

# ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΩΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΥΠΟ

Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ

## Ι. Γενικά

1. Ἀπὸ τοῦ 1920 καὶ ἐντεῦθεν ἡ Στατιστικὴ Ἐπιστὴμη ἐπραγματοποίησε τεραστίας προόδους ὀφειλομένας κυρίως εἰς τοὺς Ἀγγλους καὶ Ἀμερικανούς, μεταξὺ ὧν περιλαμβάνον θέσιν καταλαμβάνουσιν οἱ Karl Pearson καὶ R. A. Fisher. Ταύτοχρόνως ὁμοίως καὶ παραλλήλως, αὕτη ἐπωφελεῖτο τῶν ἐργασιῶν τῶν Γάλλων καὶ Ρώσων μαθηματικῶν, οἵτινες ἀνέπτυξαν τὸν κλασσικὸν λογισμὸν τῶν πιθανοτήτων, εἰς καθαρὰν μαθηματικὴν θεωρίαν ἱκανοποιουσαν τὰς νεωτέρας ἀντιλήψεις, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀκρίβειαν.

2. Ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω προϋποθέσεις δύναται ἤδη νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ Στατιστικὴ ἀσχολεῖται ἐπὶ τῶν δεδομένων ἐκείνων ἅτινα προκύπτουσιν δι' ἀριθμῆσεως ἢ μετρήσεως τῶν ἰδιοτήτων πληθυσμῶν, τούτέστι συνόλων φυσικῶν φαινομένων, τῶν τελευταίων περιλαμβανόντων ὅλα τὰ συμβαίνοντα εἰς τὸν ἐξωτερικὸν κόσμον, ἀσχέτως ἂν ταῦτα ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης βουλῆσεως ἢ ὄχι.

3. Ἐπομένως θεμελιώδης ἔννοια ἐν τῇ Στατιστικῇ τυγχάνει ἡ ἔννοια τῆς ὁμάδος ἢ συνόλου, δι' ἣν χρησιμοποιεῖται ὁ εἰδικὸς ὅρος: Πληθυσμός. Ὁ ὅρος οὗτος χρησιμοποιεῖται γενικῶς διὰ νὰ δηλώσῃ συλλογὴν τινὰ ἀντικειμένων, ἐμψύχων ἢ ἀψύχων ἢ καὶ ἰδεῶν ἀκόμη, μετὰ κοινὴν ἔννοιαν δι' ὅλα τὰ ἀντικείμενα, τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου.

Σημειωτέον ὅτι ἡ Στατιστικὴ ἀσχολεῖται μὲ μόνας τὰς ιδιότητες τῶν πληθυσμῶν καὶ οὐχὶ μὲ αὐτὰ ταῦτα τὰ πράγματα μεμονωμένως ἢ καὶ ἀθρόως λαμβανόμενα.

4. Φανερόν εἶναι ὅτι εἰς τὰ ποικίλα πεδία τῆς πρακτικῆς καὶ ἐπιστημονικῆς δραστηριότητος, περιπτώσεις δύνανται νὰ ἐμφανισθῶσιν ὅπου τὰ πειράματα ἢ αἱ παρατηρήσεις δύνανται νὰ ἐπαναληφθῶσιν εἰς μέγαν ἀριθμὸν ὑπὸ ὁμοίας περιστάσεις. Εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ἡ προσοχὴ ἡμῶν κατευθύνεται πρὸς τὸ ἐξαγόμενον τῆς παρατηρήσεως, ὅπερ ἐκφράζεται διὰ τινος ἀριθμοῦ χαρακτηριστικῶν γνωρισμάτων. Εἰς πλείστας περιπτώσεις τὰ ὡς εἴρηται χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα λαμβάνουσι ποσοτικὴν μορφήν, ὅτε ἐκάστη παρατήρησις μετρεῖται ἢ ἀριθμεῖται. Εἰς ἄλλας ὁμοίως τὰ χαρακτηριστικὰ

εἶναι ποιοτικά, ὡς ἡ ἐμφάνισις ἢ μὴ ὠρισμένου γεγονότος συνεχόμενου πρὸς τὸ ὑπ' ὄψει πείραμα. Ἐξυπακούεται ὅτι κατὰ τὴν τελευταίαν περίπτωσιν εἶναι πάντοτε δυνατόν νὰ ἐκφράσωμεν τὰ χαρακτηριστικὰ ὑπὸ ἀριθμητικὴν μορφήν, συμμόρφως πρὸς τι συμβατικὸν σύστημα ταυτοποιήσεως τούτου.

6. Εἷς τινὰς περιπτώσεις, ἐπίσης, γνωρίζομεν ἐπαρκῶς τὸ ὑπὸ ἔρευναν φαινόμενον, οὕτως ὥστε νὰ διενεργήσωμεν ἐπακριβῶς προβλέψεις ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐξαγόμενον ἐκάστης ἀτομικῆς παρατηρήσεως. Τοῦτο παρατηρεῖται κυρίως εἰς τὰς προβλέψεις ἀστρονομικῶν φαινομένων, ὡς αἱ ἐκλείψεις τοῦ ἡλίου διὰ δεδομένον τρόπον παρατηρήσεως. Ὅμοια κατάστασις προκύπτει εἰς κάθε περίπτωσιν καθ' ἣν ὑποτίθεται ὅτι οἱ ἰθύνοντες τὸ φαινόμενον νόμοι εἶναι γνωστοί καὶ ὅταν οὗτοι εἶναι ἐπαρκῶς ἀπλοῖ διὰ νὰ χρησιμοποιηθῶσι διὰ πρακτικοὺς ὑπολογισμούς.

7. Εἷς τὴν πλειονότητα ὁμῶς τῶν περιπτώσεων ἡ γνώσις ἡμῶν δὲν εἶναι ἀρκούντως ἀκριβὴς διὰ νὰ ἐπιτρέψῃ ἀκριβεῖς προβλέψεις τῶν ἐξαγομένων ἀτομικῶν παρατηρήσεων, ὡς ὅταν μετροῦμεν τὸ ἀνάστημα καὶ τὸ βάρος ἐκάστου ἀτόμου ὁμάδος ἀτόμων, ἀνηκόντων εἰς τὸ αὐτὸ φύλον καὶ ἀγόντων τὴν αὐτὴν ἡλικίαν. Κάθε ἄτομον ἐπὶ τοῦ προκειμένου παρέχει ἀφορμὴν εἰς μίαν παρατήρησιν, τὸ ἀποτέλεσμα ἧς ἐκφράζεται διὰ δύο ἀριθμῶν (συντεταγμέναι τοῦ ἀτόμου : ἀνάστημα καὶ βάρος).

8. Εἷς τὰς ὡς ἄνω περιπτώσεις καὶ ἂν ἀκόμη φροντίζωμεν διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν ὅλων τῶν σχετικῶν περιστατικῶν ἅτινα τελοῦσιν ὑπὸ ἔλεγχον, τὸ ἐξαγόμενον δύναται νὰ ποικίλῃ ἀπὸ παρατηρήσεως εἰς παρατήρησιν ἀκανονίως, ὥστε νὰ ὑπεκφεύγῃ ὅλων τῶν ἀποπειρῶν ἡμῶν πρὸς πρόβλεψιν.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν ὅτι ἀποβλέπομεν πρὸς ἀκολουθίαν τυχαίων πειραμάτων. Συστηματικὴ νῦν ἀναγραφὴ τῶν ἀκολουθιῶν τοῦ εἴδους τούτου θὰ λέγεται ὅτι ἀποτελεῖ σειρὰν στατιστικῶν δεδομένων σχετικῶν πρὸς τὸ ὑπ' ὄψει φαινόμενον.

9. Τὸ κύριον ἀλλὰ καὶ πρωταρχικὸν ἀντικείμενον τῆς Στατιστικῆς εἶναι ἡ διερεύνησις τῆς δυνατότητος τῆς λήψεως ἐγκύρων συμπερασμάτων ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων καὶ ἡ ἐπεξεργασία τούτων διὰ μεθόδων, δι' ὧν τὰ συμπεράσματα ταῦτα δύνανται νὰ ἐπιτευχθῶσιν.

Ἄλλ' ἐν ἀκολουθίᾳ τυχαίων πειραμάτων εἶναι ἀνέφικτος ἡ ἀτομικὴ πρόβλεψις, διότι τὰ ἄτομα (ἀτομικαὶ παρατηρήσεις) ὑπόκεινται εἰς ἀκανονίστους τυχαίας διακυμάνσεις, αἵτινες δὲν δύνανται νὰ

ὕπαχθῶσιν εἰς ἀκριβῆ ὑπολογισμόν. Ἐάν ὁμῶς στρέψωμεν τὴν προσοχὴν ἡμῶν ἀπὸ τῶν ἀτομικῶν πειραμάτων πρὸς τὴν συνολικὴν ἀκολουθίαν τῶν πειραμάτων, τότε ἡ κατάστασις μεταβάλλεται ἄρδην καὶ ἐμφανίζεται φαινόμενον ἄκρως ἐνδιαφέρον, ἥτοι εἰς πείσμα τῆς ἀκανονίστου συμπεριφορᾶς τῶν ἀτομικῶν ἐξαγομένων, τὰ μέσα ἐξαγόμενα μακρῶν ἀκολουθιῶν τυχαίων πειραμάτων δεικνύουσιν ἀσυνήθη κανονικότητα.

10. Κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἐάν μεταξὺ τῶν  $n$  πρώτων πειραμάτων διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ γεγονός  $E$  ἐνεφανίσθη  $n$  φορὰς ἀκριβῶς, ὁ λόγος  $n/n$  θὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ γεγονότος  $E$  ἐν τῇ ἀκολουθίᾳ ἣτις ἐσχηματίσθη ἐκ τῶν  $n$  πειραμάτων. Ἐάν νῦν ἡ συχνότης  $n/n$  ὠρισμένου γεγονότος  $E$  παρατηρεῖται δι' αὐξούσας τιμὰς τοῦ  $n$ , θὰ εὕρωμεν ὅτι δεικνύει αὕτη ἀξιοσημείωτον τάσιν νὰ καθίσταται κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον σταθερά, διὰ τιμὰς τοῦ  $n$  ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαλειτέρας.

11. Τὸ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τὴν τυπικὴν μορφήν τῆς Στατιστικῆς κανονικότητος ἣτις ἀπαρτίζει τὴν ἐμπειρικὴν βάσιν τῆς Στατιστικῆς θεωρίας. Οὐχ ἥττον δέον νὰ ἐπιχειρήσωμεν νὰ παράσχωμεν ἀκριβῆ ἔννοιαν τῆς ὡς ἄνω ἐκφράσεως ἐπὶ σκοπῷ νὰ διερευνήσωμεν τοὺς Νόμους οἵτινες ἰθύνουσι τὸν τρόπον τοῦτον τῆς κανονικότητος καὶ εἶτα πῶς οἱ νόμοι οὗτοι εἶναι δυνατόν νὰ ἐφαρμόζωνται διὰ τὴν ἐπίτευξιν συμπερασμάτων ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων. Διὰ νὰ ἀχθῇ εἰς πέρας ἡ προσπάθεια αὕτη πρωταρχικὸν βῆμα εἶναι ἡ διατύπωσις τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῶν φαινομένων, ἣτις δεικνύει τὴν στατιστικὴν κανονικότητα.

12. Εἷς τινὰς περιπτώσεις, ὅταν ἐρευνῶμεν δεδομένα ἀναφερόμενα εἰς ἀνθρώπους ἢ ἄλλους ἐμβίους πληθυσμούς, ἡ στατιστικὴ κανονικότης συχνάκις ἐρμηνεύεται διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν μονάδων τῶν δεδομένων ὡς δειγμάτων ληφθέντων ἀπὸ τινος πολυπληθοῦς ἢ ἀκόμη καὶ ἀπείρου πληθυσμοῦ, τοῦ καλουμένου πατρικοῦ ἢ γεννητορικοῦ πληθυσμοῦ.

Ἐάν ὁ πληθυσμὸς εἶναι πεπερασμένος καὶ συνίσταται ἐκ  $N$  ἀτόμων, διὰ κάθε ἄτομον τελοῦν ὑπὸ παρατήρησιν σημειούμεν χαρακτηριστικόν τιχ καὶ παριστῶμεν δι'  $E$  ὠρισμένον τι γεγονός. Ἡ συχνότης τοῦ γεγονότος  $E$  εἰς δεῖγμα  $n$  ἀτόμων τείνει, αὐξανομένου τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος, πρὸς τὴν συχνότητα τοῦ γεγονότος  $E$  ἐν τῷ συνολικῷ πληθυσμῷ καὶ προσεγγίζει τὴν τιμὴν ταύτην ὅταν  $n = N$ , ὅπερ ἐμφαίνει πλεον ὅτι παρατηροῦμεν κάθε ἄτομον τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ.

13. Ἡ ἀντίληψις ἑνὸς ἀπείρου πληθυσμοῦ εἶναι καθαρὰ μαθηματικὴ ἀφαίρεσις, ὁμοία πρὸς ἐκείνην καθ' ἣν δεδομένον τυχαῖον πείραμα θὰ ἡδύνατο νὰ ἐπαναληφθῇ ἄπειρον ἀριθμὸν φορῶν. Δυνάμεθα ὁθὲν νὰ θεωρήσωμεν ταύτην ὡς τὴν ὁρικὴν περιπτῶσιν ἑνὸς πεπερασμένου πληθυσμοῦ, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων τούτου  $N$  αὐξάνει ὑπὲρ πᾶν ὄριον. Ἡ συχνότης τοῦ γεγονότος  $E$  εἰς δείγμα ἐκ  $n$  ἀτόμων ἀπὸ τινος ἀπεριορίστου πληθυσμοῦ θὰ ὑπόκειται πάντε εἰς τυχαίας διακυμάνσεις, ἐφ' ὅσον τὸ  $n$  εἶναι ὠρισμένον, ἀλλὰ φαίνεται φυσικὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι δι' ἀπεριορίστως αὐξανόμενας τιμὰς τοῦ  $n$ , ἡ συχνότης αὕτη θὰ ἡδύνατο νὰ προσεγγίξῃ τὴν ἀληθὴ τιμὴν, ἣτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν συχνότητα τοῦ  $E$  ἐν τῷ συνολικῷ πληθυσμῷ.

14. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἐρμηνείας, συναρτῇ τῆς ιδέας τῆς δειγματοληψίας, δύναται ἀκόμη νὰ ἐπεκταθῇ εἰς οἶονδῆποτε τύπον τυχαίου πειράματος. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν οὕτω πεπερασμένην ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων τυχαίου πειράματος ὡς δείγμα, ἀπὸ τινος ὑποθετικοῦ ἀπείρου πληθυσμοῦ, ὅλων τῶν πειραμάτων, ἅτινα θὰ ἡδύναντο νὰ ἐκτελεσθῶσιν ὑπὸ δεδομένας συνθήκας. Ὅταν ρίπτομεν π.χ. νόμισμά τι 1000 φορὰς καὶ εὐρίσκομεν 520 φορὰς γράμματα καὶ 480 φορὰς πρόσωπον, ἡ ἀκολουθία αὕτη τῶν ἐπαναλήψεων τοῦ τυχαίου πειράματος θὰ ἡδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς δείγμα ἐξ ἀπείρου ὑποθετικοῦ πληθυσμοῦ ρίψεων νομίσματος ὑπὸ τὰς αὐτὰς δεδομένας συνθήκας.

15. Κατὰ συνέπειαν ὅταν εἷς τινὰ ὁμάδα παρατηρησίμων φαινομένων ἀνευρίσκομεν προφανῇ τὴν ἐπιβεβαίωσιν τῆς κανονικότητος, δυνατόν τότε νὰ δοκιμάσωμεν νὰ μορφώσωμεν μίαν μαθηματικὴν θεωρίαν περὶ τοῦ ὑποκειμένου. Ἡ τοιαύτη θεωρία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μαθηματικὸν ὑπόδειγμα τοῦ σώματος τῶν ἐμπειρικῶν γεγονότων, ἅτινα ἀποτελοῦσι τὰ δεδομένα. Ἐπιλέγομεν τότε ὡς ἀφετηρίαν τὸ μᾶλλον οὐσιώδες καὶ στοιχειωδέστερον χαρακτηριστικὸν τῆς παρατηρηθείσης κανονικότητος τῶν δεδομένων. Ταῦτα ἐκφράζονται εἰς ἀπλοποιημένας καὶ ἐξιδανικευμένας μορφάς, ὡς μαθηματικαὶ προτάσεις αἵτινες τίθενται ὡς τὰ βασικὰ ἀξιώματα τῆς θεωρίας.

16. Διὰ τῶν ἀξιωμάτων τούτων ποικίλαι προτάσεις εὐρίσκονται διὰ καθαρᾶς λογικῆς ἀφαιρέσεως, ἄνευ περαιτέρω προσφυγῆς εἰς τὴν ἐμπειρίαν. Τὸ λογικῶς συνεπὲς σύστημα τῶν προτάσεων ὅπερ οὕτω ἀνεγείρεται ἐπὶ ἀξιωματικῶν βάσεων ἀπαρτίζει τὴν ζητουμένην μαθηματικὴν θεωρίαν.

Κάθε πρότασις εἰς τοιοῦτον σύστημα εἶναι ἀληθὴς κατὰ

τὴν μαθηματικὴν σημασίαν τῆς λέξεως, ἅμα ποριζόμεθα ταύτην ἀκριβῶς ἐκ τῶν ἀξιωμάτων.

Ἄφ' ἐτέρου εἶναι σημαντικὸν νὰ τονισθῇ ὅτι οὐδεμία πρότασις οἷοσδήποτε μαθηματικῆς θεωρίας ἀποδεικνύει τι περὶ τῶν γεγονότων ὅτι ὄντως θὰ συμβῶσιν. Ἡ καθαρὰ θεωρία ἐξ ὁλοκλήρου ἀνήκει εἰς τὴν διανοητικὴν σφαῖραν καὶ ἀσχολεῖται μὲ ἀφηρημένα ἀντικείμενα, ὁλοκληρωτικῶς ὀριζόμενα διὰ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, ὡς ἐκφράζονται διὰ τῶν ἀξιωμάτων. Διὰ τὰ ἀντικείμενα ταῦτα αἱ προτάσεις τῆς θεωρίας εἶναι ἀκριβῶς καὶ αὐστηρῶς ἀληθεῖς. Ἄλλ' οὐδεμία πρότασις περὶ τοιούτων ἀντικειμένων τῆς διανοίας θὰ ἠδύνατο ποτὲ νὰ ἐμπεριέχῃ λογικὴν ἀπόδειξιν τῶν ὑπαρκτῶν ἀντικειμένων τῶν πειραμάτων ἡμῶν. Τὰ μαθηματικὰ ἐπιχειρήματα εἶναι θεμελιωδῶς ἀνίκανα διὰ τὴν ἀπόδειξιν φυσικῶν γεγονότων.

17. Ἐκτὸς τούτου μερικαὶ προτάσεις τῆς μαθηματικῆς θεωρίας ὅπωςδὴποτε δύναται νὰ ἐλεγχθῶσι διὰ τοῦ πειράματος. Ἐὰν εἰς συστηματικὴν βάσανον (test) τοῦ χαρακτηῖρος τούτου εὐρίσκομεν ὅτι αἱ ἐπαληθεύσιμοι συνέπειαι τῆς θεωρίας εἶναι πραγματικῶς σύμμορφοι μετὰ ἐπαρκοῦς ἀκριβείας, πρὸς τὰ εὐχρηστα πραγματικὰ γεγονότα, δυνάμεθα τότε νὰ παραδεχθῶμεν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον ὅτι ὑφίσταται εἶδος τι ὁμοιότητος μεταξὺ τῆς μαθηματικῆς θεωρίας καὶ τῆς διαρθρώσεως τοῦ ὑπαρκτοῦ κόσμου.

Δυνάμεθα περαιτέρω νὰ ἀναμένωμεν ὅτι ἡ συμφωνία μεταξὺ θεωρίας καὶ πειράματος θὰ συνεχίσῃ νὰ διατηρῇται, ἐπίσης, διὰ μελλοντικὰ γεγονότα καὶ δι' ἀκολουθίας τῆς θεωρίας, αἵτινες ἔτι δὲν ὑπέκειντο εἰς ἄμεσον ἐπαλήθευσιν, καὶ ἐπιτρέπομεν οὕτω εἰς τὰς πράξεις ἡμῶν νὰ κατευθύνωνται ὑπὸ τῆς τοιαύτης ἐλπίδος.

18. Εἰς ἃς περιπτώσεις ἔχομεν ἀνεύρει κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον ἀκρίβειαν καὶ σταθερὰν συμφωνίαν μεταξὺ θεωρίας καὶ γεγονότων, τότε ἡ μαθηματικὴ θεωρία ἀποκτᾷ πρακτικὴν ἀξίαν, ἐντελῶς διακεκριμένην τοῦ καθαρῶς μαθηματικοῦ ἐνδιαφέροντος αὐτῆς. Ἡ θεωρία τότε δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ διαφόρους σκοπούς. Ἡ πλειονότης τῶν συνήθων ἐφαρμογῶν τῆς μαθηματικῆς θεωρίας δύνανται, εἰς ἀδράς γραμμάς, νὰ ταχθῇ εἰς τὰς ἐξῆς κατηγορίας Περιγραφή - Ἀνάλυσις - Πρόβλεψις περὶ ὧν κατωτέρω.

## II. Μαθηματικὴ πιθανότης

19. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ von Mises αὕτη ὀρίζεται μόνον ἀναφορικῶς πρὸς τι σὺνολον, ὅπερ εἶναι, καθ' ἃ προελέχθη, ἀπεί-

ως μεγάλη σειρά τυχαιῶν στοιχείων, ἅτινα κέκτῃνται χαρακτηριστικὰ τινὰ ἐξειδικευμένα. Ἐὰν ὅθεν ἡ σχετικὴ συχνότης δεδομένης τινὸς ιδιότητος μεταξὺ  $n$  στοιχείων εἶναι  $v/n$  καὶ  $p$  εἶναι τὸ ὄριον πρὸς ὃ  $v/n$  πλησιάζει ὅταν  $n \rightarrow \infty$  τότε ἡ διαφορὰ μεταξὺ  $v/n$  καὶ  $p$  καθίσταται καὶ παραμένει μικροτέρα δεδομένης ποσότητος θετικῆς  $\epsilon$ , ὅσονδήποτε μικρᾶς καὶ ἂν ὑποτεθῇ, ἔστω  $\epsilon = 0,005$ . Ἀριθμητικῶς τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν  $v/n$  ὑπολογισθῇ μετὰ δεδομένου πλήθους δεκαδικῶν ψηφίων, καθὼς τοῦτο αὐξάνει, προσεγγίζει τέλος ριθμὸν τινὰ ψηφίων, μετὰ τὸν ὁποῖον, οἷαδήποτε περαιτέρω αὐξήσις, οὐδεμίαν μεταβολὴν ἐπιφέρει εἰς τὰ ὑπολογισθέντα ψηφία. Τὸ εὐτερον στοιχεῖον μιᾶς ἀληθοῦς συλλογῆς εἶναι τὸ τυχαῖον ὑπὸ τῆς. Οὕτω ἡ ἀκολουθία τῶν στοιχείων ἅτινα ἀποτελοῦσι τὴν συλλογὴν πρέπει νὰ εἶναι ἀπηλλαγμένη οἷα σὺν ὅτι κανονιστικῶς, ἀντιθέτως δέον νὰ εὐρίσκεται ἐν πλήρει ἀταξίᾳ. Δέον νὰ σημειωθῇ ἐπίσης ὅτι ἡ σχετικὴ συχνότης μιᾶς ιδιότητος δύναται νὰ προσεγγίξῃ ὅριόν τι εἰς δεδομένην ἀκολουθίαν, χωρὶς ἡ τελευταία αὕτη νὰ εἶναι τυχαία. Ἐὰν π.χ. διὰ τινος εἰδικῆς συσκευῆ ἀναρρίπτεται εἰς τὸν ἀέρα 5άκις ἓν νόμισμα παρέχον ἅπαξ ράμματα καὶ τετράκις πρόσωπον, τὸ ὄριον τῆς σχετικῆς συχνότητος τῶν γραμμάτων εἰς τὴν τοιαύτην ἀκολουθίαν θὰ ᾔτο  $1/5$ , ἀλλ' ἡ ἀκολουθία ἐναργῶς δὲν θὰ ᾔτο τυχαία. Κατὰ συνέπειαν ὅχι ἀληθῆς συλλογὴ καὶ συνεπῶς δὲν θὰ ἡδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως γραμμάτων ὑπὸ τὰς δεδομένας συνθήκας εἶναι  $1/5$ . Ἡ πιθανότης γραμμάτων εἰς κάθε πέμπτην ρίψιν εἶναι 1 καὶ μηδὲν εἰς ὅλας τὰς ὑπολοίπους τέσσαρας.

20. Κατὰ τὸν von Mises τὸ τυχαῖον δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἔπεται :  
*Ἄν ἀκολουθία στοιχείων συνάγεται ἀπὸ τινος ἀρχικῆς ἀκολουθίας κατὰ οἰοῦτον τρόπον ὥστε ἡ ἐπιλογὴ στοιχείου τινὸς νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ποιθεμένης ιδιότητος τοῦ στοιχείου τούτου καὶ ἂν εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς ἀκολουθίας τοῦ εἶδους τούτου τὸ ὄριον τῆς σχετικῆς συχνότητος δεδομένης τινὸς ιδιότητος εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τῆς ἀρχικῆς ἀκολουθίας, ἡ ἐλευταία δύναται νὰ καλῇται ΤΥΧΑΙΑ.*

Δυνάμεθα ἐπομένως νὰ καταλήξωμεν διὰ τινὰ σχετικὴν συχνότητα εἰς τὴν προφανῆ ἀνισότητα  $0 \leq v/n \leq 1$  καὶ ἐπειδὴ, καθ' ὅρισμόν, πιθανότης  $p$  εἶναι προσεγγιζόντως ἴση πρὸς τινὰ σχετικὴν συχνότητα, εἶναι φυσικὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι  $p$  πληροῖ ἐπίσης τὴν ἀντίστοιχον ἀνισότητα

$$0 \leq p \leq 1$$

καὶ τοῦτο θὰ εἶναι μία τῶν ιδιοτήτων αἵτινες θὰ ἐκφράζωνται διὰ τῶν ἀξιωμάτων

21. Ἐὰν τὸ γεγονός  $E$  εἶναι ἀδύνατον, δηλ. τὸ γεγονός δὲν δύναται νὰ ἐμφανισθῇ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὑπ' ὄψει πειράματος, ἡ συχνότης τοῦ  $E$  πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Ἐξ ἄλλου ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι διὰ τὸ γεγονός  $E$  ἔχομεν  $p = 0$ , τότε τὸ  $E$  δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀδύνατον γεγονός. Πράγματι ἡ ἐρμηνεία τοῦ  $p$ , μόνον συνεπάγεται ὅτι ἡ συχνότης  $n/n$  τοῦ  $E$  θὰ εἶναι, διὰ μεγάλην τιμὴν τοῦ  $n$ , προσεγγιζόντως ἴση πρὸς τὸ μηδέν, οὕτως ὥστε καθ' ὅλην τὴν μακρὰν διαδρομὴν τοῦ  $E$ , θὰ ἐμφανισθῇ τὸ μέγιστον τοῦτο, εἰς μικρότατον ποσοστὸν τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν περιπτώσεων. Ὅμοίως ἂν τὸ  $E$  εἶναι γεγονός βέβαιον, δηλ. γεγονός ὅπερ πάντοτε ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὑπ' ὄψει πειράματος, θὰ λάβωμεν  $p = 1$ . Ἐξ ἐτέρου ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι  $p = 1$  δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι  $E$  εἶναι βέβαιον, ἀλλὰ μόνον ὅτι κατὰ τὴν μακρὰν διαδρομὴν  $E$  θὰ ἐμφανισθῇ κατὰ μέγιστον ἀριθμὸν περιπτώσεων ἢ  $1 - \varepsilon \leq p \leq 1$  ὅπου  $\varepsilon$  ἐλάχιστός τις ἀριθμός.

### III. Συμφωνία μεταξὺ θεωρίας καὶ γεγονότων

22. Ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς πιθανότητος, ὡς ὠρίσθη ἀνωτέρω, ἔχει τὸ ἐμπειρικόν της οἶονεῖ ἀντίβαρον εἰς τινὰς ἀπ' εὐθείας παρατηρησίμους σχετικὰς συχνότητας.

Ἡ πρότασις «ἡ πιθανότης τοῦ γεγονότος  $E$  ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὠρισμένον τυχαῖον πείραμα ἱσοῦται πρὸς  $P$ » ἔχει τὸ ἀντίβαρον αὐτῆς ἐν τῇ ἐκθέσει ἣτις δηλοῦται ὡς ἐρμηνεία συχνότητος τῆς πιθανότητος ἣτις διατυπῶνται ὡς ἔπεται: Εἰς μακρὰν ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων τοῦ ὠρισμένου τυχαίου πειράματος, εἶναι βέβαιον πρακτικῶς, ὅτι ἡ σχετικὴ συχνότης τοῦ  $E$  θὰ ἱσοῦται προσεγγιζόντως πρὸς  $p$ .

Τούτέστιν ὅταν ἡ πιθανότης ἑνὸς γεγονότος εἶναι μικρά, θὰ ἔδει νὰ ζητήσωμεν ὅτι εἰς μέγαν ἀριθμὸν τὸ γεγονός θὰ ἠδύνατο νὰ ἐμφανισθῇ τούλάχιστον εἰς μικρότατον ποσοστὸν ὅλων τῶν ἐπαναλήψεων τοῦ ἀντιστοίχου πειράματος. Συνεπῶς πρέπει νὰ εἴμεθα ἱκανοὶ νὰ θεωρήσωμεν ὡς πρακτικῶς βέβαιον ὅτι εἰς μίαν μόνον ἐκτέλεσιν τοῦ πειράματος, τὸ γεγονός δὲν θὰ ἐμφανισθῇ ὁμοίως ὅταν ἡ πιθανότης ἑνὸς γεγονότος διαφέρει τῆς μονάδος κατὰ μικρὸν ποσοστὸν, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι θὰ ἦτο δυνατόν νὰ εἶναι πρακτικῶς βέβαιον ὅτι κατὰ μίαν ἐκτέλεσιν τοῦ ἀντιστοίχου πειράματος τὸ γεγονός θὰ ἐμφανισθῇ.

23. Εἰς μέγαν ἀριθμὸν περιπτώσεων τὸ πρόβλημα τοῦ ἐλέγχου

τῆς συμφωνίας μεταξὺ θεωρίας καὶ γεγονότων ἐμφανίζεται ὑπὸ τὴν ἐπομένην μορφήν.

Διαθέτομεν δείγμα ἐκ  $n$  παρατηρηθεισῶν τιμῶν μεταβλητοῦ τι-  
νος καὶ ἔχομεν ἀνάγκην νὰ γνωρίσωμεν ἂν τὸ μεταβλητὸν τοῦτο εὐ-  
λόγως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τυχαῖον μεταβλητόν, ἔχον κατανομὴν  
πιθανότητος μετὰ τινων δεδομένων ιδιοτήτων. Εἰς τινας περιπτώσεις  
ἡ ὑποθετικὴ κατανομὴ θὰ ἐξειδικευθῇ ἀπολύτως, τούτέστιν δυνάμεθα  
νὰ ζητήσωμεν νὰ μάθωμεν ἐὰν εἶναι εὖλογον νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ  
δείγμα ἡμῶν ἐλήφθη δι' ἀπλῆς τυχαίας δειγματολη-  
ψίας ἀπὸ τινος πληθυσμοῦ, ἔχοντες κανονικὴν κατανομὴν τῆς μορ-  
φῆς τοῦ Gauss - Laplace, μὲ μέσον  $\mu = 0$  καὶ  $\sigma = 1$  (μέσην ἀπόκλινιν  
τετραγώνου).

24. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἀπλουστέραν περίπτωσιν, ὅταν ἡ ὑπο-  
θετικὴ κατανομὴ εἶναι πλήρως καθωρισμένη διὰ τῆς συναρτήσεως  
κατανομῆς αὐτῆς  $F(x)$ , τότε ἔχομεν νὰ ἐλέγξωμεν τὴν στατιστι-  
κὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ ὑπ' ὄψει δείγμα ἐλήφθη ἀπὸ τινος πλη-  
θυσμοῦ ἔχοντος τὴν κατανομὴν ταύτην.

*Ἀρχόμεθα δεχόμενοι ὅτι ἡ ἐλεγκτέα ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής.*  
Ἐπειτα ὅτι ἡ συνάρτησις κατανομῆς τοῦ δείγματος  $\Phi(x)$  δύναται νὰ  
ἀναμένεται νὰ σχηματίσῃ προσέγγισιν τινὰ πρὸς τὴν δεδομένην συ-  
νάρτησιν κατανομῆς  $F(x)$  ὅταν  $n$  εἶναι ἀριθμὸς μεγάλος. Ὅριζομεν  
θετικὸν τι μέτρον τῆς ἀποκλίσεως (διαφορᾶς) τῆς  $\Phi$  ἀπὸ τῆς  $F$ . Τοῦ-  
το δύναται, ὡς εἶκός, νὰ γίνῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους, ἀλλὰ κάθε  
ἀπόκλις, ὡς εἶκός, θὰ εἶναι συνάρτησις τις τῶν τιμῶν τοῦ δείγμα-  
τος καὶ θὰ ἔχῃ ὠρισμένην κατανομὴν. Διὰ τῆς τελευταίας κατανομῆς  
δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πιθανότητα ὅτι ἡ ἀπόκλις θὰ ὑπερ-  
βαίῃ δεδομένην ποσότητα  $\varepsilon$ , ὀρισθεῖσαν ἐκ τῶν προτέρων. Ἡ πιθα-  
νότης αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδῆποτε μικρὰ καὶ ἂν θέλωμεν, ἀρ-  
κεῖ τὴν δεδομένην ποσότητα νὰ λάβωμεν ἀρκούντως μεγάλην. Θὰ  
ἐκλέξωμεν τὴν ποσότητα  $D_0$  οὕτως ὥστε διὰ τὴν ἀπόκλινιν  $D$  νὰ  
ἔχωμεν τὴν πιθανότητα  $P(D > D_0) = \varepsilon$ .

25. Ἐὰν δοθῇ δείγμα τι ἐκ  $n$  τιμῶν καὶ συναρτήσῃ τούτων ὑπο-  
λογίσωμεν τὴν ποσότητα  $D$ , ἐὰν ἔχωμεν εὖρη μίαν τιμὴν  $D > D_0$ , τοῦ-  
το σημαίνει ὅτι γεγονὸς τι πιθανότητος  $\varepsilon$  ἐνεφανίσθη. Ὅπωςδῆποτε  
συναρτήσῃ τῆς ὑπ' ὄψει ὑποθέσεως τοιοῦτο γεγονὸς ἔδει πρακτι-  
κῶς νὰ εἶναι ἀδύνατον εἰς μίαν μόνην δοκιμασίαν καὶ οὕτω  
καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ὑπό-  
θεσις ἡμῶν ἀνεσκευάσθη ὑπὸ τοῦ πειράματος. Ἐξ  
ἐτέρου ἐὰν εὕρωμεν τὴν τιμὴν  $D \leq D_0$  θὰ εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ δε-  
χθῶμεν τὴν ὑπόθεσιν ὡς ἑλλογὸν ἐρμηνείαν τῶν ὑπ' ὄψει

δεδομένων, μέχρις οὗ περαιτέρω πειράματα παράσχωσι μείζονα ἐμπειρίαν.

26. Τὸ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐνὸς ἐπιχειρήματος ὅπερ συχνάκις ἐμφανίζεται εἰς τὰ στατιστικὰ συμπεράσματα. Θὰ συναντήσωμεν συχνάκις καταστάσεις ὅπου ἐνδιαφερόμεθα διὰ τινὰ μᾶλλον ἢ ἥττον πεπλεγμένην ὑπόθεσιν, ἀφορῶσαν τὰς ἰδιότητας τῆς κατανομῆς πιθανότητος ἐνίων μεταβλητῶν καὶ ζητοῦμεν νὰ ἐλεγχθῇ ἐὰν τὰ ὑπ' ὅψει στατιστικὰ δεδομένα συμφωνοῦσι μετὰ τῆς ὑποθέσεως ἢ ὄχι.

Μία πρώτη προσέγγισις εἰς τὸ πρόβλημα ἐπιτυχάνεται, ἐὰν προχωρήσωμεν ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω θεωρηθεῖσαν ἀπλὴν περίπτωσιν. Ἐὰν ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, αἱ τιμαὶ τοῦ ὑπ' ὅψει δείγματος θὰ ἠδύναντο νὰ σχηματίσωσιν μίαν στατιστικὴν εἰκόνα τῆς ὑποθετικῆς κατανομῆς καὶ εἰσάγομεν, κατ' ἀκολουθίαν, προσῆκον τι μέτρον  $D$  τῆς ἀποκλίσεως τοῦ δείγματος ἀπὸ τῆς κατανομῆς. Συναρτήσῃ τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τοῦ  $D$ , εὐρίσκομεν τότε ποσότητά τινα  $D_0$ , τοιαύτην ὥστε νὰ ἔχωμεν  $P(D > D_0) = \epsilon$ , ὅπου  $\epsilon$  ἔχει ὁρισθῇ ὡς ἀνωτέρω.

27, Ἐὰν εὕρωμεν μίαν τιμὴν  $D > D_0$ , τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἀπόκλισις εἶναι σημαντικὴ καὶ θεωροῦμεν τὴν ὑπόθεσιν ὡς ἀναίρουμένην. Ὅταν  $D \leq D_0$  ἡ ἀπόκλισις θεωρεῖται ὡς δυνατὴ καὶ ὀφειλομένη εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις τῆς δειγματοληψίας, τὰ δὲ δεδομένα ὡς σύμφωνα πρὸς τὴν ὑπόθεσιν.

Δοκιμασία τοῦ γετικώτερου τούτου χαρακτήρος καλεῖται ἔλεγχος σημαντικότητος (test of significance) τῆς ὑπ' ὅψει ὑποθέσεως. Εἰς τὴν ἀπλουστέραν περίπτωσιν ὅταν ὁ ἔλεγχος ἀναφέρεται πρὸς τὴν συμφωνίαν μεταξὺ τῆς κατανομῆς σειρᾶς τιμῶν δειγμάτων καὶ τινος θεωρητικῆς κατανομῆς, τότε εἰδικώτερον καλοῦμεν τοῦτον ἔλεγχον τῆς ὀρθῆς ἐξομαλύνσεως (test of goodness of fit), τῆς πιθανότητος  $\epsilon$ , δυναμένης νὰ ὁρισθῇ αὐθαίρετως, καλουμένης ἐπίπεδον σημαντικότητος ἢ ὄριον σημαντικότητος (level of significance) τοῦ ἐλέγχου.

28. Καθ' ἣν περίπτωσιν τὸ μέτρον τῆς ἀποκλίσεως  $D$  ὑπερβαίνει τὸ ὄριον σημαντικότητος  $D_0$ , τότε θεωροῦμεν τὴν ὑπόθεσιν ὡς ἀνασκευασθεῖσαν ὑπὸ τοῦ πειράματος. Τοῦτο, ὡς εἶναι αὐτονόητον, δὲν ἰσοδυναμεῖ πρὸς μίαν λογικὴν ἀνασκευήν, ἀκόμη δὲ καὶ ἂν ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, τὸ γεγονὸς  $D > D_0$  μετὰ πιθανότητος  $\epsilon$  δύναται νὰ ἐμφανισθῇ κατὰ τινὰ ἐξαιρετικὴν περίπτωσιν. Ὅπως δὲ ὅποτε ὅταν  $\epsilon$  εἶναι ἐπαρκῶς μικρόν, ἐν τῇ πράξει δεχόμεθα δεδικαιολογημένως ὡς ἀμελητέαν τὴν δυνατότητα ταύτην.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐμφάνισις μιᾶς μόνης τιμῆς  $D \leq D_0$  δὲν ἀποτελεῖ ἀπὸ δειξιν τοῦ ἀληθοῦς τῆς ὑποθέσεως, Δεικνύει μόνον ὅτι ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τοῦ ἐφαρμοσθέντος ἐλέγχου ἢ μᾶλλον κριτηρίου ἢ συμφωνία μεταξὺ θεωρίας καὶ παρατηρήσεων εἶναι ἱκανοποιητικὴ ἐπομένως ἵνα μία στατιστικὴ ὑπόθεσις θεωρηθῇ ὡς πρακτικῶς προσδιορισθεῖσα, θὰ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν πλειστάκις ἐλέγχους παντοειδεῖς.

#### IV. Περιγραφή - Ἀνάλυσις

29. Κατὰ πρῶτον ἡ θεωρία δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ μόνον καὶ μόνον διὰ καθαρῶς περιγραφικοῦ σκοποῦς. Ὄταν μεγάλη σειρά στατιστικῶν δεδομένων ἔχει συλλεγῇ, συχνάκις ἐνδιαφερόμεθα διὰ τινὰς εἰδικὰς ιδιότητας τοῦ ὑπὸ ἔρευναν φαινομένου. Τότε εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ συμπυκνώσωμεν, οἶονεῖ, τὴν πληροφορίαν ἐν σχέσει πρὸς τὰς ιδιότητας ταύτας, αἵτινες, δύνανται νὰ ἐπιτευχθῶσιν ἐν τῇ μάζῃ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, εἰς μικροὺς ἀριθμοὺς περιγραφικοῦ χαρακτῆρος. Τὰ συνήθη χαρακτηριστικὰ τῆς κατανομῆς τῶν τιμῶν δειγμάτων, ὡς αἰροπαὶ (περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχήν, ἀλλὰ κυρίως περὶ τὸν μέσον) αἱ ἡμιαναλλοίωτοι, οἱ συντελεσταὶ παλινδρομήσεως καὶ συσχετίσεως κλπ. ἐν γένει δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι διὰ πλείονας σκοποῦς. Ἡ χρῆσις τῶν καμπύλων συχνότητων, ἣτις σημαντικὴν θέσιν καταλαμβάνει ἐν τῇ νεωτάτῃ βιβλιογραφίᾳ, ἀνήκει ἐπίσης, κατ' ἀρχήν, εἰς τὴν ὁμάδα ταύτην τῶς ἐφαρμογῶν (1).

(1) Ἡ ἀποψις ὅμως αὕτη ἀμφισβητεῖται ὑπὸ πλείστων. Οὕτω ὁ A. M. Farlane Mood (σελ. 120 Introduction to the theory of statistics 1950) γράφει τὰ ἐξῆς προκειμένου περὶ τῆς χρησιμοποιήσεως καμπύλων τῆς οἰκογενείας Pearson ἢ τοῦ Gram—Charlier. Ἐν γένει ἡ  $f(x)$  εἶναι ἄγνωστος (δηλαδή ἡ συνάρτησις κατανομῆς ἐν τῷ πληθυσμῷ) καὶ πᾶν ὅτι εἶναι γνωστὸν εἶναι δείγμα τιμῶν τῆς  $x$ . Συναρτῆσαι τοῦ δείγματος, αἰροπαὶ τῆς  $f(x)$  δύνανται νὰ ἐκτιμηθῶσι. Μία καμπύλη τοῦ Pearson, ἣτις προτιθέμεθα νὰ προσεγγίσῃ τὴν  $f(x)$  δύναται νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ δείγματος, δι' ἐξισώσεως τῶν ροπῶν τοῦ δείγματος πρὸς τὰς θεωρητικὰς ροπὰς καὶ ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος πρὸς καθορισμὸν τῶν παραμέτρων αἵτινες ἐμφανίζονται εἰς τὰς θεωρητικὰς ροπὰς. Αἱ τιμαὶ αὗται τῶν παραμέτρων ἀντικαθίστανται ἐν τῇ συναρτῇ πρὸς εὐρεσιν εἰδικῆς συναρτήσεως, ἣτις νοεῖται ὡς προσεγγίζουσα τὴν  $f(x)$ . Ἀλλ' ἡ μέθοδος τῆς κατασκευῆς μιᾶς ἐξομαλυνθείσης καμπύλης τοῦ δείγματος οὐδεμίαν πληροφορίαν προσθέτει περὶ τῆς  $f(x)$ . ἣτις θὰ περιλαμβάνεται ἐν τῷ δείγματι. Ἡ κατασκευασθεῖσα καμπύλη δύναται, ὄντως, νὰ παράσχῃ μίαν ὁλοκληρωτικῶς πεπλανημένην ἐντύπωσιν ἐπὶ τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως συχνότητος. Μόνον ὅταν

“Ὅταν λοιπὸν ὑποκαθιστῶμεν τὴν μάζαν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων διὰ μικροῦ ἀριθμοῦ περιγραφικῶν χαρακτηριστικῶν, ἐπιτελοῦμεν περιστολήν τῶν δεδομένων κατὰ τὴν ὁρολογίαν τοῦ R. Fisher. Εἶναι ἐναργῶς σημαντικὸν ὅτι ἡ περιστολὴ αὕτη θὰ πρέπη νὰ ταξινομηθῇ, ἐφ’ ὅσον τὸ δυνατόν, οὕτως ὥστε ἡ σχετικὴ πληροφορία ἣτις ἐμπεριέχεται εἰς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα νὰ ἐξάγεται διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἐκλεγέντων περιγραφικῶν χαρακτηριστικῶν.

Οὕτω αἱ οὐσιώδεις ἰδιότητες τῶν χαρακτηριστικῶν ἐνὸς δείγματος ἐκφράζονται διὰ τῶν κατανομῶν δειγματοληψίας τούτου καὶ ἡ συστηματικὴ ἔρευνα τῶν τοιούτων κατανομῶν κατ’ ἀνάγκην, θὰ εἶναι, οἶονεῖ, προεισαγωγικὴ διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μεθόδων περιστολῆς (ροπαὶ περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχήν, ὁμοίως περὶ τὸν μέσον [κεντρικαὶ ροπαί], συντελεσταὶ ἀσυμμετρίας καὶ κυρτώσεως ἡμιαναλλοίωτοι, συντελεσταὶ συσχέτισεως, διορθώσεις ροπῶν κατὰ Sheppard, διάμεσος, τεταρτημόρια, δεκατημόρια, εὔρος, διακύμανσις, μέση διαφορὰ, κατανομή Gauss - Laplace κλπ).

31. Εἰς πλείστας ὁμως περιπτώσεις ὁ ἀντικειμενικὸς σκοπὸς μιᾶς στατιστικῆς ἐρεῦνης δὲν εἶναι καθαρῶς φύσεως περιγραφικῆς. Ὅντως τὰ περιγραφικὰ χαρακτηριστικὰ συνήθως θὰ ζητηθῶσι διὰ τινὰ ὠρισμένον σκοπὸν. Π.χ. δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν διαφόρους σειρὰς δεδομένων, συναρτήσῃ τῶν χαρακτηριστικῶν ἐκάστης σειρᾶς ἢ δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν νὰ σχηματίσωμεν ἐκτιμήσεις τῶν τιμῶν τῶν χαρακτηριστικῶν ἅτινα ἀναμένομεν νὰ εὔρωμεν κατὰ τὸ μέλλον. Κατὰ τὰς περιπτώσεις αὐτάς ἡ περιγραφή τῶν ὑπ’ ὄψει δεδομένων σχηματίζει μόνον ἓν προκαταρκτικὸν στάδιον τῆς ἐρεῦνης καὶ πρακτικῶς ἀναφέρεται εἰς ἐφαρμογὴν ἀνήκουσαν εἴτε εἰς τὴν ἀνάλυσιν εἴτε εἰς τὴν πρόβλεψιν.

32. Ἀνάλυσις. Ὅταν μίᾳ μαθηματικῇ θεωρίᾳ ἐλεγχθῇ καὶ ἐγκριθῇ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ὄργανον ἐρεῦνης διὰ τὴν ἐπισημονικὴν ἀνάλυσιν τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως.

Κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ χαρακτηρίζωμεν τὸν τύπον τοῦτον τῶν ἐφαρμογῶν ὡς ἔλεγχον τοῦ ἐπιχειρήματος ἀπὸ τοῦ δείγματος πρὸς τὸν πληθυσμόν. Δίδονται σειραὶ τινες στατιστικῶν δεδομένων αἵτινες ὑποτίθεται ὅτι εἶναι δείγματα ἀπὸ τινῶν πληθυσμῶν καὶ δοκιμάζομεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ δεδομένα διὰ

---

τὸ δείγμα εἶναι πολυπληθές, ἴσως προσήκει νὰ ὑποκαθιστῶμεν τὰ δεδομένα διὰ τινος εἵδους ἐξομαλυνθείσης καμπύλης πρὸς σκοπὸν ἀπλοποιήσεως τῶν περαιτέρω ὑπολογισμῶν. Φυσικὸν εἶναι νὰ γίνεται ἐφαρμογὴ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν πολυπληθῶν δεδομένων, ὡς αἱ δημογραφικαὶ καὶ φορολογικαὶ καὶ ἄλλαι ἀκόμη στατιστικαί.

νὰ πληροφορηθῶμεν ἓν ἂν περὶ τῆς κατανομῆς τῶν πληθυσμῶν. Μεγάλη ποικιλία προβλημάτων τῆς ὡς εἴρηται τάξεως ἐμφανίζεται ἐν τῇ πράξει. Οὕτω ἐὰν δοθῇ δείγμα τιμῶν ἐκ παρατηρήσεων τότε ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, ἐὰν εἶναι εὐλογον νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δείγμα τοῦτο δύναται νὰ ἔχῃ ληφθῇ ἀπὸ τινος κατανομῆς ἀνηκούσης εἰς τινὰ δεδομένην τάξιν. Π.χ. Δικαιούμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σφάλματα φυσικῆς τινὸς μετρήσεως κατανέμονται κανονικῶς; ἢ ὅτι ἡ κατανομή τοῦ εἰσοδήματος ἐν τινι χώρᾳ ἀκολουθεῖ τὸν Νόμον τοῦ Pareto;

33. Εἰς οὐδεμίαν περίπτωσιν ἡ κατανομή τοῦ ὑπ' ὄψει δείγματος ἀκριβῶς θὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ὑποθετικῆς κατανομῆς, ἐπειδὴ ἡ πρώτη εἶναι ἀσυνεχὴς καὶ ἡ δευτέρα συνεχὴς κατὰ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τῶν ὄρων τούτων. Ἀλλὰ δικαιούμεθα νὰ ἀποδίδωμεν τὴν ἀπόκλισιν τῆς ἐκ παρατηρήσεως κατανομῆς ἀπὸ τῆς ὑποθετικῆς τοιαύτης εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις ἢ θὰ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἀπόκλισις εἶναι σημαντικὴ τοιούτων ἐνδεικτικῆ μιᾶς πραγματικῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῆς ἀγνώστου κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ καὶ τῆς ὑποθετικῆς κατανομῆς;

Τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, ὡς ἤδη ἐλέγχθη, λύεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἐλέγχου ἢ κριτηρίου σημαντικότητος. "Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν μέτρον τι τῆς ἀποκλίσεως  $D$  καὶ ἐν τῇ ὑπ' ὄψει περιπτώσει ἡ ἀπόκλισις θὰ θεωρεῖται ὡς σημαντικὴ, ἐὰν  $D$  ὑπερβαίῃ δεδομένην τινὰ τιμὴν  $D_0$ , ἐνῷ ἄλλως ἡ ἀπόκλισις θὰ ἀποδοθῇ εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις τῆς δειγματοληψίας.

34. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ὑποθέτομεν ὅτι ὁ γενικὸς χαρακτήρ τῆς κατανομῆς εἶναι γνωστὸς ἐκ προσφάτου πειράματος καὶ ζητοῦμεν πληροφορίαν ὡς πρὸς τὰς τιμὰς εἰδικῶν τινῶν χαρακτηριστικῶν τῆς κατανομῆς, ὅπου, ἐξ ὑποθέσεως, ζητοῦμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἀποτελέσματα δύο διαφόρων μεθόδων θεραπευτικῶν ἀγωγῶν διὰ τὸ αὐτὸ νόσημα, καὶ ἐὰν, ἐξ ὑποθέσεως, δι' ἐκάστην μέθοδον ὑφίσταται μία σταθερὰ πιθανότης ἀναρρώσεως. Ἐρωτᾶται: Ὑφίστανται δύο διάφοροι πιθανότητες; Διὰ νὰ ρίψωμεν φῶς ἐπὶ τοῦ προβλήματος συλλέγομεν δείγμα τι περιπτώσεων δι' ἐκάστην τῶν μεθόδων καὶ συγκρίνομεν τὰς δύο συχνότητας ἀναρρώσεως. Γενικῶς αὐταὶ θὰ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων καὶ ἀντιμετωπίζομεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα πρὸς τὸ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, ἥτοι ἂν ἡ διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις ἢ εἶναι σημαντικὴ, δηλαδή ἐνδεικτικὴ μιᾶς πραγματικῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν πιθανοτήτων.

Ὅμοίως, καίπερ μᾶλλον πολύπλοκα προβλήματα εἰς πλείστας περιπτώσεις ἐμφανίζονται εἰς τὴν γεωργίαν, βιομηχανικὴν ἢ ἰατρικὴν στατιστικὴν, ὅταν ζητοῦμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ ἀποτελέσματα διαφόρων μεθόδων θεραπευτικῶν ἀγωγῶν ἢ παραγωγῆς, τότε, συνήθως, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς μέσους ἢ τινὰ ἄλλα χαρακτηριστικὰ τῶν ὑπ' ὄψει δειγμάτων καὶ ζητοῦμεν νὰ διακριβώσωμεν ἐὰν αἱ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν χαρακτηριστικῶν τούτων θὰ ἠδύναντο νὰ ἀποδοθῶσιν εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις ἢ νὰ κριθῶσιν ὡς σημαντικά.

35. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις εἶναι λυσιτελές νὰ ἀρχόμεθα διὰ τῆς υἱοθετήσεως τῆς ὑποθέσεως ὅτι δὲν ὑφίσταται διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν μεθόδων, ἥτοι τὰ ὑπ' ὄψει δειγμάτων ἔχουσι προέλθει ἐκ τοῦ αὐτοῦ πληθυσμοῦ, θεωρουμένου ὡς κανονικοῦ, ἥτοι ὑπόκεινται εἰς τὸν νόμον τοῦ Gauss - Laplace, εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ τῆς περιπύστου ὑποθέσεως μηδέν. Ἐὰν νῦν αἱ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν μέσων ἢ τῶν ἄλλων χαρακτηριστικῶν δι' ἑνδιαφερόμεθα ὑπερβαίνουν ὅρια τινὰ θεωρούμενα ὡς σημαντικά, τότε συμπεραίνομεν ὅτι ὑφίσταται μία πραγματικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῶν μεθόδων, ἄλλως ἀποδίδομεν ταύτην εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις.

35. Ὁ τοιοῦτος τύπος ἐφαρμογῶν ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν τῆς Στατιστικῆς ἀναλύσεως τῶν αἰτιῶν. Γενικώτερον ὑποθέτομεν ὅτι ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν ἐὰν ὑφίσταται ἀξιοσημείωτος τις αἰτιώδης σχέσις ἐξαρτήσεως μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν  $\chi$  καὶ  $\psi$  ἅτινα ἐρευνῶμεν. Κατὰ πρώτην προσέγγισιν, πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ὑπόθεσιν μηδέν, ἥτις κατὰ τὴν ὡς εἴρηται περίπτωσιν ἐπάγεται ὅτι τὰ μεταβλητὰ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἕν κριτήριον σημαντικότητος διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς ἀνεπτύχθη εἰς γενικὰς γραμμὰς ἀνωτέρω.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν παρακολούθησιν τῆς δυνατῆς ἀλληλουχίας μεταξὺ τῶν ἐτησίων ποσοτήτων  $\chi$  καὶ  $\psi$  δύο ἀγαθῶν καταναλωθέντων εἰς τινὰ ὁμάδα οἰκογενειῶν, ἐκ τοῦ δείγματος τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς διμεταβλητῆς κατανομῆς ( $\chi$ ,  $\psi$ ) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν συντελεστὴν συσχέτισεως τοῦ δείγματος. Γενικῶς οὗτος θὰ διαφέρει τοῦ μηδενός, ἐνῶ κατὰ τὴν μηδέν ὑπόθεσιν ὁ συντελεστὴς συσχέτισεως  $\rho$  τῆς ἀντιστοίχου κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι σημαντικὴ ἢ θὰ ἠδύνατο νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὰς τυχαίας διακυμάνσεις τῆς δειγματο-

ληψίας; Διὰ τὸ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο θὰ ἐφαρμόσωμεν ἓν κριτήριον σημαντικότητος ἐδραζόμενον ἐπὶ τῶν ιδιοτήτων τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τοῦ  $r$ . Ἐὰν τὸ  $r$  διαφέρει σημαντικῶς τοῦ μηδενός, τοῦτο δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἔνδειξις εἰδους τινός ἐξαρτήσεως μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν. Τὸ ἀντίστροφον συμπέρασμα δὲν εἶναι, ὅπωςδῆποτε νόμιμον, διότι ἀκόμη καὶ ἂν ἡ τιμὴ τοῦ  $r$  εἶναι μηδέν, τὰ μεταβλητὰ δύνανται νὰ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων<sup>(1)</sup>.

36. Ἄλλος τύπος προβλημάτων στατιστικῆς ἀναλύσεως εἶναι ἐκεῖνος καθ' ὃν ζητοῦμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν σειρὰν τιμῶν δειγμάτων διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἐκτιμήσεις ποικίλων χαρακτηριστικῶν τοῦ πληθυσμοῦ ἐξ οὗ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ δείγματα ἔχουσι ληφθῇ καὶ νὰ σχηματίσωμεν ιδέαν τινὰ περὶ τῆς ἀκρίβειας τῶν τοιούτων ἐκτιμήσεων.

Τὸ ἀπλούστερον πρόβλημα τοῦ τύπου τούτου εἶναι τὸ κλασικὸν τοιοῦτον τῆς ἀντιστρόφου πιθανότητος ὅπου διδομένης τῆς συχνότητος γεγονότος τινός  $E$  εἴς τινα ἀκολουθίαν ἐπαναλήψεων ἑνός τυχαίου πειράματος, ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν: ποίου εἰδους συμπεράσματα δύνανται νὰ ληφθῶσι ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον τιμὴν τῆς πιθανότητος  $p$  τοῦ  $E$ ; Εἶναι προφανές ὅτι κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ παρατηρηθεῖσα σχετικὴ συχνότης δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἐκτιμήσεις τοῦ  $p$ , ἀλλὰ θὰ εἶναι δυνατόν ἐπίσης νὰ μετρηθῇ ἡ ἀκρίβεια τῆς ἐκτιμήσεως ταύτης καὶ ἀκόμη νὰ καταστήσωμεν περισσότερον ἔγκυρον τὴν πιθανότητα ἣτις ἀφορᾷ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ἐκτιμήσεως καὶ τῆς ἀγνώστου ἀληθοῦς τιμῆς τοῦ  $p$ . Πολυπλοκώτερον ὅμοιον πρόβλημα ἀνακύπτει εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων, ἐνῶ διαθέτομεν σειρὰν ποσοτήτων συνεχομένων μετὰ τινος ἀριθμοῦ ἀγνώστων σταθερῶν καὶ ζητοῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ἐκτιμήσεις τῶν τιμῶν τῶν σταθερῶν τούτων καὶ νὰ διακριβώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ὡς εἴρηται ἐκτιμήσεων.

37. Ἐντελῶς ὅμοια προβλήματα προκύπτουσι συναφῶς πρὸς τὴν μέθοδον τῆς πολλὰ πλὴς συσχέτισεως, ἣτις εἶναι σημαντικοῦ ἐνδιαφέροντος εἰς πλείστας ἐφαρμογὰς τῆς Στατιστικῆς εἰς τὰς καθόλου ἐπιστήμας παρατηρήσεως καὶ τὴν Οἰκονομικὴν. Ἡ οἰκονομικὴ θεωρία π.χ. καταλήγει εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὑφίστανται γραμμικαὶ ἢ προσεγγιζόντως γραμμικαὶ σχέσεις μεταξὺ μεταβλητῶν,

---

1. Κατὰ τὸ θεώρημα: Δύο ἀνεξάρτητα μεταβλητὰ εἶναι πάντοτε ἀσυσχέτιστα, ἐνῶ τὸ ἀντίστροφον δὲν εἶναι ἀληθές δηλ. ὅτι δύο ἀσυσχέτιστα μεταβλητὰ κατ' ἀνάγκην δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα.

αἵτινες συνεχόνται πρὸς τὰ εἰσοδήματα τῶν καταναλωτῶν, τὰς τιμὰς καὶ τὰς ποσότητας ποικίλων ἀγαθῶν ἅτινα παρήχθησαν ἢ καταναλώθησαν εἰς δεδομένην ἀγοράν. Ὅταν σειρά ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τούτων εἶναι χρησιμοποίησιμος, ζητοῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ἐκτιμήσεις τῆς ἐλαστικότητος ἢ ὁμοίων ποσοτήτων αἵτινες ἐμφανίζονται ὡς συντελεσταὶ εἰς τὰς μετὰξὺ τῶν μεταβλητῶν σχέσεις.

38. Ἡ τελικὴ μορφή τοῦ προβλήματος τῆς ἐκτιμήσεως δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἔπεται. Θεωροῦμεν τυχαῖον τι μεταβλητὸν ἢ κατανομὴ οὗτινος ἔχει γνωστὴν μαθηματικὴν μορφήν, ἀλλὰ περιέχει ἀριθμὸν τινὰ ἀγνώστων σταθερῶν παραμέτρων.

Συναρτήσῃ νῦν τῶν τιμῶν τοῦ δείγματος (παρατηρηθεῖσων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν), ἐπιδιώκομεν νὰ σχηματίσωμεν ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων καὶ νὰ διαπιστώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκτιμήσεων. Ὑφίστανται ὅμως, ὡς γνωστόν, ἅπειροι τὸν ἀριθμὸν διάφοροι συναρτήσεις τῶν τιμῶν τοῦ δείγματος ἃς δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς ἐκτιμήσεις καὶ θὰ εἶναι λυσιτελὲς τότε νὰ συγκρίνωμεν τὰς ιδιότητας τῶν διαφόρων δυνατῶν ἐκτιμήσεων διὰ τὴν ἰδίαν παράμετρον καὶ εἰδικῶς νὰ εὕρωμεν συναρτήσεις αἵτινες ἀποδίδουσιν ἐκτιμήσεις μεγίστης ἀκριβείας, ἐὰν ἐννοεῖται ὑφίστανται τοιαῦται.

## Υ. Πρόβλεψις

39. Ἡ ἐννοια τῆς προβλέψεως προκύπτει ἐν συναφείᾳ πρὸς τὰ τυχαῖα μεταβλητά. Οὕτω ποῖοι ἀριθμοὶ γεννήσεων, πιθανώτατα δέον νὰ ἀναμένωνται κατὰ τὸ ἐπόμενον ἔτος εἰς τὴν χώραν; Ποῖα ἀποτελέσματα πιθανῶς θὰ ἐμφανισθῶσιν ἐὰν ἡ τιμὴ ἀγαθοῦ τινος ὑψωθῇ ἢ ἐλαττωθῇ κατὰ δεδομένον ποσοστόν; Διδομένων τῶν πορισμάτων ἐλέγχου ἐπὶ δειγμάτων βιομηχανικῆς παραγωγῆς εἰς σειράν ἀντικειμένου τινός, ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, πιθανῶς, τῶν ἐλαττωματικῶν ἅτινα δὲν θὰ δύνανται νὰ πωληθῶσι;

Ἐάν, ἐξ ὑποθέσεως, γνωρίζομεν τὰς κατανομὰς πιθανότητος τῶν μεταβλητῶν, αἵτινες εἰσέρχονται εἰς προβλήματα τοῦ τύπου τούτου, φαίνεται ὅτι συχνάκις θὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ παράσχωμεν τοῦλάχιστον μίαν δοκιμαστικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ τιθέμενον πρόβλημα. Πλήρης διερεύνησις ἐνός προβλήματος παρομοίου τύπου, ὅποιουδὴ ποτε, ἀπαιτεῖ τὴν λεπτομερεστάτην γνῶσιν τοῦ οἴκειου κλάδου τῶν γνώσεων, ὃν ἀφορᾷ ἡ ἐφαρμογή, δηλονότι τοῦ εἰδικοῦ ἐπιστήμονος εἶναι ἔργον νὰ ἐρμηνεύσῃ ὅ,τι ἡ στατιστικὴ θεωρία θὰ ἐπισημάνῃ.

## VI. Σ υ μ π έ ρ α σ μ α

40. Ἐκ τῶν ὧν ἐξετέθησαν ἀνωτέρω προκύπτουσιν ὅτι :

α) Ἡ Στατιστικὴ εἶναι ἰδίᾳ ἐπιστήμη ἀνήκουσα εἰς τὸν κλάδον τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, μὲ βάσιν τὸν λογισμόν τῶν πιθανοτήτων καὶ ἐπομένως διὰ τὴν ἐκμάθησιν ταύτης ἀπαιτεῖται σοβαρὰ μαθηματικὴ προπὸνησις.

β) Ἡ Στατιστικὴ δύναται νὰ ἐφαρμόζηται διὰ τὴν διερύνησιν συνόλων προκυπτόντων ἐκ τῆς ἀπαριθμήσεως ἢ μετρήσεως ἰδιοτήτων φυσικῶν φαινομένων, τοὔτέστιν συμβεβηκότων τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου, ἀσχέτως ἂν ταῦτα ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης βουλήσεως ἢ ὄχι.

γ) Ἡ Στατιστικὴ διὰ τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς προϋποθέτει τὴν κατάρτισιν μαθηματικοῦ ἰδεατοῦ ὑποδείγματος δεικνύοντος τὴν στατιστικὴν σταθερότητα ἐμφανίσεως τῆς ὑπ' ὄψει ἰδιότητος πρὸς ὃ νὰ συγκρίνωνται τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως, θεωρούμενα ὡς μέλη τυχαίου δείγματος, καταρτισθέντος ἐξ ἀπείρου ὑπαρκτοῦ ἢ ὑποθετικοῦ γεννήτορος πληθυσμοῦ.

δ) Ἡ Στατιστικὴ ὡς πρώτην φάσιν ἐφαρμογῆς τῆς προσκτᾶται καθαρῶς περιγραφικὸν χαρακτήρα τῆς κατανομῆς τῆς ὑπ' ὄψει ἰδιότητος συναρτήσῃ τοῦ διατιθεμένου δείγματος παρατηρήσεων.

ε) Ἡ Στατιστικὴ ὡς δευτέραν φάσιν ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀποβλέπει εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως καὶ δὴ τὴν διαπίστωσιν τῶν ἀποκλίσεων ἃς ἐμφανίζει τὸ δείγμα ἔναντι τοῦ ἰδεατοῦ ὑποδείγματος, ἐὰν δηλαδὴ δέον νὰ ἀποδοθῶσιν αὗται εἰς συστηματικὴν τινα αἰτίαν ἢ εἶναι ἀπότοκοι τῶν τυχαίων ἀλλὰ καὶ ἀναποφεύκτων σφαλμάτων τῆς δειγματοληψίας. Κατὰ τὴν φάσιν ταύτην ἀνακύπτει τὸ σοβαρώτερον πρόβλημα τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως, τῆς διακριβώσεως δηλ. τῆς ὑπάρξεως ἀξιοσημειώτου αἰτιώδους σχέσεως ἐξαρτήσεως μεταξὺ δύο ἢ πλειόνων ἰδιοτήτων, ποσοτικῶς ἐκφραζομένων. Ἡ διαπίστωσις τῆς ὑπάρξεως τῆς τοιαύτης σχέσεως ἀνήκει εἰς τὸν στατιστικόν, ἐνῶ ἡ ἐρμηνεία εἰς τὸν εἰδικὸν ἐπιστήμονα, εἰς τὸν κύκλον γνώσεων οὗτινος ἀνήκουσιν αἱ παρατηρήσεις.

στ) Ἡ τελικὴ φάσις τῆς στατιστικῆς ἐφαρμογῆς ἀλλὰ καὶ ἡ ἐξ ἴσου λεπτοτέρα εἶναι ἡ τῆς προβλέψεως, ἥτις διὰ νὰ εἶναι καρποφόρος προϋποθέτει τὴν πλήρη καὶ ἀπόλυτον ἐφαρμογὴν τῶν δύο προγενεστέρων φάσεων, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὴν πλήρη γνῶσιν τῶν κατανομῶν πιθανότητος τῶν μεταβλητῶν, πρὸς ἃς αἱ προβλέψεις ἀναφέρονται.

Τέλος αἱ μέθοδοι τῆς Στατιστικῆς εἶναι ἐνιαῖαι, ἀνεξαρτήτως τοῦ ὑποκειμένου τῶν παρατηρήσεων, εἴτε δηλ. τὴν Βιολογίαν ἀφορώσι εἴτε τὰς Κοινωνικὰς ἐπιστήμας. Ἡ Στατιστικὴ ἐπὶ τοῦ προκειμένου πραγματοποιεῖ τὸν ρόλον τοῦ ὁδηγοῦ ἢ μᾶλλον τοῦ προβολέως ὅστις φωτίζει τὰ, ὑπὸ τὴν φαινομένην πολύπλοκον ἀταξίαν, δεδομένα διὰ τῆς συναγωγῆς ὠρισμένων συμπερασμάτων, ὧν ὅμως ἡ ἐρμηνεία ἐξ ὁλοκλήρου ἀνήκει εἰς τὸν εἰδικὸν ἐπιστήμονα πρὸς ὃν ἀναφέρονται αἱ παρατηρήσεις καὶ οὐχὶ εἰς τὸν Στατιστικόν, ὡς ἤδη ἐτονίσθη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Mathematical Method of Statistics H. Cramer.
2. Introduction to the theory of Statistics A. Mac Farlane Mood.
3. Statistical Methods in research P. Johnson.