# ΠΕΡΙ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ ΚΑΙ ΔΥΟΠΩΛΙΟΥ

## Ἀναλυτικὴ διασκόπησις τῶν ὁμωνύμων προβλημάτων.

Ὑπὸ

Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ

## Α΄ ΠΕΡΙ ΜΟΝΟΠΩΛΙΟΥ

1.—Πλεῖστα τῶν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς, τῆς τε Στατικῆς καὶ Δυναμικῆς, δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τοιαῦτα εἰς ἃ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς *μεγίστου* ἢ *ἐλαχίστου*. Μεταξὺ τῶν τοιούτων προβλημάτων εἶναι καὶ τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ μονοπωλίου, θεωρούμενον ἀπὸ τῆς οἰκονομικῆς του πλευρᾶς καὶ μόνον καὶ μὴ λαμβανομένων ὑπ᾽ ὄψει τῶν ζητημάτων ἅτινα δημιουργεῖ ἀπὸ ἠθικῆς καὶ κοινωνικῆς ἀπόψεως, ἰδίᾳ ὅταν τοῦτο καθίσταται συνεχὲς ὡς ἀπότοκον εἴτε τῆς ἀνθρωπίνης προσπαθείας εἴτε τῆς ἰδιοτροπίας τῆς φύσεως. Ἡ ἀπουσία ἢ ἡ ἀπαλοιφή, ὁλικὴ ἢ μερική, τοῦ συναγωνισμοῦ δημιουργεῖ τὸ μονοπώλιον, τοῦ μονοπωλητοῦ καθισταμένου τότε *ἀληθοῦς κυριάρχου τῆς προσφορᾶς*. Κατὰ τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ἐκ πρώτης ὄψεως, φαίνεται ὅτι ἡ *τιμὴ πωλήσεως* εἶναι *ἀπροσδιόριστος*, ἅτε ἐξαρτωμένη, ἐξ ὁλοκλήρου, ἐκ τῆς αὐθαιρεσίας τοῦ μονοπωλητοῦ. Εἰς τὴν πραγματικότητα ἐν τούτοις, ὁ μονοπωλητὴς ὑπείκει εἰς τὴν γενικὴν ἀρχὴν τοῦ *προσωπικοῦ συμφέροντος* καὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως ἣν καθορίζει διέπεται ὑπὸ τῆς συνθήκης τοῦ *μεγίστου κέρδους*, καθ᾽ ὅσον οὗτος χάρις εἰς τὴν δεσποτείαν ἣν ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς δύναται τοῦ λοιποῦ νὰ λαμβάνῃ ὑπ᾽ ὄψει τὴν *προσφορὰν* εἰς τοὺς ὑπολογισμούς του καὶ δύναται νὰ χειρίζηται τὰ δύο μεταβλητά, *τιμὴ καὶ ποσότης* καθ᾽ ὃν τρόπον νομίζει προσφορώτερον καὶ νὰ ὀρθοῦται κατέναντι τῆς *ζητήσεως*, ἀδιαφορῶν διὰ τοὺς ἄλλους προσφέροντας. Ἡ ἐπιδίωξις τοῦ μεγίστου κέρδους ἐκ μέρους του θὰ διαταράσσεται ἐκ τῆς παρουσίας συναγωνιζομένων ἑτοίμων νὰ ἁρπάσωσιν παρὰ τούτου τὸ κέρδος. Τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον παρορᾶται ὑπ᾽ αὐτοῦ, οὐ μόνον διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς ἀλλὰ προσέτι καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς *κανονικῆς τιμῆς*. Τὰ πάντα πλέον ἐξαρτῶνται ἐκ *τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως*[1] καὶ ἐπειδὴ

[1] Ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως, καλεῖται τὸ πλάτος τῆς ἀντιδράσεως τῆς ζητήσεως εἰς τὰς διακυμάνσεις τῶν τιμῶν. Ἐὰν $x = \varphi(p)$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως ἡ ἐλαστικότης ταύτης μετρεῖται διὰ τοῦ ὁμωνύμου συντελεστοῦ καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $-\eta = \frac{d(\log x)}{d(\log p)} = \frac{dx}{x} : \frac{dp}{p} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$ καὶ δυνατὸν νὰ εἶναι $\eta > 1$, $\eta = 1$ καὶ $\eta < 1$, ἀναλόγως τῆς θέσεως ἣν κατέχει τὸ ὑπ᾽ ὄψει προϊὸν ἐν τῇ κλίμακι τῆς προτιμήσεως ὑπὸ ἔποψιν ἱκανοποιήσεως ἀναγκῶν.

αὕτη εἶναι ἐπὶ τοσοῦτον *ἄκαμπτος*, ὅσον αἱ ἐπιθυμίαι εἶναι μᾶλλον ἔντονοι καὶ ἐκτεταμέναι, ὁ μονοπωλητὴς ἀποβαίνει *ἀντικοινωνικὸν φαινόμενον*[2]. Ὁ ἀνταγωνισμὸς μεταξὺ τοῦ Δημοσίου καὶ ἰδιωτικοῦ συμφέροντος ἐνωρίτατα προσείλκυσε τὴν προσοχὴν τῶν οἰκονομολόγων, ἰδίᾳ τῶν Ἀναλυτικῶν τοιούτων ὡς οἱ Cournot καὶ Dupuis, διότι τὸ μονοπώλιον ἀντιτίθεται εἰς τὴν ἐπὶ μᾶλλον ἀνάπτυξιν τῶν ἐπιθυμιῶν τῶν ἀτόμων.

2.— Ἐν πάσῃ περιπτώσει δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λεχθῇ ὅτι ὁ μονοπωλητὴς τυγχάνει καὶ *παντοδύναμος*, διότι σπανίως οὗτος καθίσταται ἀπόλυτος τῆς ἀγορᾶς κύριος καὶ τοῦτο διότι ἡ ζήτησις ἐκφεύγει τούτου, ὡς πλειστάκις διαπιστοῦται. Ἐὰν προσφέρῃ τὸ ἐμπόρευμά του εἰς τοιαύτην τιμὴν ὥστε οὐδεὶς νὰ δύναται νὰ πληρώσῃ, ἐλλείψει ἐπαρκῶν μέσων ἀγορᾶς ἢ διότι ὑφίστανται *ὑποκατάστατα*, τὸ κέρδος τούτου μηδενίζεται καὶ δέον νὰ ὑποβιβάσῃ τὰς τιμάς. Κατὰ συνέπειαν τὸ ὅλον πρόβλημα εἶναι ***νὰ ἀνακαλύψῃ τὸ ἄριστον σημεῖον εἰς ὃ τὸ κέρδος του εἶναι μέγιστον.***

Ἡ τιμὴ ἣν οὕτω θὰ προσδιορίσῃ, γενικῶς, θὰ εἶναι ἀνωτέρα τῆς τιμῆς συναγωνισμοῦ, οὐχ ἧττον δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ μικροτέρα, ἐὰν ἡ μονοπωλήσασα τὴν παραγωγὴν ἐπιχείρησις, ἐπωφεληθεῖσα τῆς μεγίστης συγκεντρώσεως ἣν ἀπειργάσθη, περιώρισε τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς κάτω τοῦ ἐλαχίστου ὅπερ θὰ ἠδύναντο νὰ προσδοκῶσι αἱ ὁμοειδεῖς βιομηχανίαι ὑπὸ τὸ καθεστὼς τοῦ συναγωνισμοῦ καὶ κατέστη ἐπὶ πλέον, ἕνεκεν τούτου, ὁ προμηθευτὴς κοινωνικῶν τάξεων, αἵτινες μέχρι τότε εὑρίσκοντο ἐκτὸς τοῦ πλαισίου τῆς δράσεως τῶν βιομηχανιῶν τούτων.

3.— Τὰ στοιχεῖα ἅτινα, ἑπόμενος τῆς τεθείσης ἀρχῆς, ὀφείλει νὰ θεωρήσῃ ὁ μονοπωλητὴς εἶναι τὸ μὲν

---

[2] Ἐὰν κληθῇ R ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος τοῦ μονοπωλητοῦ, τότε θὰ ἔχωμεν $R = x.p.$ ὅπου x ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ p ἡ τιμὴ μονάδος. Ἡ σχετικὴ αὔξησις (εἰς τόσον τοῖς %) τῆς R θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς λογαριθμικῆς ταύτης παραγώγου ἤτοι ὑπὸ: $\frac{dR}{R} = \frac{dx}{x} + \frac{dp}{p}$, ἀλλὰ $-\eta = \frac{dx}{x} \cdot \frac{p}{dp}$ ἢ $-\eta \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, ὅθεν $\frac{dR}{R} = -\eta \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p} = (1 - \eta) \frac{dp}{p}$ Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀκαθάριστος εἴσπραξις εἶναι συνάρτησις αὔξουσα τῆς τιμῆς καὶ ἑπομένως συνάρτησις φθίνουσα τῆς πωλουμένης ποσότητος. Ἡ σχετικὴ αὔξησις (εἰς τόσον τοῖς %) τῆς ἀκαθαρίστου προσόδου $\frac{dR}{R}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ἐλαστικότητος η κυρίως καὶ οὐχὶ ἐκ τῆς σχετικῆς αὐξήσεως (εἰς τόσον τοῖς %) τῆς τιμῆς. Ὄντως ἂν $\eta = 0{,}60$ καὶ $\frac{dp}{p} = 0{,}80$, τότε $\frac{dR}{R} = (1 - 0{,}6)\, 0{,}8 = 0{,}32$ δηλ. ἐνῷ ἡ τιμὴ αὐξάνει κατὰ 80% ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος αὐξάνει μόνον κατὰ 32%. Ἂν ἀντιθέτως $\eta = 1{,}6$ τότε $\frac{dR}{R} = (1 - 1{,}6)0{,}8 = -0{,}48$ ἐνῷ ἡ τιμὴ δηλ. αὐξάνει κατὰ 80% ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος ἐλαττοῦται κατὰ 48% κλπ.

1ον Ἡ συνάρτησις $\Pi = F(x)$ τοῦ ὁλικοῦ κόστους διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἐμπορεύματος X, τὸ δὲ

2ον Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ τούτου, ἥτις ὑποτίθεται γνωστή, διδομένη ὑπὸ τῆς ὁμωνύμου συναρτήσεως ἀναλυτικῶς, εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν: $x = \varphi(p)$ εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν: $p = \psi(x)$ καὶ ὅπου x ἡ ζητουμένη ποσότης καὶ p ἡ τιμὴ μονάδος αὐτῆς.

Ἐντὸς τῶν ὑπὸ τῆς ζητήσεως τιθεμένων ὁρίων, ὁ μονοπωλητὴς παραγωγὸς ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον τὸ καθαρὸν κέρδος του.

4.— Πρὸς τοῦτο δύο ἀπόψεις δύνανται νὰ θεωρηθῶσι:

1ον *ὁ παραγωγὸς ὁρίζει τὴν παραγωγήν του καὶ ἀφίνει τὴν τιμὴν νὰ προσδιορισθῇ ὑπὸ τῶν συνθηκῶν τῆς ζητήσεως.*

2ον *ὁ παραγωγὸς ὁρίζει τὴν τιμὴν καὶ αἱ συνθῆκαι τῆς ζητήσεως καθορίζουσι τὴν προσιδιάζουσαν παραγωγήν.*

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος τοῦ μονοπωλίου κατ᾽ ἀμφοτέρας τὰς ὑποθέσεις εἶναι διάφορος, ἀλλὰ τὰ πορίσματα εἰς ἃ καταλήγομεν εἶναι πραγματικῶς ταὐτόσημα. Ἀναλύσωμεν ἑκάστην τῶν ὑποθέσεων διακεκριμένως.

5.— *Αη Ὑπόθεσις.*

Ἐπειδὴ ὁ παραγωγὸς ὁρίζει τὴν παραγωγήν του, ἡ τιμὴ p θὰ συνδέεται πρὸς ταύτην διὰ τῆς σχέσεως: $p = \psi(x)$, ὡς διδομένη ὑπὸ τῶν συνθηκῶν τῆς ζητήσεως. Τούτου τεθέντος τὸ μὲν ***ἀκαθάριστον κέρδος*** ἢ αἱ ***ἀκαθάριστοι εἰσπράξεις*** τούτου διὰ ζήτησιν x εἶναι: $R = xp$. (ζητηθεῖσα ποσότης ἐπὶ τιμὴν μονάδος) ἢ $R = x\,\psi(x)$, τὸ δὲ ὁλικὸν κόστος διὰ παραγωγὴν x εἶναι: $\Pi = F(x)$ καὶ ἑπομένως *αἱ καθαραὶ εἰσπράξεις* ἢ τὸ ***καθαρὸν κέρδος*** εἶναι: $E = R - \Pi$, διδόμενον ὡς συνάρτησις τοῦ x.

Ἡ ποσότης x προσδιορίζεται, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὑπὸ τοῦ παραγωγοῦ ὥστε νὰ *ἐπιτυγχάνεται μέγιστον καθαρὸν κέρδος*· κατ᾽ ἀνάγκην πρέπει νὰ πληροῖ κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως τὰς δύο ἑπομένας συνθήκας

$$(\alpha): \frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}(R - \Pi) = o \text{ ἢ } \frac{dR}{dx} = \frac{d\Pi}{dx} \text{ καὶ}$$

$$(\beta): \frac{d^2E}{dx^2} < o \text{ ἢ } \frac{d^2E}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}(R-\Pi)\right\} = \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^2\Pi}{dx^2} < o$$

$$\text{ἢ } \frac{d^2R}{dx^2} < \frac{d^2\Pi}{dx^2}$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνθήκης ἕπεται ὅτι: *Εἰς ζήτησιν ἰσορροπίας τὸ ὁρικὸν ἀκαθάριστον κέρδος ἰσοῦται πρὸς τὸ ὁρικὸν κόστος*[1].

[1] Ἐὰν ἡ ζήτησις αὐξάνῃ κατὰ ἐλάχιστα ποσὰ $\Delta x$ ἀπό τινος τοῦ x τιμῆς, τότε ἡ ὁλικὴ ἀκαθάριστος εἴσπραξις ἢ πρόσοδος θὰ αὐξάνῃ ἀλγεβρικῶς κατὰ τὸ ποσὸν $\Delta R$ ἤτοι θὰ γίνεται ἀπὸ $R = xp$, $R + \Delta R = (x + \Delta x)\,p$. Ἑπομένως ὑφίσταται μιὰ αὔξη-

Ἐκ τῆς δευτέρας συνθήκης ἕπεται ὅτι: *Εἰς ζήτησιν ἰσορροπίας τὸ ὁρικὸν ἀκαθάριστον κέρδος πρέπει νὰ αὐξάνῃ βραδύτερον τοῦ ὁρικοῦ κόστους.*

Ἡ δευτέρα αὕτη συνθήκη αὐτομάτως πληροῦται ἐάν, π. χ. τὸ ὁρικὸν κέρδος εἶναι φθῖνον ἐνῷ τὸ ὁρικὸν κόστος εἶναι αὖξον, ἐπειδὴ ἡ ζήτησις αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς ἐξ ἧς αἱ ὁρικαὶ αὗται ἔννοιαι εἶναι ἴσαι.

Ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐπὶ συγκεκριμένου παραδείγματος.

*Ἐφαρμογή :*

6.— Ἐργοστάσιόν τι παράγει x τόννους ἑβδομαδιαίως προϊόντος τινος A, μὲ ὁλικὸν κόστος διδόμενον ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $\Pi = \frac{x^2}{52} + 3x + 100$ δραχμαί, καὶ ὅπου αἱ παράμετροι $1/_{25}$, 3 καὶ 100 ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τεχνικῶν συνθηκῶν τῆς παραγωγῆς. Ἡ παραγωγὴ ὅμως αὕτη ἔχει μονοπωληθῆ ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς μὲ συνάρτησιν ζητήσεως, μορφῆς γραμμικῆς, τὴν

$x = 75 - 3p$, τόννοι ὅπου p ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος A κατὰ τόννον.

Νὰ προσδιορισθῇ διὰ ποίαν ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν ὑφίσταται τὸ μέγιστον καθαρὸν κέρδος;

Ἡ συνάρτησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι : $\Pi = \frac{x^2}{25} + 3x + 100$ δραχ. ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι : $x = 75 - 3p$ ἢ $p = 25 - \frac{x}{3}$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἀκαθάριστον κέρδος εἶναι : $R = x.\ p = 25x - \frac{x^2}{3}$ καὶ ἐπομένως τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι :

---

σις ἡ μείωσις τῆς προσόδου ταύτης, διδομένη ὑπὸ $\Delta R = p.\ \Delta x$, ἀναλόγως τοῦ σημείου τοῦ $\Delta R$. τὸ προστιθέμενον κέρδος κατὰ μονάδα προστιθεμένης ζητήσεως εἶναι τότε ὁ λόγος τοῦ $\Delta R : \Delta x$ δηλ. *τὸ μέσον κέρδος διὰ ζήτησιν ἀπὸ x εἰς x+Δx.* Ἐπειδὴ δὲ ἡ ζήτησις μεταβάλλεται, καθισταμένη μικροτέρα, εὑρίσκομεν τὸν λόγον τῆς μεταβολῆς τοῦ κέρδους ἐπὶ τοῦ περιθωρίου τῆς ζητήσεως ὡς τὸ ὅριον τοῦ $\frac{\Delta R}{\Delta x}$, ὅταν τὸ $\Delta x$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Τοῦτο καλεῖται *ὁρικὸν κέρδος* (marginal) καὶ μετρεῖται ὑπὸ τῆς παραγώγου τοῦ R (ἀκαθαρίστου κέρδους) ὡς συναρτήσεως τοῦ x ἤτοι ὑπὸ $\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{x\psi(x)\right\}$. Φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ *ὁρικὸν κέρδος* ἀποτελεῖ *ἔννοιαν ἀφῃρημένην*, ἥτις ὁρίζεται μόνον διὰ συνεχεῖς μεταβολὰς τοῦ κέρδους καὶ τῆς ζητήσεως καὶ τοῦτο, προσεγγιζόντως, ἰσοῦται πρὸς τὸ προστιθέμενον κέρδος ὅπερ προκύπτει ἐκ μικρᾶς αὐξήσεως τῆς ζητήσεως ἐκ τῆς τιμῆς x. Ὁμοίως δύναται νὰ ὁρισθῇ τὸ ὁρικὸν *ὁλικὸν κόστος* σχετικῶς ὡς πρός τινα παραγωγὴν x καὶ παριστᾶ τοῦτο $\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$ τὴν ἀναγκαιοῦσαν αὔξησιν τοῦ ὁλικοῦ κόστους διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς ἐπὶ πλέον μονάδος προϊόντος, ἤτοι κατά, *προσέγγισιν ἀπειροστοῦ*, τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ *μερικοῦ κόστους* δηλ. τοῦ κόστους τῆς τελευταίας παραχθείσης μονάδος τοῦ προϊόντος, τῆς μᾶλλον οἰκονομικῶς ἐπαχθοῦς, ὅτε καὶ ἡ τιμὴ τοῦ μερικοῦ κόστους καλεῖται : *κόστος τῆς ὁρικῆς παραγωγῆς.* κ.λ.π.

$$E = R - \Pi.$$

'Εφαρμόζοντες τὴν πρώτην συνθήκην ἔχομεν

$$\frac{dR}{dx} = 25 - \frac{2x}{3} \text{ καὶ } \frac{d\Pi}{dx} = \frac{2x}{25} + 3, \text{ ἄρα}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\Pi}{dx} \text{ ἢ } 25 - \frac{2x}{3} = \frac{2x}{25} + 3 \text{ ἢ}$$

$22 = \frac{2x}{25} + \frac{2x}{3} = \frac{56x}{75}$, ἐξ οὗ $x = 29,46$ ἢ κατὰ προσέγγισιν $x = 30$ τόννοι ἑβδομαδιαίως. 'Εὰν ὅθεν τεθῇ εἰς τὴν $p = 25 - \frac{x}{3} \cdot x = 30$, τότε $p = 15$ καὶ ἑπομένη ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος εἶναι

$$R = 15.30 = 450 \text{ δρ.}$$

καὶ τὸ ὁλικὸν κόστος $\Pi = \frac{900}{25} + 3.30 + 100 = 226$ δρ. ἤτοι τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι $E = 450 - 226 = 224$ δραχμαί.

Διά τινα ἄλλην τοῦ x τιμὴν π. χ. $x = 40$, τότε

$p = 11,67$ καὶ ἑπομένως $R = 40.\ 11,67 = 466,80$ δραχμαί.

Τὸ ὁλικὸν κόστος εἶναι $\Pi = \frac{40^2}{25} + 3.40 + 100 = 284$ δραχμαὶ καὶ ἑπομένως τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι

$E = R - \Pi = 466,80 - 28,4 = 182,80$ δραχμαὶ ἐξ οὗ ἀποδεικνύεται ὅτι, *τὸ μέγιστον καθαρὸν κέρδος ὑφίσταται ὅταν ἡ ἑβδομαδιαία παραγωγὴ εἶναι 30 τόννοι.*

7 *Β*α *ὑπόθεσις.*

'Επειδὴ ὁ παραγωγὸς ὁρίζει τὴν τιμὴν καὶ ἡ παραγωγή του πρέπει νὰ ταὐτίζηται μετὰ τῆς ζητήσεως κατ' ἀνάγκην θὰ ἔχωμεν $x = \varphi(p)$.

'Ομοίως, θὰ ἔχωμεν $R = x.p = p\,\varphi(p)$ ἀφ' ἑνὸς καὶ $\Pi = F(x) = F\{\varphi(p)\}$ ἀφ' ἑτέρου. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ καθαρὸν κέρδος μὲ τιμὴν p εἶναι καὶ πάλιν $E = R - \Pi$ καὶ θὰ εἶναι μέγιστον ἐὰν ἔχωμεν

$$(\alpha)\ \frac{d}{dp}(R - \Pi) = o \text{ καὶ } (\beta)\ \frac{d^2}{dp^2}(R - \Pi) < o$$

'Η πρώτη συνθήκη δίδει

$$\frac{d}{dp}\left\{p\varphi(p)\right\} = \frac{d\Pi}{dp} \text{ ἢ } \varphi(p) + p\varphi'(p) = \frac{d\Pi}{dx}\varphi'(p)$$

$$\text{ἐπ δ } \frac{d\Pi}{dp} = \frac{d\Pi}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} \text{ καὶ ἐκ τῆς } x = \varphi(p), \frac{dx}{dp} = \varphi'(p).$$

'Η ἐξίσωσις ἥτις δέον νὰ λυθῇ διὰ τὴν τιμὴν ἰσορροπίας εἶναι ἡ

$$\varphi(p) + p\varphi'(p) - \frac{d\Pi}{dp}\varphi'(p) = o \text{ ἢ } \varphi(p) + p - \frac{d\Pi}{dx})\varphi'(p) = o$$

καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη δίδει

$$\frac{d}{dp}\left\{\frac{d}{dp}(R - \Pi)\right\} < o \quad ἢ$$

$$\frac{d}{dp}\left\{\varphi(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\varphi'(p)\right\} < o \quad ἢ$$

$$\varphi'(p) + \varphi''(p).\, p + \varphi'(p) - \frac{d^2\Pi}{dx^2}\varphi'(p) - \frac{d\Pi}{dx}\varphi''(p) < o$$

$$ἢ \quad \left\{2 - \frac{d^2\Pi}{dx^2}\right\}\varphi'(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\varphi''(p) < o$$

Ἡ τιμὴ τοῦ p ἥτις ἐπαληθεύει τὴν ἐκ τῆς συνθήκης (α) ἐξίσωσιν καὶ πληροῖ τὴν ἐκ τῆς συνθήκης (β) ἀνισότητα εἶναι *ἡ δυνατὴ μονοπωλιακὴ τιμὴ* p καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς ταύτην συνάρτησις ζητήσεως ἡ: $x = \varphi(p)$.

Ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐπὶ συγκεκριμένου παραδείγματος.

*Ἐφαρμογή.*

8.— Ἐργοστάσιόν τι παράγει ἑβδομαδιαίως x τόννους, μὲ τιμὴν ὁλικοῦ κόστους διδομένην ὑπὸ τῆς ὁμωνύμου συναρτήσεως $\Pi = \frac{x^2}{25} + 3x + 100$ δρ. Τοῦτο ἔχει μονοπωλήσει τὴν ἀγορὰν μὲ συνάρτησιν ζητήσεως διδομένην ὑπὸ τῆς ἀναλυτικῆς σχέσεως $x = 100 - 20\sqrt{p}$ τόννους, διὰ κάθε ἑβδομάδα. Ζητεῖται νὰ καθορισθῇ διὰ ποίαν ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν ὑφίσταται μέγιστον καθαρὸν κέρδος;

Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα ἔχομεν $R = x\,p = p.\,\varphi(p)$ οὕτω

$$\varphi(p) = 100 - 20\sqrt{p} \quad καὶ \quad \Pi = F(x) = \frac{x^2}{25} + 3x + 100 = F\{\varphi(p)\}$$

ἑπομένως $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{2x}{25} + 3$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ ἴσου τοῦ

$$x = 100 - 20\sqrt{p},$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{2(100 - 20\sqrt{p})}{25} + 3 = 8 - \frac{40}{25}\sqrt{p} + 3 \quad καὶ$$

$$τέλος \quad \frac{d\Pi}{dx}\cdot\varphi'(p) = \left(11 - \frac{40\sqrt{p}}{25}\right)\left(-\frac{10}{\sqrt{p}}\right), \quad καθ' ὅσον$$

$$\varphi'(p) = -\frac{20}{2\sqrt{p}} = -\frac{10}{\sqrt{p}}\cdot \quad Κατ' ἀκολουθίαν\ ἡ\ ἐξίσωσις$$

$$\varphi(p) + p\varphi'(p) = \frac{d\Pi}{dx}\varphi'(p) \quad γράφεται\ ὡς\ ἕπεται:$$

$$(100 - 20\sqrt{p}) + p\left(-\frac{10}{\sqrt{p}}\right) = -\frac{110}{\sqrt{p}} + \frac{400}{25} = -\frac{110}{\sqrt{p}} + 16$$

$$ἢ \quad 100 - 20\sqrt{p} - 10\sqrt{p} = 16 - \frac{110}{\sqrt{p}} \quad ἢ$$

$$84 = 30\sqrt{p} - \frac{110}{\sqrt{p}} \quad ἢ\ τέλος$$

$$30\,p - 84\sqrt{p} - 110 = 0$$

$$30p - 84\sqrt{p} - 110 = 0 \quad καὶ\ τέλος$$

$$\sqrt{p} = \frac{84 \pm \sqrt{84^2 + 4.30.110}}{60.}$$

Θεωροῦμεν ἤδη μόνον τὴν θετικὴν ῥίζαν: $\sqrt{p} = 3,76$.

Ἑπομένως: $x = 100 - 20\sqrt{p} = 100 - 20.\,3,76 = 24,8$ τόν. ἑβδομαδιαίως ἢ καθ' ὑπεροχὴν $x = 25$

Αἱ ἀκαθάριστοι εἰσπράξεις εἶναι $R = x.p = 25.14,14$ (δεδομένου ὅτι $p = (3,76)^2 = 14,1376$).). ἢ $R = 353,50$ δραχμ. τὸ ὁλικὸν κόστος δι' ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν $x = 25$ τόννοι εἶναι

$$\Pi = \frac{x^2}{25} + 3x + 100 = \frac{625}{25} + 3.25 + 100 = 200 \text{ δρ.}$$

ἑπομένως τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι $E = R - \Pi = 353,50 - 200 = 153,50$ δρ.

Ἐὰν τεθῇ $p = 16$, τότε $x = 100 - 20\sqrt{p} = 100 - 20\sqrt{16} = 20$ καὶ ἄρα $R = 20.16 = 320$ δρ. ὁμοίως $\Pi = \frac{400}{25} + 3.20 + 100 = 176$ δρ. Κατὰ συνέπειαν τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι $E = 320 - 176 = 144$, δρ. δηλ. μικρότερον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τιμὴν ἰσορροπίας $p = 14,14$ καὶ ἑπομένως τὸ μέγιστον καθαρὸν κέρδος ὑφίσταται διὰ ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν $x = 25$ τόννοι.

9.— Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παρούσης ὅμως ἐτονίσαμεν ὅτι ἀμφότεραι αἱ εἰσαγόμεναι ὑποθέσεις πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου καθαροῦ κέρδους ὅπερ ἐπιδιώκει ὁ μονοπωλητὴς ἄγουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Πράγματι, κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν ἔχομεν

$$\varphi(p) + p\varphi'(p) = \frac{d\Pi}{dx}\varphi'(p) \text{ ἢ}$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{\varphi(p) + p\varphi'(p)}{\varphi'(p)} \quad (1)$$

ἀλλὰ $R = x.\,p = p.\varphi(p)$, ἐπειδὴ $x = \varphi(p)$, κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{dR}{dp} = \varphi(p) + p\varphi'(p) \text{ καὶ ἐκ τῆς: } x = \varphi(p),\ \frac{dx}{dp} = \varphi'(p).$$

Ἀντικαθιστῶντες ὅθεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) διὰ τοῦ ἴσου του: $\frac{dR}{dp}$ καὶ τὸν παρονομαστήν, ὁμοίως, διὰ τοῦ ἴσου του: $\frac{dx}{dp}$, ἔχομεν τελικῶς

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{\frac{dR}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{\frac{dR}{dp}\cdot\frac{dx}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{dR}{dx}$$

δηλ. $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{dR}{dx}$

ἤτοι *τὸ ὁρικὸν ὁλικὸν κόστος ἰσοῦται τῷ ὁρικῷ ἀκαθαρίστῳ κέρδει* κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν ἐφ' ὅσον ἐκ τῶν πορισμάτων τῆς δευτέρας ὑποθέσεως καταγόμεθα εἰς τὰ πορίσματα τῆς πρώτης ὑποθέσεως, ἀμφότερα τὰ πορίσματα εἶναι πραγματικῶς ταὐτόσημα.

## Β΄ ΠΕΡΙ ΔΥΟΠΩΛΙΟΥ

10.—*Ὅταν ὑφίστανται δύο μόνον πωληταί, παραγωγοὶ τοῦ αὐτοῦ ἀκριβῶς προϊόντος, συναγωνιζόμενοι καὶ ἀντιτιθέμενοι πρὸς μέγαν ἀριθμὸν ἀγοραστῶν τότε λέγομεν ὅτι ὑφίσταται δυοπώλιον.*

Κατὰ ταῦτα ἡ ὁλικὴ ζήτησις τῆς ἀγορᾶς διὰ προϊόν τι ὡρισμένον παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως: $p = \psi(x)$, συνδεούσης τὴν τιμὴν μονάδος p τοῦ προϊόντος τούτου καὶ τὴν ζητουμένην ποσότητα x, μὲ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Ἡ παραγωγὴ τοῦ ὑπ᾽ ὄψει προϊόντος X κατανέμεται μεταξὺ τῶν δύο παραγωγῶν οἵτινες πωλοῦσι μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν μονάδος.

Ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν παράγει τὸ ποσὸν x μὲ τιμὴν ὁλικοῦ κόστους: $\Pi_1 = F_1(x_1)$ δραχμῶν (συνάρτησις ὁλικοῦ κόστους, τῆς ἀναλυτικῆς μορφῆς τῆς $\Pi_1$, ἐξαρτωμένης ἐκ τῶν τεχνικῶν συνθηκῶν τῆς παραγωγῆς ἀφ᾽ ἑνὸς καὶ τῶν συνθηκῶν προσκτήσεως τῶν μεταβλητῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἀφ᾽ ἑτέρου, τῆς συναρτήσεως ταύτης ἐξεταζομένης Στατικῶς).

Ὁ δεύτερος ἐξ αὐτῶν παράγει, ἐπίσης, τὸ ποσὸν $x_2$ μὲ τιμὴν ὁλικοῦ κόστους: $\Pi_2 = F_2(x_2)$.

*Ἡ Κατανομὴ τῆς ἀγορᾶς (ζητήσεως) μεταξὺ τῶν δύο δυοπωλητῶν, ὁλοκληρωτικῶς, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς εἰσαγομένης ὑποθέσεως ἐπὶ τῆς ἀντιδράσεως ἣν θὰ ἀντιτάξῃ ὁ ἕτερος ἐξ αὐτῶν, ὅταν ὁ ἕτερος ἤθελε, τυχόν, ἐπιδείξει πρωτοβουλίαν τινα τείνουσαν νὰ ἐκδιώξῃ τοῦτον ἐκ τῆς ἀγορᾶς ἢ νὰ περιορίσῃ κατὰ πολὺ τὴν ζήτησίν του.*

Κατὰ συνέπειαν τῶν ἀνωτέρω διάφοροι ὑποθέσεις δύνανται νὰ υἱοθετηθῶσι: Θὰ ἐξετάσωμεν ταύτας διαδοχικῶς.

### *Ὑπόθεσις Α (ὑπόθεσις τοῦ Cournot).*

11.—Ἡ ἁπλουστέρα ὑπόθεσις ἥτις δύναται νὰ γίνῃ ἀποδεκτὴ εἶναι νὰ ὑποτεθῇ ὅτι: *ἕκαστος τῶν δυοπωλητῶν τροποποιεῖ μόνον τὴν ποσότητα ἣν αὐτὸς οὗτος προσφέρει ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ προσδοκᾷ ὅτι ἡ προσφερομένη ποσότης ὑπὸ τοῦ ἀντιπάλου θὰ παραμείνῃ σταθερὰ (ἀναλλοίωτος).* Ἐν ἄλλαις λέξεσι τὸ ρεῦμα ζητήσεως ὑφίσταται ὑπὲρ τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ, παρὰ τὴν παρ᾽ αὐτοῦ ἐπιφερομένην μεταβολὴν ἐπὶ τῆς ζητήσεως, ὑποτίθεται ὅτι θὰ μένῃ ἀδιατάρακτον καὶ μετὰ τὴν τοιαύτην μεταβολήν, τοῦ ἀντιπάλου του οὐδεμίαν προβάλλοντος ἀντίδρασιν.

Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκδοχὴν ταύτην *κάθε δυοπωλητὴς* ἀποβλέπει εἰς τὸν τοιοῦτον προσδιορισμὸν ἢ μᾶλλον χειρισμὸν τῆς ζητήσεώς του, οὕτως ὥστε νὰ προκύψῃ διὰ τοῦτον *μέγιστον καθαρὸν κέρδος.*

Ἐὰν ζητούμεναι ποσότητες $x_1$ καὶ $x_2$ προσδιορίζωνται ὑπὸ τῶν δύο δυοπωλητῶν, ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος ὁρίζεται ὑπό: $p = \psi(x)$ ὅπου $x = x_1 + x_2$ ἡ συνολικῶς ζητουμένη ποσότης τούτου.

Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ, ὅπως καὶ κατὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλίου, εἶναι $R_1 - \Pi_1 = x_1 p - \Pi_1$, ὅπου $R_1$ ἡ ἀκαθάριστος πρόσοδος (γινόμενον ζητουμένης ποσότητος $x_1$ ἐπὶ τιμὴν πωλήσεως μονάδος αὐτῆς). Ἵνα τὸ καθαρὸν κέρδος εἶναι μέγιστον, ἡ ποσότης $x_1$ ἥτις ζητεῖται πρέπει νὰ ληφθῇ τοιαύτη οὕτως ὥστε ἡ παράγωγος τοῦ $(R_1 - \Pi)$ ἢ $x_1 p - \Pi_1$ νὰ μηδενίζεται, ἤτοι: $\frac{d}{dx_1}(x_1 p - \Pi_1) = 0$ ἢ $\frac{d(x_1 p)}{dx_1} = \frac{d\Pi_1}{dx_1}$.

Ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης εἶναι ἡ γνωστὴ τοιαύτη ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τοῦ *ὁρικοῦ ἀκαθαρίστου κέρδους* καὶ τοῦ *ὁρικοῦ ὁλικοῦ κόστους*. Ἡ μόνη δυσκολία ἥτις ὑφίσταται νῦν εἶναι νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ὁρικὸν ἀκαθάριστον κέρδος ὑπὸ μορφὴν προσήκουσαν.

Ἀλλά: $x = x_1 + x_2$ καί: $x_1 p = x_1 \psi(x)$, δεδομένου ὅτι: $p = \psi(x)$.

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{d}{dx_1}(x_1 p) = \frac{d}{dx_1}\left\{x_1 \psi(x)\right\} = \psi(x) + \frac{x_1}{dx_1}\psi(x)\frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2)$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς προϋποθέτει ὅτι ἡ ζήτησις τοῦ δευτέρου $x_2$ παραμένει σταθερά: $\frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2) = 1$, συνεπῶς $\frac{d}{dx_1}(x_1 p) = \psi(x) + x_1 \psi'(x)$ δηλ. *τὸ ὁρικὸν ἀκαθάριστον κέρδος* τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ ἐξεφράσθη εἰς ὅρους ἀφ' ἑνὸς τῆς συνολικῆς ζητήσεως καὶ ἀφ' ἑτέρου τῆς ἰδίας αὐτοῦ ζητήσεως $x_1$ καὶ μόνον.

12.—Ὅθεν διὰ δεδομένην ζήτησιν $x_2$ τοῦ δευτέρου δυοπωλητοῦ, ***σταθερὰν ὑποτιθεμένην***, ἡ ἐξίσωσις ἥτις προσδιορίζει τὴν ζήτησιν $x_1$ τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ εἶναι ἡ:

$$\psi(x) + x_1 \psi'(x) = \frac{d\Pi_1}{dx_1}$$

Ὁμοίως δεχόμενοι ὅτι ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ $x_1$ εἶναι *σταθερά*, ἡ ζήτησις $x_2$ τοῦ δευτέρου δυοπωλητοῦ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως: $\psi(x) + x_2 \psi'(x) = \frac{d\Pi_2}{dx_2}$ διὰ τοὺς αὐτοὺς ἀκριβῶς λόγους ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ.

Τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων:

$$\psi(x) + x_1 \psi'(x) = \frac{d\Pi_1}{dx_1} \quad (1)$$

$$\psi(x) + x_2 \psi'(x) = \frac{d\Pi_2}{dx_2} \quad (2)$$

ἀρκεῖ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ζητήσεως ἑκατέρου τῶν δυοπωλητῶν, τῆς ὁλικῆς ζητήσεως καὶ τῆς τιμῆς μεθ' ἧς αὕτη διατίθεται ἀμέσως προσαρμοζομένης.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει τὴν ζήτησιν τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ συναρτήσει τῆς, *οἱασδήποτε*, ζητήσεως τοῦ δευτέρου, δηλ. δίδει τὸ $x_1$ συναρτήσει τοῦ $x_2$. Δύναται, *ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας*, νὰ γίνῃ δεκτὸν ὅτι αὔξησις τοῦ $x_2$ συνεπάγεται μείωσιν τοῦ $x_1$ κατὰ ποσὰ μικρά.

Ἡ ἐξάρτησις τοῦ $x_1$ ἀπὸ τοῦ $x_2$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1), εἰδικώτερον καλουμένης *καμπύλης ἀντιδράσεως* $C_1$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $Ox_1$ $x_2$ καὶ πρέπει νὰ θεωρῆται πρὸς τὸν ἄξονα $Ox_2$. Ταύτης ὁ γωνιώδης συντελεστὴς εἶναι ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος (δηλ. τῆς εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἐφαπτομένης). Ὁμοίως ἡ ἐξάρτησις τοῦ $x_2$ ἀπὸ τοῦ $x_1$ δύναται, ἐπίσης, νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2), καλουμένης εἰδικώτερον, *καμπύλης ἀντιδράσεως* $C_2$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀναφερομένης πρὸς τὸν ἄξονα $Ox_1$. Ταύτης, ἐπίσης, ὁ γωνιώδης συντελεστὴς εἶναι ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος. Αἱ δύο καμπῦλαι ἀντιδράσεως $C_1$ καὶ $C_2$ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M. συντεταγμένων $x_1$ καὶ $x_2$, *ὅπερ*, ὡς εἰκός, ***εἶναι τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῶν ζητήσεων*** $x_1$ καὶ $x_2$

14.—Εἰδικὴ περίπτωσις εἶναι ὅταν καὶ οἱ δύο δυοπωληταὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν συνάρτησιν ὁλικοῦ κόστους $\Pi = F(x)$, ὅτε αἱ ἐξισώσεις αἵτινες παρέχουσι τὴν ζήτησιν ἑκατέρου τούτων εἶναι αἱ;

$$\psi(x)+x_1\psi'(x)=F'(x_1)\ (3) \quad \text{καὶ} \quad \psi(x)+x_2\psi'(x)=F'(x_2)\quad (4).$$

Ἡ καμπύλη ἀντιδράσεως $C_1$ ὁρωμένη ἀπὸ τοῦ ἄξονος $Ox_2$ εἶναι τώρα ἀκριβῶς ὁμοιόμορφος πρὸς τὴν τοιαύτην $C_2$ ὁρωμένην ἀπὸ τοῦ ἄξονος $Ox_1$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M, τῆς τομῆς τῶν δύο καμπύλων, $x_1$ καὶ $x_2$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι. Κατ' ἀκολουθίαν, ὡς ἄλλως τε ἀνεμένετο ***ἡ ὁλικὴ ζήτησις καταμερίζεται ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν δύο δυοπωλητῶν*** ἤτοι; $x_1 = x_2 = \frac{x}{2}$ καὶ ἐπομένως αἱ δύο ἐξιώσεις (3) καὶ (4) γίνονται:

$$\psi(x)+x_1\psi'(x)=F'(x_1) \quad \psi(x)+x_2\psi'(x)=F'(x_2).$$

$$\text{ἢ}\ \ 2\psi(x)+(x_1+x_2)\ \psi\ (x)=F'(x_1)+F'(x_2)=F'(x_1+x_2)$$

$$\text{ἀλλὰ}\ \ x=x_1+x_2 \ \ \text{ὅθεν}\ \ 2\psi(x)+x\psi'(x)=F'(x)$$

$$\text{ἢ} \quad \psi(x)+\frac{x}{2}\psi'(x)=F'\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ἐὰν τώρα πάλιν κάθε δυοπωλητὴς παράγει μὲ ὁλικὸν κόστος *σταθερόν*, τότε $F'\left(\frac{x}{2}\right)=0$ καὶ ἡ ὁλικὴ ζήτησις θὰ καταμερίζεται καὶ αὖθις ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν δύο δυοπωλητῶν, διδομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$\psi(x)+\frac{x}{2}\ \psi'(x)=0 \ \ \text{ἢ}\ \ \psi(x)+\psi(x)+x\psi'(x)=\psi(x)+\frac{d}{dx}\left\{x\psi(x)\right\}=0$$

Ἡ σχέσις $\psi(x)+\frac{d}{dx}\left\{x\psi(x)\right\}=0$ δεικνύει ὅτι:

*ἡ ὁλικὴ ζήτησις εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ μέσου καὶ τοῦ ὁρικοῦ* *κέρδους, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς ὁλικῆς ζητήσεως* $p = \psi(x)$ *εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν*[1].

Ἀποσαφηνίσωμεν τὰ ἀνωτέρω διὰ συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

***Παράδειγμα 1.***

15.—Ἡ ζήτησις τῆς ἀγορᾶς διά τι ἀγαθὸν ὡρισμένον δίδεται ὑπὸ τῆς ὁμωνύμου συναρτήσεως $p = 25 - \frac{x}{3}$ δρ. Ἡ ἀγορὰ ἐφοδιάζεται ὑπὸ δύο δυοπωλητῶν παραγόντων μὲ ὁλικὸν κόστος ὁ μὲν Πρῶτος : $\Pi_1 = \frac{x_1^2}{25} + 3x_1 + 100$ δρ. ὁ δὲ δεύτερος : $\Pi_2 = \frac{x_2^2}{10} + 5x_2 + 80$ δρ.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι αἱ ἀντιδράσεις τοῦ ἑτέρου ἐπὶ πάσης μεταβολῆς τῆς ζητήσεως ἥτις προκαλεῖται ὑπὸ τοῦ ἄλλου εἶναι ἀνύπαρκτοι, νὰ καθορισθῇ ποία ἡ ζήτησις ἰσορροπίας ἑκατέρου ;

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) παρέχει τὴν ζήτησιν ἑκατέρου

$$\text{ἤτοι}\quad \psi(x) + x_1\psi'(x) = \frac{d\Pi_1}{dx_1} \qquad (\alpha)$$

$$\psi(x) + x_2\psi'(x) = \frac{d\Pi_2}{dx_2} \qquad (\beta)$$

Ἀλλὰ $\psi(x) = 25 - \frac{x}{3}$ καὶ $\psi'(x) = -\frac{1}{3}$. Ἐπίσης $\Pi_1 = \frac{x_1^2}{25} + 3x_1 + 100$

$$\text{καὶ}\quad \Pi_2 = \frac{x_2^2}{10} + 5x_2 + 80$$

$$\text{ὅθεν}\quad \frac{d\Pi_1}{dx_1} = \frac{2x_1}{25} + 3 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d\Pi_2}{dx_2} = \frac{x_2}{5} + 5$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς (α) καὶ (β) τὰς $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\frac{d\Pi_1}{dx_1}$ καὶ $\frac{d\Pi_2}{dx_2}$ διὰ τῶν ἴσων των λαμβάνομεν.

$$25 - \frac{x}{3} - \frac{x_1}{3} = \frac{2x_1}{25} + 3 \quad \text{ἢ} \quad 22 = \frac{2x_1}{25} + \frac{x_1}{3} + \frac{x}{3} \qquad (\gamma)$$

$$\text{καὶ}\quad 25 - \frac{x}{3} - \frac{x_2}{3} = \frac{x_2}{5} + 5 \qquad \text{ἢ} \qquad 20 = \frac{x_2}{5} + \frac{x_2}{3} + \frac{x}{3} \qquad (\delta)$$

Ἀλλὰ $x = x_1 + x_2$ ἐπομένως αἱ ἐξισώσεις (γ) καὶ (δ) γράφονται

$$\frac{2x_1}{25} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 22 \quad \text{ἢ} \quad \frac{2x_1}{25} + \frac{2x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 22 \qquad (\varepsilon)$$

$$\frac{x_2}{5} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 20 \quad \text{ἢ} \quad \frac{x_2}{5} + \frac{2x_2}{3} + \frac{x_1}{3} = 20 \qquad (\zeta)$$

---

[1] Τὸ ἀκαθάριστον κέρδος εἶναι $R = xp = x\psi(x)$ καὶ ἐπομένως τὸ μέσον ἀκαθάριστον κέρδος κατὰ μονάδα προϊόντος εἶναι $\pi = \frac{R}{x} = \psi(x)$

$$\text{ἐξ ἑτέρου}\quad \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp) = \frac{d}{dx}\left\{x.\psi(x)\right\}$$

εἶναι τὸ ὁρικὸν ἀκαθόριστον κέρδος.

Αἱ ἐξισώσεις (ε) καὶ (ζ) τελικῶς γίνονται $\left.\begin{array}{l} 56x_1+25x_2=1650 \\ 5x_1+13x_2=300 \end{array}\right\}$ (η)

Λύοντες νῦν τὸ σύστημα (η) εὑρίσκομεν

$x_1=23,6$ ἢ $x=24$ καὶ $x_2=14$ ἄρα $x=x_1+x_2=38$

ἑπομένως ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου εἶναι τὰ 63% τῆς ὁλικῆς ζητήσεως καὶ ἡ ἑνιαία τιμὴ τῆς ἀγορᾶς: $p=25-\frac{x}{3}=25-\frac{38}{3}$ ἢ $p=12,4$ δρ.

***Παράδειγμα 2.***

16.—Δύο δυοπωληταὶ παράγουσι μὲ τὴν αὐτὴν συνάρτησιν ὁλικοῦ κόστους: $\Pi=\frac{x^2}{25}+3x+100$ δρ. διὰ x μονάδας προϊόντος ἑβδομαδιαίως. Ὅταν ἡ τιμὴ εἶναι p δρ. κατὰ μονάδα προϊόντος, ἡ ἑβδομαδιαία ζήτησις τῆς ἀγορᾶς δίδεται ὑπό: $x=75-3p$. Ποία ἡ ὁλικὴ ἰσορροπία ζητήσεως; Ἡ ἐξίσωσις ἥτις δίδει ταύτην, κατὰ τὰ προλεχθέντα, εἶναι ἡ

$$\psi(x)+\frac{x}{2}\psi'(x)=F'\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (\vartheta)$$

$$\text{ὅπου } \psi(x)=p=25-\frac{x}{3},\ F(x)=\frac{x^2}{25}+3x+100$$

Ἑπομένως:

$$\psi'(x)=-\frac{1}{3} \text{ καὶ } F'(x)=\frac{2x}{25}+3 \text{ ὅθεν καὶ } F'\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{25}+3$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ (ϑ) γράφεται:

$$25-\frac{x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{x}{25}+3 \text{ ἢ } \frac{x}{25}+\frac{x}{2}=22$$

$$\text{ἢ} \qquad x=\frac{22.50}{27}=40,74$$

καὶ καθ' ὑπεροχὴν $x=41$ μονάδες προϊόντος εἶναι ἡ ζήτησις ἰσορροπίας, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμή: $p=25-\frac{x}{3}=25-\frac{41}{3}=11,4$.

Ἐὰν ἀντὶ δυοπωλίου ὑφίστατο μονοπώλιον τότε θὰ ἔδει νὰ ἔχωμεν:

$$\psi(x)+x\psi'(x)=\frac{d\Pi_1}{dx_1} \text{ ἢ } 25-\frac{x}{3}-\frac{x}{3}=\frac{2x}{25}+3 \text{ ἢ } \frac{2x}{25}+\frac{2x}{3}=22 \qquad \text{ἢ}$$

$$x=\frac{22.75}{56}=29,46 \text{ ἢ } x=30 \text{ ὅτε } p=25-\frac{30}{3}=15 \text{ δρ.}$$

Δηλ. *ἐὰν ὑφίστατο μονοπώλιον τότε ἡ μὲν ζήτησις θὰ ἦτο μικροτέρα καὶ ἡ τιμὴ μείζων.*

Τὸ καθαρὸν κέρδος ἐν περιπτώσει δυοπωλίου εἶναι

$$E=xp-\Pi=41.11,4-\frac{41^2}{25}-3.41-100=467,4-290,24 \text{ ἢ } E=177,16$$

ὁμοίως τὸ καθαρὸν κέρδος ἐν περιπτώσει μονοπωλίου εἶναι:

$$E=xp-\Pi=30.15-226=224.$$

Δηλ. *εἰς περίπτωσιν μονοπωλίου τὸ καθαρὸν κέρδος ὅπερ πραγματο-*

*ποιεῖ ὁ μονοπωλητὴς εἶναι μεῖζον ἢ εἰς περίπτωσιν δυοπωλίου, ἐξ οὗ καὶ τὸ ἀντικοινωνικὸν τούτου, περιστέλλοντος τὴν ἀνάπτυξιν οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν ἐπιθυμιῶν καὶ ἀναγκῶν τῶν καταναλωτῶν.*

***Παράδειγμα 3.***

17.—Δύο δυοπωληταὶ παράγουσι τὸ αὐτὸ προϊὸν μὲ τιμὴν ὁλικοῦ κόστους $\Pi = \frac{x_2}{25} + 3x + 100$ δρ. διὰ x μονάδας προϊόντος καθ' ἑβδομάδα. 'Εὰν ἡ ζήτησις τῆς ἀγορᾶς δίδεται ὑπὸ $x = 10\sqrt{25-p}$ νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ καμπῦλαι ἀντιδράσεως ἑκάστου αἵτινες θὰ εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ ὁλικὴ καθ' ἑβδομάδα ζήτησις, τῶν ὑποθετικῶν μεταβολῶν αὐτῶν θεωρουμένων ὡς ἴσων πρὸς τὸ μηδέν.

Αἱ καμπῦλαι ἀντιδράσεως εἶναι

$$\psi(x) + x_1\psi'(x) = \frac{d\Pi_1}{dx_1} \quad \text{καὶ} \quad \psi(x) + x_2\psi'(x) = \frac{d\Pi_2}{dx_2}$$

$$\text{ἀλλὰ } p = 25 - \frac{x^2}{100} \text{ ἢ } \psi(x) = 25 - \frac{x^2}{100} \text{ καὶ } \psi'(x) = -\frac{2x}{100} = -\frac{x}{50}$$

$$\text{ἔτι δὲ } \frac{d\Pi_1}{dx_1} = \frac{2x_1}{25} + 3 \text{ ὅθεν}$$

$$25 - \frac{x^2}{100} - \frac{x_1 x}{50} = \frac{2x}{52} + 3 \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{x_1 x}{50} + \frac{2x_1}{25} - 22 = 0$$

$$\text{ἀλλὰ } x = x_1 + x_2 \text{ ὅθεν } \frac{(x_1+x_2)^2}{100} + \frac{x_1(x_1+x_2)}{50} + \frac{2x_1}{25} - 22 = 0$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων

$$3x_1^2 + 4x_1(x_2+2) + (x_2^2 - 2200) = 0$$

$$\text{ἢ } x_1 = \frac{-4(x_2+2) \pm \sqrt{16(x_2+2)^2 - 12(x_2^2 - 2200)}}{2.3}$$

$$\text{ἢ } x_1 = \frac{-2(x_2+2) \pm \sqrt{x_2^2 + 16x_2 + 6616}}{3} \qquad (\iota)$$

$$\text{ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι : } x_2 = \frac{-2(x_1+2) \pm \sqrt{x_1^2 + 16x_1 + 6616}}{3}$$

'Η ὁλικὴ ζήτησις δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\psi(x) + \frac{x}{2}\psi'(x) = F'\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{δηλ. ὑπὸ } 25 - \frac{x^2}{100} - \frac{x^2}{100} = \frac{x}{25} + 3 \quad \text{ἢ}$$

$$2x^2 + 4x - 2200 = 0$$

$$\text{ἤτοι } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4.1100}}{2} = \frac{-2 \pm 66,36}{2}$$

θεωροῦμεν μόνον τὴν κατὰ προσέγγισιν θετικὴν ρίζαν 66 καὶ ἄρα

$$x = \frac{-2 + 66}{2} = 32$$

$$\text{ἤτοι } x_1 = x_2 = \frac{x}{2} = 16.$$

$$\text{"Αν εἰς τὴν } (\iota) \text{ τεθῇ } x_2 = 16 \text{ τότε } x_1 = \frac{-36 \pm \sqrt{7128}}{3} = \frac{-36+84}{3} = 16$$

*'Υπόθεσις Β'.*

18.—*Ὁ πρῶτος δυοπωτητὴς προεξοφλεῖ ἀπολύτως τὰ ἀποτελέσματα τῆς πρωτοβουλίας του ἐπὶ τῶν ἀποφάσεων τῶν συναγωνιστῶν του.*

Ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς προσδοκᾷ ὅτι ὁ ἀντίπαλός του (δεύτερος δυοπωλητὴς) θὰ τροποποιήσῃ τὴν ζήτησίν του $x_2$ ὅταν οὗτος μεταβάλῃ τὴν ἰδίαν αὐτοῦ ζήτησιν $x_1$ κατά τινα νόμον ὡρισμένον: $x_2 = f(x_1)$, ἐκφράζοντος πῶς μεταβάλλεται ἡ ζήτησις τοῦ δευτέρου ὅταν μεταβάλλεται ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου. Ἑπομένως ἂν ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς μεταβάλῃ τὴν ζήτησίν του ἀπὸ τῆς στάθμης $x_1$ θὰ προσδοκᾷ ὅτι ἡ ζήτησις τοῦ ἀντιπάλου του θὰ αὐξάνῃ ἢ θὰ ἐλαττοῦται κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὴν παράγωγον $\frac{dx_2}{dx_1} = f'(x_1)$ δεδομένου ὅτι $dx_2$ ἐμφαίνει ἀπειροστὴν αὔξησιν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τῆς ζητήσεως $x_2$, προελθοῦσαν ἐξ ὁμοίας αὐξήσεως $dx_1$ τῆς ζητήσεως $x_1$. Ἡ παράγωγος $\frac{dx_2}{dx_1} = f'(x_1)$ δύναται νὰ κληθῇ κατὰ τὸν πολὺν Frisch «*Ὑποθετικὴ μεταβολή*» (conjectural variation) καὶ δύναται νὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀναλόγως τῶν περιστάσεων.

Διὰ νὰ ὑφίσταται *μέγιστον καθαρὸν κέρδος* τὸ ὁρικὸν κόστος τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{d}{dx_1}(x_1p) = \frac{d}{dx_1}\left\{x_1\psi(x)\right\} = \psi(x) + x_1\frac{d}{dx_1}\psi(x)\frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2) =$$
$$\psi(x) + x_1\psi'(x) + x_1\psi'(x)\frac{dx_2}{dx} \text{ ἢ } \frac{d}{dx_1}(x_1p) = \psi(x) + x_1\psi'(x)\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right).$$

Ἡ ἐξίσωσις ἥτις δίδει $x_1$ ὡς συνάρτησιν τοῦ $x_2$ καὶ προσδιορίζει τὴν *καμπύλην ἀντιδράσεως* $C_1$ τοῦ πρώτου δυοπωλητοῦ καθίσταται τώρα:

$$\psi(x) + x_1\psi'(x)\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right) = \frac{d\Pi_1}{dx_1}$$

Δι' ὅμοιον ἀκριβῶς λόγον ὑποτίθεται ὅτι ὁ δεύτερος δυοπωλητὴς προσδοκᾷ ὅτι ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου μεταβάλλεται κατὰ νόμον ὡρισμένον $x_1 = g(x_2)$, μεταβαλλομένης τῆς ζητήσεως τοῦ $x_2$, ὁπότε ἡ παράγωγος $\frac{dx_1}{dx_2} = g'(x_2)$ εἶναι πάλιν *ὑποθετικὴ μεταβολή*. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις ἥτις δίδει $x_2$ ὡς συνάρτησιν τοῦ $x_1$ καὶ προσδιορίζει τὴν καμπύλην ἀντιδράσεως $C_2$ τοῦ δευτέρου δυοπωλητοῦ εἶναι ἡ:

$$\psi(x) + x_2\psi'(x)\left(1 + \frac{dx_1}{dx_2}\right) = \frac{d\Pi_2}{dx_2}$$

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $\psi(x) + x_1\psi'(x)\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right) = \frac{d\Pi_1}{dx_1}$ (5)

$$\psi(x) + x_2\psi'(x)\left(1 + \frac{dx_1}{dx_2}\right) = \frac{d\Pi_2}{dx_2} \qquad (6)$$

λυόμενον ὁρίζει τὸ σημεῖον ἢ τὰ σημεῖα (σημεῖον — α, τομῆς τῶν δύο καμπύλων $C_1$ καὶ $C_2$) τῆς δυοπωλιακῆς κατανομῆς τῆς ζητήσεως μεταξὺ τῶν δύο παραγωγῶν.

Ἡ ἀναλυτικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῆς ὑποθετικῆς μεταβολῆς τῶν δύο δυοπωλητῶν κ. λ. π.

***Συμπεράσματα.***

19.—Διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ δυοπωλιακοῦ προβλήματος ἐθεωρήσαμεν δύο ὑποθέσεις. Κατὰ τὴν πρώτην κάθε δυοπωλητὴς τροποποιεῖ μόνον τὴν ποσότητα ἣν αὐτὸς οὗτος προσφέρει ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ θεωρεῖ τὴν ὑπὸ τοῦ ἀντιπάλου του προσφερομένην ὡς σταθεράν. Κατὰ τὴν δευτέραν ἄποψιν ὅταν ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς προσφέρει ὡρισμένην ποσότητα ὁ ἀντίπαλός του ζητεῖ νὰ ὑφαρπάσῃ παρ' αὐτοῦ τὴν πελατείαν, τροποποιῶν τὴν ζήτησίν του, δι' ὑποβιβασμοῦ ἐλαφρῶς τῆς τιμῆς. Ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς ἀμύνεται τότε ὑποβιβάζων καὶ αὐτὸς τὴν τιμὴν καὶ οὕτω ἐφ' ἑξῆς. Οὕτως ὅμως ἡ τιμὴ τείνει νὰ μηδενισθῇ, δὲν συμβαίνει ὅμως τοῦτο εἰς τὴν πραγματικότητα, διότι ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς θὰ σταθεροποιήσῃ τὴν τιμήν του ὅταν προσεγγίσῃ αὕτη τὸ κόστος[1], ὁπόταν, κατ' ἀνάγκην, θὰ καταλείπῃ εἰς τὸν ἀντίπαλόν του ποσοστόν τι τῆς ζητήσεως. Ὁ τελευταῖος ἀναλαμβάνει τότε τὴν πρωτοβουλίαν, ἀλλὰ δὲν βραδύνει νὰ ἀντιληφθῇ ὅτι κατέχει μονοπωλιακὴν θέσιν, ἐπειδὴ διαθέτει ἀριθμόν τινα πελατῶν, μὴ δυναμένων νὰ ἱκανοποιηθῶσιν ὑπὸ τοῦ ἀντιπάλου· θὰ ζητήσῃ ἑπομένως νὰ *συστείλῃ τὰς πωλήσεις* καὶ νὰ *αὐξήσῃ τὰς τιμάς*. Ὁ πρῶτος μονοπωλητὴς θὰ παρακολουθήσῃ τὴν ὕψωσιν ταύτην τῶν τιμῶν, μέχρις ὅτου ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν θὰ θεωρήσῃ πλεονεκτικὴν δι' ἑαυτὸν τὴν *διάρρηξιν τῶν τιμῶν* (Cut of Prices). Τοιουτοτρόπως θὰ ὑφίστανται *ἐναλλαγαὶ συναγωνισμοῦ καὶ μονοπωλίου, πτώσεως καὶ ἐξάρσεως τῶν τιμῶν*. Τὸ ἀνώτερον ὅριον τῶν διακυμάνσεων κεῖται κάτωθι τῆς *μονοπωλιακῆς τιμῆς*, διότι τὸ δυοπώλιον ἀποτελεῖ *ἀτελῆ*

---

[1] Τὸ ὁρικὸν κόστος τῆς παραγωγῆς παραγούσης μὲ κόστος αὖξον εὑρίσκεται εὐκόλως ὡς κάτωθι:

Ἂν A εἶναι ἡ τιμὴ πωλήσεως ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος καὶ p τὸ κόστος ταύτης, τὸ καθαρὸν κέρδος διὰ κάθε μονάδα προϊόντος εἶναι: $E=A-p$ καὶ διὰ σύνολον x μονάδων παραγωγῆς προϊόντος $E=(A-p)x$.

Τὸ E εἶναι συνάρτησις τῶν x καὶ p ἑπομένως τὸ μέγιστον τούτου θὰ δίδεται

$$\frac{\partial E}{\partial p}dp+\frac{\partial E}{\partial x}dx=o \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{\partial E}{\partial p}=-x \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial E}{\partial x}=A-p \quad \text{ἑπομένως:}$$

$$-xdp+(A-p)\,dx=o \quad \text{ἢ} \quad Adx=pdx+xdp=d(xp)$$

ἢ $A=\frac{d(xp)}{dx}$ ὅπου d(xp) παριστᾷ τὴν αὔξησιν τῆς δαπάνης ἥτις ἀναγκαιοῖ διὰ τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς κατὰ dx καὶ $\frac{d(xp)}{dx}$ παριστᾷ τὴν αὔξησιν τῆς δαπάνης ἥτις ἀναγκαιοῖ διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς συμπληρωματικῆς μονάδος προϊόντος ἤτοι: *τὸ ὁρικὸν κόστος ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν πωλήσεως.*

*συναγωνισμὸν* καὶ τὸ κατώτατον ὅριον ἄνωθι τῆς τιμῆς τοῦ *ἀκράτου* (ἐντελοῦς) *συναγωνισμοῦ*. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι οἱ ἀγορασταὶ *ἐν τῇ περιοχῇ τῶν χαμηλοτέρων τιμῶν* κατανέμονται εἰς δύο ὁμάδας, ἤτοι εἰς τοὺς ἐπιχειροῦντας νὰ ἀγοράσωσι μὲ τὴν χαμηλοτέραν τιμὴν καὶ εἰς τοὺς ὑποχρεουμένους νὰ ἀγοράζωσι μὲ τιμὴν ὀλίγον μεγαλυτέραν. Δὲν ὑφίσταται δηλαδὴ *ἑνιαία τιμὴ* ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς ταύτης, ἐφ' ἧς, ὡς προελέχθη, κυριαρχεῖ ὁ *ἀτελὴς συναγωνισμός*.

20.—Τοῦτο συμβαίνει μόνον ὅταν ὑφίστανται δύο μόνον πωληταί. Ἡ ἐξάντλησις τῆς προσφορᾶς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἀγορᾶς τελούσης ὑπὸ καθεστὼς δυοπωλιακοῦ ἀνεφοδιασμοῦ ἀναρρίπτει τοὺς ἀγοραστὰς πρὸς τὸν ἕτερον δυοπωλητήν, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἐπιτύχῃ κέρδη, ἀλλ' ἐπὶ ἐκτεταμένης ἀγορᾶς, ἡ ἐξαφάνισις μιᾶς προσφορᾶς, δὲν ἐπιτρέπει εἰς τοὺς λοιποὺς προσφέροντας ὕψωσιν τῶν τιμῶν, διότι οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρὸς διὰ νὰ δημιουργήσῃ κίνησιν καὶ διότι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν παραμένει, ἐξ ὑποθέσεως, ἀπομεμονωμένος.

Διαπιστοῦται οὐχ ἧττον ὅτι δὲν ὑφίστανται συνεχεῖς διακυμάνσεις ἐν περιπτώσει δυοπωλίου καὶ τοῦτο διότι οἱ ἀγορασταὶ δὲν ἀλλάσσουσιν εὐκόλως πωλητὴν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐλαφρῶν διαφορῶν τῶν τιμῶν καὶ ἡ διάρρηξις τῶν τιμῶν δὲν συνεπάγεται ἄμεσα πλεονεκτήματα, λόγῳ τοῦ φαινομένου τῆς *ἀδρανείας* (ἀδράνεια μετακινήσεως πελατείας) καὶ διότι ὑφίσταται ἔλλειψις προνοίας οὐ μόνον τῶν πωλητῶν ἀλλὰ καὶ τῶν ἀγοραστῶν, διότι οἱ τελευταῖοι θὰ ὤφειλον νὰ ἀναγνωρίσωσιν ὅτι αἱ τιμαὶ ἀκαταπαύστως διακυμαίνονται καὶ ἑπομένως θὰ ἔδει νὰ περιορίζωσιν τὰς ἀγοράς των ἐν περιπτώσει ὑψώσεως αὐτῶν καὶ νὰ ἐντείνωσιν ταύτας, ἀντιθέτως, ἐν περιπτώσει πτώσεως, συντελοῦντες οὕτω εἰς τὸν διακανονισμὸν τῶν κινήσεων τῶν τιμῶν ὡς ὀρθῶς παρατηρεῖ ὁ F. Y. Edgeworth.

Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ