

Ανάπτυξη μαθηματικού μοντελού πρόβλεψης κατανομών της ροής του σπουδαστικού δυναμικού στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Του Δρος Λαζάρου ΒΡΥΖΙΔΗ
Καθηγητού Τ.Ε.Ι. Πειραιά

1. Εισαγωγή

Στη μελέτη αυτή εξετάζεται το πρόβλημα της ροής του σπουδαστικού δυναμικού των ΤΕΙ σε σχέση με την εσωτερική δομή του συστήματος και τη φύση του εξωτερικού περιβάλλοντος (αγορά εργασίας, ζήτηση για εκπαίδευση).

Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης είναι η πρόβλεψη της κατανομής των ποσοτικών μεγεθών ροής του σπουδαστικού δυναμικού του συστήματος για τα επόμενα δέκα χρόνια σχετικά με:

- Α. Την είσοδο των σπουδαστών στα ΤΕΙ από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
- Β. Τον αριθμό των σπουδαστών σε κάθε έτος σπουδών.
- Γ. Τον αριθμό των πτυχιούχων κάθε ακαδημαϊκού έτους.

Οι προβλέψεις αυτές γίνονται με τη βοήθεια μαθηματικού στοχαστικού μοντέλου επεξεργασμένου σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή (Η/Υ) για κάθε ακαδημαϊκό έτος με δεδομένα:

- Α. Τη σημερινή εσωτερική δομή των σχολών.
- Β. Τη σχεδιαζόμενη αναδιοργάνωσή τους σχετικά με τη μείωση ή αύξηση του σπουδαστικού δυναμικού.

Ειδικότερα, το μαθηματικό μοντέλο, που χρησιμοποιήθηκε, βασίζεται στη θεωρία των Μαρκοβιανών ανελίξεων και χαρακτηρίζεται από το γεγονός, ότι οι διάφορες παράμετροι, που ελέγχουν την είσοδο-έξοδο των σπουδαστών στο σύστημα και τη ροή διά μέσου του συστήματος, είναι τυχαίες, στοχαστικές, μεταβλητές.

Για την επεξεργασία του μοντέλου συγκεντρώθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στατιστικά στοιχεία από το Τμήμα Ηλεκτρονικών των ετών 1989-1998.

Σε ό,τι ακολουθεί αναπτύσσεται πρώτα το στοχαστικό μοντέλο, αναφέρεται η σχετική θεωρία, που αφορά στη λύση του και τελικά εφαρμόζεται το μοντέλο με τη βοήθεια προγράμματος σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή.

2. Ανάπτυξη Μαθηματικού Μοντέλου

Το Μαθηματικό Μοντέλο, που θα αναπτυχθεί μπορεί να εφαρμοσθεί σε κάθε διαδικασία εξέλιξης προσωπικού ή σπουδαστών με συγκεκριμένους κανόνες.¹

Συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν:

a_i : ($i = 1, 2, \dots, n$) αριθμός προσώπων, που βρίσκονται στη i -θέση (π.χ. i -τάθη, i -βαθμό κ.λ.).

a_0 : Ο αριθμός των προσώπων, που πρέπει να εισαχθούν ή να προσληφθούν στην παραγωγική διαδικασία τον επόμενο χρόνο.

$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$: Ο αριθμός προσώπων, που δεν θα υπηρετούν στο επόμενο έτος διότι έχουν διαγραφεί ή αποσυρθεί ή έχουν πεθάνει.

T : Όλος ο αριθμός του προσωπικού, που βρίσκεται στην παραγωγική διαδικασία (π.χ. όλοι οι σπουδαστές μίας Σχολής).

δT : Αύξηση του ποσοστού, που θέλουμε για το προσωπικό στον επόμενο χρόνο.

P_{rs} : Πιθανότητα ότι ένα πρόσωπο από τη r -θέση θα πάει στη s -θέση.

W_r : Πιθανότητα, ότι ένα πρόσωπο στη θέση r δεν θα υπηρετεί τον επόμενο χρόνο (ένας σπουδαστής στη r -τάξη διαγράφεται).

P_{0s} : Η πιθανότητα, ότι ένα πρόσωπο όταν προσληφθεί να πάει στη s -θέση. (Η αρχική κατάταξη σπουδαστών στα διάφορα έτη).

Από τους συμβολισμούς αυτούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\sum_{s=1}^{n+3} P_{rs} = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{s=n+1}^{n+3} P_{rs} = w_r \text{ για κάθε } r$$

Επίσης, ο συνολικός αριθμός των ατόμων που αποσύρονται τον επόμενο χρόνο είναι:

$$\sum_{r=1}^n w_r a_r$$

Ο συνολικός αριθμός προσλήψεων που θα καλύψουν τις κενές θέσεις, που δημιουργήθηκαν από την αποχώρηση συν το ποσοστό αύξησης που θέλουμε (ή μείωση) θα είναι:

$$a_0 = \sum_{r=1}^n w_r a_r + \delta T$$

Παίρνω τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0n} & 0 & 0 & 0 \\ P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} & P_{1\ n+1} & P_{1\ n+2} & P_{1\ n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} & P_{n\ n+1} & P_{n\ n+2} & P_{n\ n+3} \end{bmatrix}$$

1. Η ανάπτυξη του Μοντέλου θα μας δώσει έναν επαναληπτικό τύπο $a' = Q^T \cdot a + \delta T \cdot R$ με μορφή πινάκων όπου a : η νέα κατάσταση, a : η σημερινή κατάσταση, δT : Αύξηση ή Μείωση.

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad a' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a'_n \\ a'_{n+1} \\ a'_{n+2} \\ a'_{n+3} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας a' μας δείχνει την κατάσταση του επόμενου έτους.
Τότε θα ισχύει η θέση:
 $a' = p^T a$, p^T : Ανάστροφος πίνακας του P

Δηλαδή έχουμε:

$$a = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a'_n \\ a'_{n+1} \\ a'_{n+2} \\ a'_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{01} & p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ p_{02} & p_{12} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{0n} & p_{1n} & \cdots & p_{nn} \\ 0 & p_{1n+1} & \cdots & p_{nn+1} \\ 0 & p_{1n+2} & \cdots & p_{nn+2} \\ 0 & p_{1n+3} & \cdots & p_{nn+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

Οι πιθανότητες $P_{0n+1}, P_{0n+2}, P_{0n+3}$ είναι μηδέν γιατί κανείς νέος εισαχθείς δεν αποσύ-
ρεται αμέσως.
Η παραπάνω μέθοδος δίνει μία πρώτη μέθοδο υπολογισμού της κατάστασης στον ε-
πόμενο χρόνο.
Ο πίνακας P βλέπουμε, ότι δεν είναι τετραγωνικός και η χρησιμοποίησή του για τον υ-
πολογισμό των a_i στη λύση των εξισώσεων παρουσιάζει πολλές δυσκολίες. Θα προσπα-
θήσουμε να παρακάμψουμε τις δυσκολίες.

Παίρνω τις πιθανότητες

$$q_{rs} = p_{rs} + W_r P_{0s}$$

φτιάχνω τον πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Θεωρώ τους πίνακες

$$R = \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{0n} \end{bmatrix} \quad \text{και } a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{πίνακες δεδομένων})$$

Τότε οι νέες τιμές σε κάθε θέση $i = 1, 2, \dots, n$ θα δίδονται από τον επαλυπτικό τύπο

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} + \delta T \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{0n} \end{bmatrix}$$

δηλαδή $\alpha' = Q^T a + \delta T \cdot R$

ο παραπάνω τύπος δίνει μία επαλυπτική μέθοδο υπολογισμού των νέων τιμών a_i .

3. Στοιχεία και Προτάσεις για την Επεξεργασία του Μοντέλου

Για την επεξεργασία του Μοντέλου χρειάζεται να αναπτύξουμε τον επαναληπτικό τύπο

$$\alpha' = Q^T \cdot a + \delta T \cdot R$$

έτσι, ώστε με $\delta T = 0$, $\delta T = e$ σταθερό και $\delta T = e^{-x_i}$ εκθετική μορφή να μπορούμε να πάρουμε τις νέες τιμές, που προκύπτουν από τη συγκεκριμένη πρόβλεψη την επόμενη δεκαετία.

Α. Χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα Q

$$\text{Έστω } Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ένας πίνακας } n \times n$$

θεωρώ τον πίνακα $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & n \end{bmatrix}$ τάξεως $n \times n$

Τότε ο πίνακας $Q-\lambda I$ καλείται χαρακτηριστικός πίνακας του Q και η ορίζουσα $|Q-\lambda I|$ χαρακτηριστική ορίζουσα.

Το σύστημα $(Q-\lambda I) x = 0$ όπου $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ καλείται
χαρακτηριστικό του πίνακος Q .

Θεωρώ την εξίσωση $|Q-\lambda I| = 0$ οι τιμές του λ που προκύπτουν από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης καλούνται χαρακτηριστικές ρίζες ή τιμές του πίνακα Q . Σε κάθε τιμή του λ προκύπτει μία λύση για το σύστημα $(Q-\lambda I) x = 0$ που καλείται χαρακτηριστικό διάνυσμα της τιμής λ .

Έστω Q ο πίνακας, που προκύπτει από τα στοιχεία, που έχουμε και έχει χαρακτηριστικές ρίζες λ_i με αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα u_i .

B. Προτάσεις βοηθητικές

Πρόταση 1. Ο πίνακας Q έχει τουλάχιστον μία χαρακτηριστική ρίζα ίση με ένα.

απόδειξη

Έχω
$$\sum_{s=1}^n q_{rs} = \sum_{s=1}^n p_{rs} + w_r \sum_{s=1}^n p_{0s} =$$
$$= \sum_{s=1}^n p_{rs} + w_r = \sum_{s=1}^{n+3} p_{rs} = 1$$

Επομένως, εάν προσθέσουμε όλες τις στήλες της ορίζουσας $|\lambda I - Q|$ παίρνουμε $(1-\lambda)$ σαν ένα στοιχείο της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Άρα $\lambda=1$ είναι μία χαρακτηριστική ρίζα του Q .

Πρόταση 2. Κάθε χαρακτηριστική ρίζα του Q ικανοποιεί την ανισότητα

$$\min_i |2q_{ii}-1| \leq |\lambda| \leq 1$$

απόδειξη

Από το θεώρημα Frobenius έχω

$$|\lambda|_{\max} \leq \max_i \sum_j |q_{ij}|$$

επειδή όλα τα $q_{ij} \geq 0$ έχω $|\lambda|_{\max} \leq \max_i \sum_j q_{ij} \leq 1$ από το ίδιο θεώρημα

$$|\lambda|_{\min} \geq \min_i (|\sum_j q_{ij}| - \sum_j |q_{ij}|) \geq \min_i |q_{ii} - (1 - q_{ii})| \geq \min_i |2q_{ii} - 1|$$

Άρα έχω $\min_i |2q_{ii}-1| \leq |\lambda| \leq 1$

Γ. Λύση της Δ.Ε. $a' = Q^T a + \delta T \cdot R$

Θεωρώ τον πίνακα E με την ιδιότητα $a' = E a'$ τότε η εξίσωση $a' = Q^T a + \delta T \cdot R$ γράφεται

$$(E - Q^T) a = \delta T \cdot R$$

Έστω $a^{(0)}$: είναι η τιμή του a τη χρονική στιγμή

Γνωρίζουμε το $a^{(0)}$: η κατανομή του προσωπικού (σπουδαστών) στο χρόνο $t=0$.

Έστω u_j τα χαρακτηριστικά διανύσματα του Q^T , τότε έχω

$$a^{(0)} = \sum_{j=1}^n a_j u_j \text{ και } R = \sum_{j=1}^n b_j u_j$$

όπου a_j και b_j γνωστές σταθερές.

Η λύση της $(E - Q^T) a^{(t)} = \delta T \cdot R$ όταν $\delta T = 0$

(στην περίπτωση που δεν προσλαμβάνεται επί πλέον προσωπικό) είναι

$$a^{(t)} = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j^t u_j$$

και επειδή όλα τα $|\lambda_j| \leq 1 \forall_j$ και ένα τουλάχιστον $\lambda_j = 1$

τότε

$$\lim_{L \rightarrow \infty} a^{(t)} = a_i u_i$$

όπου u_i είναι το χαρακτηριστικό διάνυσμα, που αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική ρίζα, που είναι ίση με μονάδα. Επίσης, οι συνήθεις χαρακτηριστικές ρίζες οδηγούν σε όρους της μορφής

$$e^{-kt} (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)$$

με $k \geq 0$ και $|\lambda| \geq \min |2q_{ii} - 1|$ έτσι έχουμε ένα μόνιμο υπολογισμό του χρόνου που έκανε το $a^{(t)}$ για να φθάσει το $a^{(\infty)}$ σε μία διδόμενη ακρίβεια.

Η λύση της $(E - Q^T) a^{(t)} = \delta T R$ όταν δT δεν είναι μηδέν είναι τυπικά

$$a^{(t)} = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^t u_j + (E - Q^T)^{-1} \delta T R$$

όπου C_j αυθαίρετες σταθερές.

Δ. Λύση σε διάφορες περιπτώσεις του δT

i) $\delta T = A e^{-\mu t}$

έχω, ότι $E e^{-\mu t} = e^{-\mu} e^{-\mu t}$ επομένως

$$a^{(t)} = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j^t u_j + A e^{-\mu t} \{ 1 + Q^T e^{\mu} + (Q^T e^{\mu})^2 + \dots + (Q^T e^{\mu})^{t-1} \} R$$

και χρησιμοποιώντας τη

$$Q^T R = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j u_j \text{ έχω}$$

$$a^{(t)} = \sum_{j=1}^n \left\{ a_j \lambda_j^t + \frac{A e^{-\mu} b_j (e^{-\mu t} - \lambda_j^t)}{(e^{-\mu} - \lambda_j)} \right\} u_j$$

όταν $t \rightarrow \infty$ και επειδή $\mu > 0$ έχω

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t)} = \left\{ a_1 - \frac{A e^{-\mu} b_1}{(e^{-\mu} - 1)} \right\} u_1$$

ii) $\delta T = C$: σταθερό

Σ' αυτές τις περιπτώσεις η λύση βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο, όπως στην περίπτωση (i) για να είναι:

$$a^{(t)} = (a_1 + c b_1 t) u_1 + \sum_{j=2}^n \left\{ a_j \lambda_j^t + \frac{c b_j (1 - \lambda_j^t)}{(1 - \lambda_j)} \right\} u_j$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t)} = (a_1 + c b_1 t) u_1 + \sum_{j=2}^n \frac{c b_j}{1 - \lambda_j} u_j$$

Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε λύσεις για άλλες μορφές του δT αλλά οι δύο διδόμενες περιπτώσεις είναι οι πιο κοινές στις πρακτικές εφαρμογές.

4. Εφαρμογή

Το τμήμα Ηλεκτρονικών λειτουργεί ως μονάδα ενταγμένη στο ΤΕΙ-ΠΕΙΡΑΙΑ. Τα έτη σπουδών είναι τρία: Η εισαγωγή σπουδαστών γίνεται στο πρώτο έτος. Για την απόκτηση πτυχίου οι σπουδαστές πρέπει να περάσουν επιτυχώς τα μαθήματα του τρίτου έτους και να παρουσιάσουν μία πτυχιακή εργασία επιτυχώς. Συγκεντρώθηκαν στοιχεία από το αρχείο της σχολής από το 1989 έως το 1998.

Τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν δίδονται στο Παράρτημα Ι και αφορούν τον αριθμό των σπουδαστών στο Α', Β', Γ' έτος, στο πτυχίο, και τους πτυχιούχους.

Τα στοιχεία αυτά επεξεργάστηκα με τη βοήθεια προγράμματος σε γλώσσα FORTRAN σε Ηλεκτρονικό Υπολογιστή για εφαρμογή του μαθητικού στοχαστικού μοντέλου, που προβλέπει την μελλοντική κατάσταση της σχολής στα επόμενα δέκα χρόνια.

Χρησιμοποιήθηκαν δύο εναλλακτικές υποθέσεις:

A. Δεν αυξάνεται ο αριθμός εισαγόμενων.

B. Ο αριθμός εισαγόμενων αυξάνει κατά 10%.

Στο παράρτημα ΙΙ δίδονται οι προβλέψεις για τα έτη 1999-2008 υποθέτοντας, ότι ο αριθμός σπουδαστών, που εξέρχονται από τη σχολή (διεγράφησαν, διέκοψαν, πήραν πτυχίο) είναι ίσος με τον αριθμό των εισαγόμενων σπουδαστών.

Στο Παράρτημα ΙΙΙ δίδονται οι προβλέψεις για τα ίδια έτη με την υπόθεση ότι ο αριθμός των εισαγόμενων αυξάνεται κατά 10% σε σχέση με τον αριθμό εξερχομένων από τη σχολή. Αναλυτικότερα το πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN για τον υπολογισμό των προβλέψεων εκτελεί τις παρακάτω εργασίες:

I. Διαβάζει και τυπώνει τα δεδομένα στο παράρτημα Ι.

II. Υπολογίζει το μέσο αριθμό σπουδαστών στα: Α', Β', Γ' έτος, στο πτυχίο και των πτυχιούχων το χρόνο.

III. Υπολογίζει τις πιθανότητες μεταπηδήσεως από το ένα έτος στο άλλο, δηλαδή τις πιθανότητες του πίνακα P ήτοι,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

όπου p_{ij} η πιθανότητα μεταπηδήσεως από το i-έτος στο j-έτος.

Εδώ οι πιθανότητες P_{11} , P_{22} είναι οι πιθανότητες παραμονής στο Α', και Β^{ον} έτος, η πιθανότητα p_{33} είναι η πιθανότητα παραμονής στο πτυχίο οι πιθανότητες $P_{21} = P_{31} = P_{32} = 0$ διότι κανένας σπουδαστής δεν υποβιβάζεται από το έτος που βρίσκεται σε προηγούμενο έτος.

IV) Υπολογίζει τις πιθανότητες W_i , $i = 1, 2, 3$ όπου

W_1 : η πιθανότητα διαγραφής από το Α' έτος

W_2 : η πιθανότητα διαγραφής από το Β' έτος

W_3 : η πιθανότητα απόκτησης πτυχίου

V) Υπολογίζει τις πιθανότητες κατάταξης των σπουδαστών στα διάφορα έτη.

Στο παράδειγμα υποθέτουμε, ότι όλοι οι σπουδαστές εισέρχονται στο πρώτο έτος δηλαδή $p_{01} = 1, p_{02} = 0, p_{03} = 0$.

VI) Υπολογίζει τον πίνακα Q όπου:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

Μετά τον υπολογισμό του πίνακα Q με το πρόγραμμα υπολογίζει δύο ειδών αποτελέσματα με τη βοήθεια των επαναληπτικών τύπων.

$$a = Qa \quad (\alpha' \text{ εναλλακτική υπόθεση})$$

$$a = Qa + \delta TR, R = \begin{bmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \end{bmatrix} \quad (\beta' \text{ εναλλακτική υπόθεση})$$

Αναλυτικότερα στην (α' εναλλακτική υπόθεση) δεν προβλέπεται αύξηση του αριθμού εισαγόμενων σπουδαστών, δηλαδή ο αριθμός των σπουδαστών, που εισάγονται στη σχολή είναι ίσος με τον αριθμό σπουδαστών που εξέρχονται από τα διάφορα έτη. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Παράρτημα I και αφορούν την μελλοντική κατάσταση της σχολής για τα έτη 1989-1988.

Στη β' εναλλακτική υπόθεση προβλέπεται αύξηση του αριθμού εισαγόμενων κατά $\Delta T=10\%$ σε σχέση με τον αριθμό των εξερχομένων από τη σχολή. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Παράρτημα III για την μελλοντική κατάσταση της σχολής στα έτη 1981-1990.

Συμπεράσματα: Μελετώντας τη μέθοδο και την εφαρμογή στο Παράρτημα I βλέπουμε, ότι το σύστημα, που εφαρμόζουμε σήμερα στα ΤΕΙ συσσωρεύει το σπουδαστικό δυναμικό μετά το πτυχίο, διαχρονικά παρατηρείται κάποια ισορροπία. Η έξοδος των σπουδαστών δεν πραγματοποιείται στον κανονικό χρόνο και ως εκ τούτου το κόστος εκπαίδευσης για κάθε σπουδαστή μειώνεται λόγω της εν λόγω καθυστέρησης.

Βιβλιογραφία

1. ΚΑΚΟΥΛΟΥ Θ.: Στοιχεία στοχαστικών ανελίξεων. Αθήνα, 1972.
2. FISZ, M.: Probability and Mathematical Statistics. J. Wiley, New York, 1963.
3. PRABHU, N.U.: Stochastic Processes, Macmillan, N. York, 1965.
4. ΚΑΚΟΥΛΟΥ Θ.: Στατιστική, Αθήνα, 1972.
5. ΠΑΣΣΙΑΣ Ι.: Θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής. Αθήνα, 1992.
6. G.W. FREUND & F.J. WILLIAMS: Elementary Business Statistics: The Modern Approach. N. Jersey, 1982.
7. ΚΙΟΧΟΥ Π.: Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα. Αθήνα, 1986.
8. SAUL I. GASS: Γραμμικός προγραμματισμός. Αθήνα, 1974.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πρόγραμμα σε γλώσσα FORTRAN για την εφαρμογή

```

1      DIMENSION Q(4,4),P(4,4),A(10,10),T(10),ST(10),B(10),W(4),R(4),
1      1  E(10,10),C(4),C(10,10),M(10),N(10),TS(10),SP(10),L(10)
2      INTEGER A,T,ST,E,M,N,C,TS,SP
3      CALL PGMIN (ID,LU,MN,NP)
4      WRITE (LU,10)
5      10 FORMAT(8(*1234567890*))
6      READ(LU,1) ((E(I,J),J=1,5),I=1,10)
7      1  FORMAT (514)
8      DO 20 J=1,3
9      R(J)=0.
10     DO 30 I=1,10
11     B(J)=B(J)+E(I,J)
12     30 CONTINUE
13     B(J)=B(J)/(11-J)
14     20 CONTINUE
15     DO 40 J=4,5
16     B(J)=0.
17     DO 50 I=1,10
18     B(J)=B(J)+E(I,J)
19     50 CONTINUE
20     B(J)=B(J)/8.
21     40 CONTINUE
22     G(1)=(B(1)*10-E(10,1))/9.
23     G(2)=(B(2)*9-E(10,2))/8.
24     P(1,1)=0.
25     P(1,2)=B(2)/G(1)
26     P(1,3)=0.
27     P(2,1)=0.
28     P(2,2)=0.
29     P(2,3)=B(3)/G(2)
30     P(3,1)=0.
31     P(3,2)=0.
32     P(3,3)=1.-(B(5)/B(4))
33     W(1)=1.-P(1,2)
34     W(2)=1.-P(2,3)
35     W(3)=1.-P(3,3)
36     R(1)=1.
37     R(2)=0.
38     R(3)=0.
39     L(1)=B(1)
40     L(2)=B(2)
41     L(4)=B(4)

```

```

42      DO 60 I=1,3
43      DO 70 J=1,3
44      Q(I,J)=P(I,J)+W(I)*R(J)
45      70 CONTINUE
46      60 CONTINUE
47      DO 80 K=1,10
48      DO 90 I=1,3
49      P1=Q(1,I)*B(1)+Q(2,I)*B(2)+Q(3,I)*B(4)
50      A(I,K)=IFIX(P1)
51      90 CONTINUE
52      B(1)=A(1,K)
53      B(2)=A(2,K)
54      B(4)=A(3,K)
55      P3=1.1*B(1)
56      C(1,K)=IFIX(R3)
57      DO 95 J=2,3
58      R2=Q(1,J)*L(1)+Q(2,J)*L(2)+Q(3,J)*L(4)
59      C(J,K)=IFIX(R2)
60      95 CONTINUE
61      L(1)=1.1*B(1)
62      L(2)=C(2,K)
63      L(4)=C(3,K)
64      T1=A(2,K)*B(2,3)
65      T(K)=IFIX(T1)
66      ST1=A(3,K)*W(3)
67      ST(K)=IFIX(ST1)
68      T2=C(2,K)*P(2,3)
69      TS(K)=IFIX(T2)
70      ST2=C(3,K)*W(3)
71      SP(K)=IFIX(ST2)
72      B(1)=A(1,K)
73      B(2)=A(2,K)
74      B(4)=A(3,K)
75      M(K)=1970+K
76      N(K)=1980+K
77      80 CONTINUE
78      WRITE(12,9)
79      WRITE(12,2)
80      WRITE(12,7)
81      WRITE(12,3)
82      WRITE(12,7)
83      WRITE(12,5) (M(I),(E(I,J),J=1,5),I=1,10)
84      WRITE(12,8)
85      WRITE(12,4)
86      WRITE(12,7)
87      WRITE(12,3)

```

```

88      WRITE(12,7)
89      WRITE(12,5) (N(K),A(1,K),A(2,K),T(K),A(3,K),ST(K),K=1,10)
90      WRITE(12,8)
91      WRITE(12,6)
92      WRITE(12,7)
93      WRITE(12,3)
94      WRITE(12,7)
95      WRITE(12,5) (N(K),C(1,K),C(2,K),TS(K),C(3,K),SP(K),K=1,10)
96      2  FORMAT(19X,9HKATASTASH,SX,10HSPOUDASTON,3X,3HTHS,3X,6HSX
          3X,17H1971-80)
97      3  FORMAT(20X,4HETOS,6X,6HA-ETOS,6X,6HB-ETOS,5X,6HC-ETOS,7X,
97      110HEPI-PTYXIO,6X,10HPTYXIOYXOI)
98      4  FORMAT(19X,12HPPROBLEPOMENH,3X,9HKATASTASH,3X,
          10HSPOYDASTON,3X,16SXOLIS)
99      5  FORMAT(19X,14,7X,14,7X,14,7X,14,10X,14,10X,14//)
100     6  FORMAT(19X,12HPROBLEPOMENH,3X,9HKATASTASH,3X,10HSPOYDAS
          3X16HSXOLHS,3X,2HME,3X,6HAYXHSH,3X,3H10Ω)
101     7  FORMAT(15X,80(*-*)//)
102     8  FORMAT(1H1,20X,23H A P O T E L E S M A T A ///)
103     9  FORMAT(15X,15H D E D O M E N A ///)
104     STOP
105     END

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

DEDOMENA

KATASTASH SPOYDASTON THS SXOLIS 1989-98					
ETOS	A-ETOS	B-ETOS	C-ETOS	EPI-PTYXIO	PTYXIOYXOI
1989	229	0	0	0	0
1990	292	187	0	0	0
1991	297	248	177	177	38
1992	230	226	188	327	73
1993	156	168	212	466	95
1994	158	140	160	531	97
1995	175	144	118	552	96
1996	194	155	113	569	105
1997	181	162	123	587	103
1998	180	167	141	625	106

ΑΡΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

PROBLEPOMENH KATASTASH SPOYDASTON SXOLIS					
ETOS	A-ETOS	B-ETOS	C-ETOS	EPI-PTYXIO	PTYXIOYXOI
1999	148	174	149	543	100
2000	149	123	105	591	109
2001	151	124	106	587	109
2002	151	126	108	584	108
2003	150	126	108	583	108
2004	150	125	107	583	108
2005	150	125	107	582	108
2006	150	125	107	581	108
2007	150	125	107	580	107
2008	149	125	107	579	107

ΑΡΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

PROBLEPOMENH KATASTASH SPOYDASTON SXOLHS ME AYXHSH 10%					
ETOS	A-ETOS	B-ETOS	C-ETOS	EPI-PTYXIO	PTYXIOYXOI
1999	162	174	149	542	100
2000	163	135	116	591	109
2001	166	136	117	597	111
2002	166	138	118	603	112
2003	165	138	118	609	113
2004	165	137	118	617	114
2005	165	137	118	617	114
2006	165	137	118	620	115
2007	165	137	118	622	115
2008	163	137	118	624	116