτσι η συνήθης μέθοδος της “απαρίθμησης των εξισώσεων” αποτυγχάνει. Αποφασιστικής σημασίας είναι αντιθέτως να εξακριβωθεί ποιες διαδικασίες χρησιμοποιούνται πράγματι και ποιες (ως “μη προσοδοφόρες”) δεν χρησιμοποιούνται.

Για να μπορέσουμε να συζητήσουμε εντελώς καθαρά για τις (1), (2), θα πρέπει να εξιδανικεύσουμε ευρέως άλλα στοιχεία της κατάστασης. (Παράβαλε τις §§1 έως 2). Από αυτές τις εξιδανικεύσεις οι περισσότερες είναι επουσιώδεις, αλλά εδώ δεν θέλουμε να αναφερθούμε σε αυτό εγγύτερα.

Η προβληματική μας οδηγεί αναγκαστικά σε ένα σύστημα από ανισότητες (3)-(8') στην §3, του οποίου η επιλυσιμότητα δεν είναι καθόλου προφανής, δηλαδή αυτό το σύστημα δεν δύναται να επιλυθεί με κανενός είδους ποι-

* Τίτλος του πρωτοτύπου: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, von J.v.Neumann (Princeton N.Y.) in: *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, unter Mitwirkung von F. Alt, K. Gödel, A. Wald herausgegeben von Karl Menger, Wien, Heft 8, 1935-1936, Leipzig und Wien, [Verlag] Franz Denticke, 1937, S. 73-83.

οτικό επιχείρημα. Η μαθηματική απόδειξη επιτυγχάνεται αντιθέτως μόνον με τη βοήθεια μιας γενίκευσης της πρότασης του Brouwer περί σταθερού σημείου, δηλαδή μέσω χρησιμοποίησης αρκετά βαθιά κείμενων τοπολογικών δεδομένων. Αυτή η γενικευμένη πρόταση περί σταθερού σημείου (η “πρόταση” της παραγράφου §7) είναι επίσης η ίδια πολύ ενδιαφέρουσα.

Η συνάρτηση με την τοπολογία φαίνεται εν πρώτοις αρκετά απροσδόκητη, αλλά ο συγγραφέας πιστεύει ότι αυτό είναι φυσικό σε προβλήματα αυτού του είδους. Η άμεση αφορμή για αυτό είναι η εμφάνιση ενός ορισμένου προβλήματος “ελαχίστου-μεγίστου”, όπως αυτό είναι καλά γνωστό από τον Λογισμό Μεταβολών. Στα πλαίσια του δικού μας προβλήματος το πρόβλημα “ελαχίστου-μεγίστου” διατυπώνεται στην §5 και συγγενεύει στενά με ένα άλλο, το οποίο εμφανίζεται στη θεωρία των κοινωνικών παιγνίων (παράβαλε υποσημείωση 2 §6).

Μια άμεση ερμηνεία της εμφανιζόμενης εκεί συνάρτησης $\Phi(X,Y)$ θα ήταν πολύ επιθυμητή. Ο ρόλος της φαίνεται να είναι παρόμοιος με εκείνον του θερμοδυναμικού δυναμικού στη φαινομενολογική θερμοδυναμική και εικάζουμε ότι αυτή σε πλήρη φαινομενολογική γενικότητα (ανεξάρτητα από τις δικές μας μη φυσικές περιοριστικές εξιδανικεύσεις) θα έχει επίσης έναν παρόμοιο ρόλο.

Ένα άλλο προσωρινά ανερμήνευτο σημείο στη θεωρία μας είναι ο αξιοπαρατήρητος δυϊσμός (συμμετρία) μεταξύ των χρηματικών μεταβλητών (τιμές y_j , συντελεστής επιτοκίου β) και των τεχνικών μεταβλητών (εντάσεις παραγωγής x_i , δείκτης επέκτασης της οικονομίας α). Αυτός ο δυϊσμός είναι άκρως εντυπωσιακός τόσο στην § 3 στις (3)-(8'), όσο και στην §4 στις (7*) - (8*), όσο και στη διατύπωση του προβλήματος “ελαχίστου-μεγίστου” της §5 στις (7**) - (8**).

Εν κατακλείδι παραπέμπουμε επιπροσθέτως στα αποτελέσματα της §11, από τα οποία μεταξύ άλλων προκύπτει, ότι (στην περίπτωση που ισχύουν οι παραδοχές μας) ο κανονικός μηχανισμός τιμών επιφέρει την από καθαρά τεχνική άποψη πιο λειτουργική κατανομή των εντάσεων παραγωγής. Μιας και έχουμε εξαλείψει όλες τις χρηματικές περιπλοκές, αυτό δεν είναι παράλογο.

* * *

Οι προκείμενες έρευνες παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον συγγραφέα τον χειμώνα του 1932 σε ένα μαθηματικό σεμινάριό του στο πανεπιστήμιο του Princeton. Η αφορμή για την τωρινή δημοσίευση προέκυψε από

μια πρόσκληση του κύριου K. Menger, στον οποίο ο συγγραφέας θα ήθελε σε αυτό το σημείο να εκφράσει τις ευχαριστίες του.

1. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα: Υπάρχουν n αγαθά $G_1, \dots, G_n$, τα οποία δύνανται να παραχθούν μέσω m διαδικασιών $P_1, \dots, P_m$. Ποιες διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν (ως προσοδοφόρες) και ποιες τιμές των αγαθών θα ισχύσουν; Το πρόβλημα είναι προφανώς μη τετριμμένο, διότι σε καθένα από τα δύο σκέλη του δύναται να δοθεί απάντηση τότε μόνον, όταν στο άλλο σκέλος έχει ήδη δοθεί απάντηση – δηλαδή είναι πεπλεγμένο. Ιδίως παρατηρούμε:

(a) Επειδή δύναται να είναι $m > n$, ασφαλώς το πρόβλημα δεν επιλύεται δια της διαφορετικά συνήθους μεθόδου της “απαρίθμησης των εξισώσεων”. Για να αποκλείσουμε άλλου είδους επιπλοκές υποθέτουμε:

(b) Ότι η απόδοση της παραγωγής είναι σταθερή. – Επιπλέον:

(c) Ότι οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, συμπεριλαμβανομένης και της εργασίας, είναι διαθέσιμοι χωρίς περιορισμούς.

Το ουσιώδες φαινόμενο το οποίο επιθυμούμε να συλλάβουμε είναι αυτό: Τα αγαθά παράγονται μέσω των διαδικασιών παραγωγής το ένα από το άλλο (παράβαλε μεταξύ άλλων και την εξίσωση (7) παρακάτω), και θέλουμε να διακριβώσουμε (i) ποιες διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν και με ποιες εντάσεις, (ii) με ποια σχετική ταχύτητα αυξάνεται η συνολική ποσότητα των αγαθών, (iii) ποιες τιμές θα υπάρξουν, (iv) ποιο επιτόκιο ισχύει. Για να απομονώσουμε πλήρως αυτό το φαινόμενο, υποθέτουμε περαιτέρω:

(d) Η μοναδική λαμβάνουσα χώρα κατανάλωση είναι η κατανάλωση αγαθών των διαδικασιών παραγωγής, στην οποία πρέπει να περιλαμβάνεται επίσης η κατανάλωση των απαραίτητων για επιβίωση των εργατών και των υπαλλήλων αγαθών. Δηλαδή υποθέτουμε ότι κάθε εισόδημα πέραν του ελάχιστου εξερχόμενου προς επιβίωσιν, επανεπενδύεται εξ ολοκλήρου.

Είναι ασφαλώς προφανές, σε ποιες λογικές παραστάσεις μοντέλων περί Οικονομίας αντιστοιχούν αυτές οι παραδοχές.

2. Κάθε διαδικασία P_i , $i = 1, \dots, m$, έχει την ακόλουθη φύση: Καταναλώνει (σε κάποιες μονάδες εκφρασμένες) ποσότητες a_{ij} , των αντιστοίχων αγαθών G_j ($j = 1, \dots, n$) και παράγει τις ποσότητες b_{ij} αυτών των αγαθών. Δύναται λοιπόν να παρασταθεί συμβολικά ως ακολούθως:

$$(1) \quad P_i: \sum_{j=1}^n a_{ij} \rightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} G_j.$$

Ως προς αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε:

(e) Τα κεφαλαιουχικά αγαθά οφείλουν απλώς να τεθούν και στα δύο σκέλη της (1). Την φθορά ενός κεφαλαιουχικού αγαθού, οφείλει να περιγράψει κανείς, εισάγοντας για τα διάφορα στάδια φθοράς του διαφορετικά αγαθά και να θέτει ξεχωριστά αυτά τα αγαθά για καθένα από τα παραπάνω P_i .

(f) Κάθε διαδικασία P_i έχει ως χρονική διάρκειά της την μονάδα χρόνου. Μεγαλύτερης διάρκειας διαδικασίες τις αναλύει κανείς σε ξεχωριστές διαδικασίες της παραπάνω διάρκειας, εισάγοντας εν ανάγκη τα ενδιάμεσα προϊόντα ως ξεχωριστά αγαθά.

(g) Η (1) δύναται ιδίως να περιγράψει και την περίπτωση, όπου ένα αγαθό G_j δύναται να αποκτηθεί [=παραχθεί Σ.τ.Μ] μόνον μαζί με συγκεκριμένα άλλα αγαθά, τα μόνιμα παραπροϊόντα του.

Στην πραγματική διαδικασία της συνολικής Οικονομίας αυτές οι διαδικασίες P_i , $i = 1, \dots, m$, θα χρησιμοποιούνται με ορισμένες εντάσεις x_i , $i = 1, \dots, m$. Δηλαδή: στη συνολική διαδικασία οι αγαθών στις εξισώσεις (1) πρέπει να πολλαπλασιαστούν με x_i . Γράφουμε συμβολικά:

$$(2) \quad W = \sum_{i=1}^m x_i P_i$$

$x_i=0$ σημαίνει ότι η διαδικασία P_i μένει αχρησιμοποίητη.

Ενδιαφερόμαστε για εκείνες τις καταστάσεις της συνολικής Οικονομίας, στις οποίες αυτή επεκτείνεται με αμετάβλητη δομή, δηλαδή όπου οι αναλογίες των εντάσεων $x_1: \dots : x_m$, παραμένουν αμετάβλητες, αλλά τα ίδια τα $x_1, \dots, x_m$ επιτρέπεται να μεταβάλλονται. Τότε τα $x_1, \dots, x_m$ πολλαπλασιάζονται με ένα κοινό συντελεστή α ανά μονάδα χρόνου. Αυτός ο συντελεστής α είναι ο *συντελεστής επέκτασης της συνολικής Οικονομίας*.

3. Οι αριθμητικοί άγνωστοι του προβλήματός μας είναι:

- (i) Οι εντάσεις $x_1, \dots, x_m$ των διαδικασιών $P_1, \dots, P_m$,
- (ii) ο συντελεστής επέκτασης της συνολικής Οικονομίας,
- (iii) οι τιμές $y_1, \dots, y_m$ των αγαθών $G_1, \dots, G_n$,
- (iv) ο συντελεστής επιτοκίου β ($\beta = 1 + \frac{z}{100}$, το z είναι το επιτόκιο ως ποσοστό ανά μονάδα χρόνου).

Προφανώς είναι πάντα:

$$(3) \quad x_i \geq 0,$$

$$(4) \quad y_i \geq 0,$$

και, αφού μια λύση με $x_1 = \dots = x_m = 0$ ή $y_1 = \dots = y_n = 0$ θα ήταν χωρίς νόημα,

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m x_i > 0,$$

$$(6) \quad \sum_{j=1}^n y_j > 0.$$

Οι οικονομικές εξισώσεις τώρα πλέον γίνονται:

$$(7) \quad \alpha \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i \leq \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i^1,$$

(7') και σε περίπτωση που στην (7) ισχύει το $<$, τότε είναι $y_j = 0$.

$$(8) \quad \beta \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j,$$

(8') και στην περίπτωση όπου στην (8) ισχύει το $>$, τότε είναι $x_i = 0$.

Οι (7) και (7') σημαίνουν: Στη συνολική διαδικασία (2) είναι αδύνατον από ένα αγαθό G_j να καταναλώνεται περισσότερο από όσο παράγεται. Εάν όμως καταναλώνεται λιγότερο, δηλαδή εάν το G_j υπερπαράγεται, τότε το G_j γίνεται ένα ελεύθερο αγαθό και η τιμή του y_j είναι 0. Και οι (8) και (8') σημαίνουν: Στην κατάσταση ισορροπίας δεν δύναται σε καμία διαδικασία P_i να επιτευχθεί ένα κέρδος (διότι διαφορετικά οι τιμές ή το επιτόκιο θα ανέρχονταν – είναι προφανές πως πρέπει να νοηθεί αυτή η εξιδανίκευση). Αλλά εάν υπάρχει μια ζημία, δηλαδή εάν η P_i δεν είναι προσοδοφόρα, τότε η P_i θα μένει αχρησιμοποίητη, η έντασή της γίνεται 0.

Οι συντελεστές α_{ij} , b_{ij} θεωρούνται ως δεδομένα μεγέθη, ενώ οι x_i , α , y_j , β είναι οι άγνωστοι. Αυτοί είναι $m+n+2$ άγνωστοι, επειδή όμως στα x_i , y_j προφανώς μόνον οι αναλογίες $x_1: \dots : x_m$, $y_1: \dots : y_n$ έχουν σημασία, οι άγνωστοι είναι ουσιαστικά μόνον $m+n$. Έναντι αυτών βρίσκονται $m+n$ συνθήκες (7)+(7') και (8)+(8'). Επειδή όμως αυτές δεν είναι ισότητες, αλλά αρκετά περίπλοκες ανισότητες, η ισότητα αυτών των δύο πληθών δεν εγγυάται κατά κανένα τρόπο την επιλυσιμότητα του συστήματος εξισώσεων.

Η δυϊκή συμμετρία των εξισώσεων (3), (5), (7), (7'), των μεταβλητών x_i , α και του όρου “μη χρησιμοποιούμενη διαδικασία” αφενός και των εξισώσεων (4), (6), (8), (8'), των μεταβλητών y_j , β και του όρου “ελεύθερο αγαθό” αφετέρου, φαίνεται αξιοσημείωτη.

1. Στο γερμανικό πρωτότυπο: x_j – Σ.τ.Μ.

4. Το ζήτημά μας είναι να λύσουμε τις (3) - (8'). Θα δείξουμε:

Λύσεις των (3)-(8') υπάρχουν πάντοτε. Ωστόσο δύνανται να υπάρξουν λύσεις με διαφορετικά $x_1: \dots :x_m$ ή $y_1: \dots :y_n$. Το πρώτο είναι δυνατόν, αφού δεν έχουμε αποκλείσει ούτε καν την περίπτωση, περισσότερα P_i να περιγράφουν την ίδια διαδικασία ή ένα P_i να προκύπτει μέσω συνδυασμού άλλων διαδικασιών. Το τελευταίο είναι δυνατόν, αφού είναι δυνατόν ορισμένα αγαθά G_j να εισέρχονται στην κάθε διαδικασία P_i μόνον σε μια σταθερή αναλογία με ορισμένα άλλα. Αλλά και όταν δεν εμφανίζονται αυτές οι τετριμμένες περιστάσεις δύνανται, για λιγότερο άμεσους λόγους, να υπάρχουν περισσότερες λύσεις $x_1: \dots :x_m, y_1: \dots :y_n$. – Εν συγκρίσει προς αυτό είναι σημαντικό ότι τα α, β έχουν σε όλες τις λύσεις έχουν τις ίδιες τιμές. Δηλαδή τα α, β είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένα.

Θα δούμε μάλιστα ότι τα α και β δύνανται να προσδιοριστούν άμεσα με απλό τρόπο. (Παράβαλε τις §§ 10 και 11). Για να απλοποιήσουμε τις θεωρήσεις μας, υποθέτουμε ότι είναι πάντα

$$(9) \quad \alpha_{ij} + b_{ij} > 0$$

(φυσικά είναι πάντα $\alpha_{ij}, b_{ij} \geq 0$). Επειδή τα α_{ij}, b_{ij} επιτρέπεται να είναι όσο-δήποτε μικρά, αυτός ο περιορισμός δεν είναι πολύ εκτεταμένος. Αυτός ο περιορισμός είναι εν πάση περιπτώσει αναγκαίος για να εξασφαλιστεί το μονοσήμαντον των α, β , διότι διαφορετικά το W θα μπορούσε να διασπαστεί σε ανεξάρτητα μεταξύ τους μέρη. Αυτά όμως τα ζητήματα θέλουμε να εξετάσουμε με μια άλλη ευκαιρία.

Θεωρούμε τώρα μια (υποθετική) λύση x_i, α, y_j, β των (3) - (8').

Εάν είχαμε στην (7) πάντα $<$, τότε λόγω της (7') θα ίσχυε πάντοτε $y_j = 0$, σε αντίθεση με την (6). Εάν είχαμε στην (8) πάντα $>$, τότε θα ίσχυε, συνεπεία της (8') πάντοτε, $x_i = 0$, σε αντίθεση προς την (5). Επομένως: Στην (7) ισχύει πάντα το $\leq$ αλλά τουλάχιστον μία φορά το $=$, στην (8) πάντα το $\geq$, αλλά τουλάχιστον μία φορά το $=$. Συνεπώς ισχύει:

$$(10) \quad \alpha = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \left[\frac{\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i} \right],$$

$$(11) \quad \beta = \text{Max}_{i=1, \dots, m} \left[\frac{\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j} \right].$$

Έτσι τα α, β προσδιορίζουν τα x_i, y_j μονοσήμαντα. (Συνεπεία των (3) - (6) και (9), τα δεξιά σκέλη των (10), (11) δεν δύναται ποτέ να πάρουν την χωρίς νόημα μορφή $\frac{0}{0}$). Μπορούμε ως εκ τούτου να εκφράσουμε τις (7) + (7') και (8) + (8') ως συνθήκες μόνον για τα x_i, y_j :

(7*) Για κάθε $j = 1, \dots, n$, για το οποίο το

$$\frac{\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i}$$

δεν παίρνει την ελάχιστη τιμή του (όλων των $j = 1, \dots, n$), είναι $y_j = 0$.

(8*) Για κάθε $i = 1, \dots, m$, για το οποίο

$$\frac{\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j}$$

δεν παίρνει την μέγιστη τιμή του (όλων των $i = 1, \dots, m$), είναι $x_i = 0$.

(Στην (7*) πρέπει να θεωρούνται ως αμεταβλήτως δεδομένα τα $x_1, \dots, x_m$, στην (8*) τα $y_1, \dots, y_n$). Πρέπει, επομένως, να λύσουμε τις (3) - (6), (7*), (8*) ως προς x_i, y_j .

Συμβολίζουμε με X' μια σειρά μεταβλητών ($x'_1, \dots, x'_m$), η οποία πληροί τα ανάλογα των (3), (5)

$$(3') \quad x'_i \geq 0,$$

$$(5') \quad \sum_{i=1}^m x'_i > 0$$

και με Y' μια σειρά μεταβλητών ($y'_1, \dots, y'_n$), η οποία πληροί τα ανάλογα των (4), (6)

$$(4') \quad y'_j \geq 0,$$

$$(6') \quad \sum_{j=1}^n y_j > 0.$$

Περαιτέρω θέτουμε

$$(12) \quad \Phi(X', Y') = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x'_i y'_j}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_i y'_j}.$$

Έστωσαν $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ η (υποθετική) λύση και οι $X' = (x'_1, \dots, x'_m)$, $Y' = (y'_1, \dots, y'_n)$ ελευθέρως μεταβαλλόμενες, αλλά έτσι ώστε να πληρούνται οι (3) - (6) ή, αντιστοίχως, οι (3') - (6'), τότε, όπως εύκολα μπορεί κανείς να επαληθεύσει, οι (7*), (8*) δύνανται να διατυπωθούν ως εξής:

$$(7^{**}) \quad \text{Η } \Phi(X, Y') \text{ παίρνει για } Y = Y' \text{ την } Y' - \text{ελάχιστη τιμή της.}$$

$$(8^{**}) \quad \text{Η } \Phi(X', Y) \text{ παίρνει για } X' = X \text{ την } X' - \text{μέγιστη τιμή της.}$$

Συνεπώς το ζήτημα της επιλυσιμότητας των (3) - (8') μετατρέπεται στο ζήτημα της επιλυσιμότητας των (7**) - (8**) και αυτό το τελευταίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

(*) *Ας θεωρήσουμε την $\Phi(X', Y')$ στην περιοχή που οριοθετείται από τις (3') - (6'). Ζητάμε να βρούμε ένα σαγματικό σημείο $X' = X$, $Y' = Y$, δηλαδή ένα σημείο, στο οποίο η $\Phi(X, Y')$ έχει ένα Y' -ελάχιστο και ταυτοχρόνως η $\Phi(X', Y)$ έχει ένα X' -μέγιστο.*

Οι (7), (7*), (10) ή, αντιστοίχως, οι (8), (10), (11) δίνουν:

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \right] y_j}{\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i \right] y_j} = \Phi(X, Y)$$

ή, αντιστοίχως,

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j \right] x_i}{\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right] x_i} = \Phi(X, Y).$$

Δηλαδή:

(**) Στην περίπτωση που το πρόβλημά μας είναι επιλύσιμο, δηλαδή στην περίπτωση που η $\Phi(X', Y')$ κατέχει ένα σαγματικό σημείο (παράβαλε παραπάνω), τότε είναι:

$$(13) \quad \alpha = \beta = \Phi(X, Y) = \eta \text{ τιμή στο σαγματικό σημείο.}$$

Συνεπεία της ομογένειας της $\Phi(X', Y')$ (ως προς X', Y' , δηλαδή ως προς $x'_1, \dots, x'_m, y'_1, \dots, y'_n$) το πρόβλημά μας μένει ανεπηρέαστο, εάν αντικαταστήσουμε τις (5'), (6') (και αντιστοίχως τις (5), (6)) με τις τροποποιήσεις:

$$(5^*) \quad \sum_{i=1}^m x'_i = 1,$$

$$(6^*) \quad \sum_{j=1}^n y'_j = 1.$$

Αυτό θέλουμε να κάνουμε και ονομάζουμε S το X' -σύνολο που περιγράφεται από τις

$$(3') \quad x'_i \geq 0,$$

$$(5^*) \quad \sum_{i=1}^m x'_i = 1,$$

Το Y' -σύνολο που περιγράφεται από τις

$$(4') \quad y'_j \geq 0,$$

$$(6^*) \quad \sum_{j=1}^n y'_j = 1.$$

(Τα S, T είναι simplices $m-1$ ή, αντιστοίχως $n-1$, διαδικασιών).

Για να λύσουμε την (*)², επιστρέφουμε στην αμεσότερη διατύπωση των (7*), (8*), τις οποίες συνδυάζουμε με

2. Η επιλυσιμότητα του προβλήματός μας σχετίζεται κατά περίεργο τρόπο με εκείνο το εμφανιζόμενο πρόβλημα στη θεωρία των κοινωνικών παιγνίων, το οποίο ο συγγραφέας πραγματεύτηκε αλλού (Math. Annalen, 100, 1928, σελ. 295-320, ιδίως σελ. 305 και 307-311). Εκείνο το πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση του (*) και θα το επιλύσουμε με έναν νέο τρόπο παρεμπιμπτώντως μέσω της λύσης μας του (*) (παράβαλλε παρακάτω). Πράγματι

για $\alpha_{ij} = 1$ συνεπεία των (5*), (6*) είναι $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_{ij} y'_j = 1$ και ως εκ τούτου $\Phi(X', Y') =$

$$(3) \quad x_i \geq 0,$$

$$(4) \quad y_j \geq 0,$$

$$(5^*) \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

$$(6^*) \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1,$$

– δηλαδή τις συνδυάζουμε με το ότι το $X = (x_1, \dots, x_m)$ βρίσκεται στο S και το $Y = (y_1, \dots, y_n)$ βρίσκεται στο T .

7. Θα αποδείξουμε μια κάπως γενικότερη πρόταση:

Έστω R_m ο χώρος m -διαστάσεων όλων των σημείων $X = (x_1, \dots, x_m)$, R_n ο χώρος n -διαστάσεων των σημείων $Y = (y_1, \dots, y_n)$, R_{m+n} ο χώρος $m+n$ -διαστάσεων όλων των σημείων $(X, Y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$.

Ένα σύνολο (στον R_m ή R_n ή R_{m+n}), το οποίο δεν είναι κενό και είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο, το ονομάζουμε ένα σύνολο C .

Έστωσαν S^0, T^0 σύνολα C στον R_m ή, αντιστοίχως, στον R_n . Έστω $S^0 \times T^0$ το σύνολο όλων των (X, Y) (στον χώρο R_{m+n}), όπου το X διατρέχει ολόκληρο το S^0 και το Y σε ολόκληρο το T^0 . Έστωσαν W, V δύο κλειστά υποσύνολα του $S^0 \times T^0$. Για κάθε X στο S^0 έστω ότι το σύνολο $Q(X)$ όλων των Y με (X, Y) στο V είναι ένα σύνολο C , για κάθε Y στο T^0 έστω ότι το σύνολο $P(Y)$ όλων των X με (X, Y) στο W είναι ένα σύνολο C . Τότε ισχύει η **πρόταση**: Υπό τις παραπάνω παραδοχές τα V, W έχουν ένα (τουλάχιστον) κοινό σημείο.

Το πρόβλημά μας προκύπτει, εάν κανείς θέσει $S^0 = S$, $T^0 = T$, και $V =$ το σύνολο των $(X, Y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ που πληρούν την (7^*) , $W =$ το σύνολο όλων των $(X, Y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ που πληρούν την (8^*) . Εύκολα

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} x'_i y'_j \quad \text{και συνεπώς η δική μας } (*) \text{ συμπίπτει με loco citato, με αυτή της σελ. 307.}$$

(Τα δικά μας $\Phi(X', Y')$, b_{ij} , x'_i , y'_j , m , n αντιστοιχούν στα εκεί $h(\xi, n)$, α_{pq} , ξ_p , n_q , $M+1$, $N+1$). Είναι, κατά τα λοιπά, αξιοπρόσεκτο ότι μέσω της $(*)$ δεν οδηγούμαστε, όπως διαφορετικά στις πλείστες περιπτώσεις, σε ένα απλό πρόβλημα μεγίστου ή ελαχίστου, του οποίου η επιλυσιμότητα θα ήταν προφανής, αλλά σε ένα πρόβλημα σαγματικού σημείου ή του τύπου ελαχίστου-μεγίστου, στο οποίο το ζήτημα της επιλυσιμότητας βρίσκεται πολύ βαθύτερα.

διακρίνει κανείς ότι τα V, W είναι κλειστά και τα σύνολα $S^0 = S$, $T^0 = T$, $Q(X)$, $P(X)$, είναι όλα simplices, δηλαδή σύνολα C . Το κοινό σημείο αυτών των V, W είναι φυσικά η ζητούμενη λύση μας $(X, Y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$.

8. Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, έστω ότι τα S^0, T^0, V, W περιγράφονται όπως πριν στην πρόταση.

Θεωρούμε αρχικά το V . Για κάθε X του S^0 επιλέγουμε ένα σημείο $Y^0(X)$ από το $Q(X)$ (για παράδειγμα το κέντρο βάρους αυτού του συνόλου). Γενικά δεν θα είναι δυνατόν να επιλέξουμε το $Y^0(X)$ ως συνεχή συνάρτηση του X . – Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε

$$(14) \quad \omega^\varepsilon(X, X') = \text{Max}(0, 1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{ απόσταση}(X, X')).$$

Έστω τώρα Y^ε το κέντρο βάρους του $Y^0(X')$ με την συνάρτηση (σχετικού) βάρους $\omega^\varepsilon(X, X')$, όπου το X' διατρέχει ολόκληρο το S^0 . Δηλαδή: Εάν

$$Y^0(X) = (y_1^0(X), \dots, y_n^0(X)), Y^\varepsilon(X) = (y_1^\varepsilon(X), \dots, y_n^\varepsilon(X)),$$

τότε

$$(15) \quad y_j^\varepsilon(X) = \frac{\int_{S^0} \omega^\varepsilon(X, X') y_j^0(X') dX'}{\int_{S^0} \omega^\varepsilon(X, X') dX'}.$$

Συνάγουμε τώρα μια σειρά από ιδιότητες του $Y^\varepsilon(X)$, (ισχύουσες για όλα τα $\varepsilon > 0$):

(i) Το $Y^\varepsilon(X)$ βρίσκεται στο T^0 . Απόδειξη: Το $Y^0(X')$ βρίσκεται εντός του $Q(X')$, άρα εντός του T^0 , και επειδή το $Y^\varepsilon(X')$ είναι ένα κέντρον βάρους των σημείων $Y^0(X')$ και το T^0 είναι κυρτό, το Y^ε βρίσκεται επίσης εντός του T^0 .

(ii) Η $Y^\varepsilon(X)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του X (σε ολόκληρο το S^0). Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε αυτό, για κάθε $y_j^\varepsilon(X)$. Η $\omega^\varepsilon(X, X')$ είναι βέβαια μια συνεχής συνάρτηση των X, X' . Το $\int_{S^0} \omega^\varepsilon(X, X') dX'$ είναι πάντα > 0 . Και όλα τα $y_j^0(X)$ είναι φραγμένα (είναι συντεταγμένες σημείων του φραγμένου συνόλου S^0). Άρα από την (15) προκύπτει η συνέχεια της $y_j^\varepsilon(X)$.

(iii) Για 0 κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$, έτσι ώστε για $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ κάθε σημείο $(X, Y^\varepsilon(X))$ του V έχει μία απόσταση $< \delta$ από το V_0 . Απόδειξη:

Ας δεχτούμε το αντίθετο. Τότε θα υπήρχε ένα $\delta > 0$ και μια ακολουθία του $\varepsilon_n > 0$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, έτσι ώστε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ υπάρχει ένα X_n εντός του S^0 , για το οποίο το $(X_n, Y^{\varepsilon_n}(X_n))$ έχει μια απόσταση $\geq \delta$ από το V . A fortiori το $Y^{\varepsilon_n}(X_n)$ έχει μια απόσταση $\geq \delta/2$ από κάθε $Q(X')$ με απόσταση $(X_n, X') \leq \delta/2$.

Όλα τα X_n , $n = 1, 2, \dots$ βρίσκονται στο S^0 και ως εκ τούτου κατέχουν ένα σημείο συσσώρευσης X^* στο S^0 . Άρα υπάρχει μια μερική ακολουθία του X_n , $n = 1, 2, \dots$, η οποία συγκλίνει στο X^* και στην οποία ισχύει πάντα απόσταση $(X_n, X^*) \leq \delta/2$. Εάν αντικαταστήσουμε τα ε_n , X_n με αυτήν την μερική ακολουθία, τότε βλέπουμε ότι μας επιτρέπεται να δεχτούμε $\lim X_n = X^*$, απόσταση $X_n, X^* \leq \delta/2$. Συνεπώς δυνάμεθα για κάθε $n = 1, 2, \dots$ να θέσουμε $X' = X^*$, και έτσι έχουμε πάντα: το $Y^{\varepsilon_n}(X_n)$ έχει μια απόσταση $\geq \delta/2$ από το $Q(X^*)$.

Το $Q(X^*)$ είναι κυρτό και ως εκ τούτου το σύνολο όλων των σημείων με απόσταση $< \delta/2$ από το $Q(X^*)$ είναι κι αυτό κυρτό. Επειδή το $Y^{\varepsilon_n}(X_n)$ δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο και επειδή είναι ένα κέντρο βάρους σημείων $Y^0(X')$ με απόσταση $(X_n, X') \leq \varepsilon_n$ (διότι για απόσταση $(X_n, X') > \varepsilon_n$ είναι σύμφωνα με τη (14) $\omega(X_n, X') = 0$), γι' αυτό και όλα αυτά τα σημεία δεν ανήκουν στο εν λόγω σύνολο. Άρα υπάρχει ένα $X' = X'_n$, για το οποίο είναι η απόσταση $(X_n, X'_n) \leq \varepsilon_n$ και για το οποίο το $Y^0(X'_n)$ έχει μία απόσταση $\geq \delta/2$ από το $Q(X^*)$.

Επειδή $\lim X_n = X^*$ και $\lim \text{απόσταση}(X_n, X'_n) = 0$, είναι $\lim X'_n = X^*$. Όλα τα $Y^0(X'_n)$ ανήκουν στο T^0 , έχουν συνεπώς ένα σημείο συσσώρευσης Y^* . Έτσι το (X^*, Y^*) είναι ένα σημείο συσσώρευσης των $(X'_n, Y^0(X'_n))$ και επειδή όλα αυτά τα τελευταία ανήκουν στο V , αυτό το σημείο συσσώρευσης ανήκει στο V . Άρα το Y^* είναι στο $Q(X^*)$. Κάθε $Y^0(X'_n)$ έχει βέβαια μια απόσταση $\geq \delta/2$ από το $Q(X^*)$, συνεπώς και το σημείο συσσώρευσης Y^* επίσης. Αυτό είναι μια αντίφαση, και έτσι η απόδειξη δόθηκε.

Οι (i) - (iii) μαζί σημαίνουν: Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $Y_\delta(X)$ του S^0 σε ένα υποσύνολο του T^0 , όπου κάθε σημείο $(X, Y_\delta(X))$ έχει μια απόσταση $< \delta$ από το V . (Θέσε $Y_\delta(X) = Y^\varepsilon(X)$ με $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$).

9. Η αντιμετάθεση των S^0 και T^0 καθώς και των V και W δίνει τώρα: Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $X_\delta(Y)$ του T^0 σε ένα υποσύνολο του S^0 , όπου κάθε σημείο $(X_\delta(Y), Y)$ έχει μια απόσταση $< \delta$ από το W .

Εάν θέσουμε $f_\delta(X) = X_\delta(Y_\delta(X))$, τότε η $f_\delta(X)$ είναι μια συνεχής απει-

κόνιση του S^0 σε ένα υποσύνολο του S^0 . Επειδή το S^0 είναι ένα σύνολο C^3 , άρα τοπολογικά ένα simplex⁴, μπορούμε να εφαρμόσουμε τώρα την πρόταση του σταθερού σημείου του L. E. J. Brouwer⁵. Το $f_\delta(X)$ έχει ένα σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει ένα X^δ στο S^0 , για το οποίο $X^\delta = f_\delta(X^\delta) = X_\delta(Y_\delta(X^\delta))$. Έστω $Y^\delta = Y_\delta(X^\delta)$, τότε έχουμε $X^\delta = X_\delta(Y^\delta)$. Έτσι το σημείο (X^δ, Y^δ) στο R_{m+n} έχει αποστάσεις $< \delta$ τόσο από το V όσο και από το W . Συνεπώς τα V και W έχουν μια απόσταση $< 2\delta$.

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\delta > 0$, τα V, W έχουν απόσταση 0. Επειδή τα V, W είναι φραγμένα και κλειστά, πρέπει ως εκ τούτου να έχουν ένα κοινό σημείο. Για να είναι, η πρότασή μας απεδείχθη πλήρως.

10. Έτσι λοιπόν λύσαμε τις (7^*) , (8^*) της §4, συνεπώς και το ισοδύναμο πρόβλημα $(*)$ της §5 καθώς και το αρχικό πρόβλημα της §3: Την επίλυση των $(3) - (8')$. Σε περίπτωση που τα x_i, y_j , (τα οποία στις §§7-9 ονομάσαμε X, Y) είναι ορισμένα, τα α, β προκύπτουν από τη (13) στο $(**)$ στην §5. Ιδίως είναι $\alpha = \beta$.

Όπως τονίσαμε ήδη στην §4, δύνανται να υπάρξουν περισσότερες λύσεις x_i, y_j (δηλαδή X, Y), τώρα όμως θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μόνο μια τιμή του α (τουτέστιν του β). Έστω ότι οι $X_1, Y_1, \alpha_1, \beta_1$ και $X_2, Y_2, \alpha_2, \beta_2$ είναι πράγματι δύο λύσεις. Τότε προκύπτουν από τις $(7^{**}), (8^{**})$ και (13) :

$$\alpha_1 = \beta_1 = \Phi(X_1, Y_1) \leq \Phi(X_1, Y_2),$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \Phi(X_2, Y_2) \geq \Phi(X_1, Y_2),$$

συνεπώς $\alpha_1 = \beta_1 \leq \alpha_2 = \beta_2$. Για λόγους συμμετρίας είναι επίσης $\alpha_2 = \beta_2 \leq \alpha_1 = \beta_1$, άρα είναι $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2$.

Βλέπουμε λοιπόν:

Υπάρχει μια τουλάχιστον λύση X, Y, α, β . Για όλες τις λύσεις ισχύει

$$(1) \quad \alpha = \beta = \Phi(X, Y),$$

και έχει για όλες τις λύσεις την ίδια αριθμητική τιμή, με άλλα λόγια: Ο συντελεστής επιτοκίου και ο συντελεστής επέκτασης της Οικονομίας είναι μεταξύ

3. Στο πρωτότυπο: S_0 αντί S^0 – Σ.τ.Μ.

4. Σχετικά με αυτές καθώς και με άλλες χρησιμοποιηθείσες εδώ ιδιότητες των κυρτών συνόλων παράβαλε π.χ. P. Alexandroff und H. Hopf "Topologie", τόμος 1, J. Springer, Berlin 1935, σελ. 598-609.

5. Παράβαλε π.χ. ό.π. υποσημείωση 1, σελ. 480.

τους ίσοι και μονοσήμαντα προσδιορισμένοι δια των τεχνικά δυνατών διαδικασιών $P_1, \dots, P_m$.

Λόγω της (13) είναι $\alpha > 0$. Αλλά δύναται να είναι $\alpha \geq 1$. Θα όφειλε να αναμένει κανείς $\alpha > 1$, αλλά προφανώς δεν δύναται να αποκλεισθεί η περίπτωση $\alpha \leq 1$: στα πλαίσια της γενικής μας διατύπωσης του προβλήματος. Οι διαδικασίες δύνανται πράγματι να είναι *μη παραγωγικές*.

11. Επιθυμούμε να χαρακτηρίσουμε το α με δύο ακόμη ανεξάρτητους τρόπους.

Ας θεωρήσουμε πρώτον, μια κατάσταση της Οικονομίας, η οποία είναι από καθαρά τεχνική άποψη δυνατή και επεκτείνεται με τον συντελεστή α' ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή για τις εντάσεις $x'_1, \dots, x'_m$ ισχύει

$$(3') \quad x'_i \geq 0,$$

$$(5') \quad \sum_{i=1}^m x'_i > 0$$

και

$$(7'') \quad \alpha' \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x'_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x'_i.$$

Δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη τις τιμές. Έστωσαν $x_i, y_j, \alpha = \beta$ μια λύση του αρχικού μας προβλήματος των (3) - (8') της §3. Ο πολλαπλασιασμός της (7'') με y_j και η πρόσθεση $\sum_{j=1}^n$ δίνει:

$$\alpha' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_i y_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x'_i y_j,$$

συνεπώς $\alpha' \leq \Phi(X', Y)$. Λόγω των (8**) και (13) στην §5 είναι λοιπόν:

$$(15) \quad \alpha' \leq \Phi(X', Y') \leq \Phi(X, Y) = \alpha = \beta.$$

Ας θεωρήσουμε, δεύτερον, ένα σύστημα τιμών, στα πλαίσια του οποίου ο συντελεστής επιτοκίου δεν επιτρέπει πλέον κανένα κέρδος. Δηλαδή για τις τιμές $y'_1, \dots, y'_n$ ισχύει

$$(4') \quad y'_j \geq 0,$$

$$(6') \quad \sum_{j=1}^n y'_j > 0$$

και

$$(8'') \quad \beta' \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y'_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} y'_j.$$

Δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη τις εντάσεις παραγωγής. Έστωσαν $x_i, y_j, \alpha = \beta$ ως άνω. Πολλαπλασιασμός της (8'') με x_i και πρόσθεση $\sum_{i=1}^m$ δίνει:

$$\beta' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i y'_j \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y'_j,$$

συνεπώς $\beta' \geq \Phi(X, Y')$. Λόγω των (7**) και (13) στην §5 είναι λοιπόν:

$$(16) \quad \beta' \geq \Phi(X, Y') \geq \Phi(X, Y) = \alpha = \beta.$$

Αυτά τα δύο αποτελέσματα θα μπορούσαμε να τα διατυπώσουμε και ως εξής:

Ο μεγαλύτερος συντελεστής μεγέθυνσης α' της συνολικής Οικονομίας, ο οποίος είναι καθαρά δυνατός, είναι $\alpha' = \alpha = \beta$. Κατά αυτά δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη τις τιμές.

Ο χαμηλότερος συντελεστής επιτοκίου β' , με τον οποίο είναι δυνατό ένα σύστημα τιμών χωρίς κέρδη, είναι $\beta' = \alpha = \beta$. Κατά αυτά δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη τις εντάσεις παραγωγής.

Ας προσέξει κανείς, ότι αυτοί οι χαρακτηρισμοί κατέστησαν δυνατοί μόνον επί τη βάσει των γνώσεών μας για την ύπαρξη λύσεων του αρχικού προβλήματος – παρόλο που οι ίδιοι δεν αναφέρονται άμεσα στο πρόβλημά μας. Περαιτέρω η ισότητα του μεγίστου στην πρώτη μορφή και του ελαχίστου στη δεύτερη είναι αποδείξιμη μόνο επί τη βάσει αυτής της ύπαρξης.

