

ΠΑΝΤΕΙΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

PANTEION UNIVERSITY OF SOCIAL AND POLITICAL SCIENCES



ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΔΗΜΟΣΙΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Οπτική αναπαράσταση βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας

στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}^3$ με χρήση CAS Geogebra

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λυχούνα Φανή

Αθήνα, 2020

Τριμελής επιτροπή

Γρηγόριος Κόρδας, Επίκουρος Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου (Επιβλέπων)

Γεώργιος Πετράκος, Αναπληρωτής Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου

Νικόλαος Δασκαλάκης, Επίκουρος Καθηγητής Παντείου Πανεπιστημίου



Copyright © Φανή Λυχούνα, 2020

All rights reserved. Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της διπλωματικής εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Πάντειον Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και Πολιτικών Επιστημών δεν δηλώνει την αποδοχή του συγγραφέα.

*Στους γονείς μου,
Ευτυχία και Κλεάνθη,
που λόγω συνθηκών ζωής δεν μπόρεσαν να σπουδάσουν*

Συντομογραφίες

$\mathbb{R}^2$: Το Ευκλείδειο επίπεδο

$\mathbb{R}^3$: Ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος

CAS : Computer Algebra Systems

ΤΠΕ : Τεχνολογίες Πληροφοριών και Επικοινωνιών

ICT: Information and Communications Technologies

ΕΣΥΕ : Εθνική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδας

IG : Interactive Geometry

DG : Dynamic Geometry Programmes

DGE : Περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Υ.ΠΑΙ.Θ : Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων

ISO : Διεθνής Οργάνωση Τυποποίησης

$A_{n \times m}$: Πίνακας A με n γραμμές και m στήλες

ΚΣΕ : Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης

ITY : Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών

GDP : Gross Domestic Product

IS : Επενδύσεις ίσες με αποταμιεύσεις

LM : Προτίμηση ρευστότητας ίση με προσφορά χρήματος

MPC : Marginal propensity to consume

$F_x(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$: α' τάξης μερική παράγωγος της συνάρτησης $F(x,y)$

Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον υπεύθυνο Καθηγητή κ. Κόρδα Γρηγόριο που δέχθηκε με προθυμία να επιβλέψει την εργασία μου και συνέβαλε στην ολοκλήρωσή της, τόσο στο θεωρητικό όσο και στο πρακτικό μέρος. Τον ευχαριστώ για τις συμβουλές, την καθοδήγηση, το ενδιαφέρον και την καλόπιστη και εποικοδομητική κριτική του. Ευχαριστώ επίσης όλους τους υπόλοιπους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος και τον διευθυντή του προγράμματος κ. Πετράκο Γεώργιο οι οποίοι με καθοδήγησαν στα μονοπάτια της Οικονομικής Επιστήμης ενός πεδίου άγνωστου αρχικά για μένα, μιας και προέρχομαι από τον μαθηματικό καθαρά κλάδο.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ την οικογένεια μου, τον σύζυγό μου, τους δυο γιους μου και την υπερήλικη μητέρα μου που αντιμετώπισαν με υπομονή και κατανόηση τις ώρες κατά τις οποίες χρειάστηκε να απέχω από τις καθημερινές υποχρεώσεις που απαιτεί μια οικογένεια.

Περιεχόμενα

Σχήματα.....	8
Περίληψη.....	9
Abstract	10
Εισαγωγή.....	11
Κεφάλαιο πρώτο.....	14
1.1 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης (αρχές 20 ^{ου} αι.).....	14
1.1.1 Συμπεριφορισμός.....	14
1.1.2 Γνωστικές θεωρίες – Εποικοδομισμός – Κονστрукτιβισμός.....	15
1.1.3 Κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες.....	15
1.1.4 Οι θεωρίες μάθησης στη διδασκαλία με ψηφιακές τεχνολογίες.....	16
1.2 Ο ρόλος της μνήμης στη μάθηση των Μαθηματικών.....	16
1.3 Εκπαιδευτικά λογισμικά.....	18
1.4 Το Geogebra.....	19
1.4.1 Σύντομη ιστορία του Geogebra.....	19
1.4.2 Τα οφέλη από τη διδασκαλία των Μαθηματικών με Geogebra.....	20
1.4.3 Αδυναμίες της διδασκαλίας των Μαθηματικών με Geogebra.....	21
Κεφάλαιο δεύτερο	22
2.1 Η έννοια του Διανύσματος.....	22
2.1.1 Πράξεις Διανυσμάτων.....	24
2.1.2 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων.....	27
2.1.3 Εσωτερικό γινόμενο.....	28
2.1.4 Μέτρο διανύσματος.....	28
2.1.5 Απόσταση δύο διανυσμάτων.....	29
2.2 Διανυσματικός χώρος.....	30
2.2.1 Γραμμική Ανεξαρτησία διανυσμάτων.....	31
2.2.2 Βάση διανυσματικού χώρου.....	33
2.2.3 Γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων.....	36
2.3 Πίνακας.....	37
2.3.1 Είδη πινάκων.....	38
2.3.2 Πράξεις πινάκων.....	40

2.3.3 Το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα	43
2.3.4 Αντιστοιχία γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.....	45
2.3.5 Παραδείγματα γραμμικών μετασχηματισμών στο επίπεδο.	46
2.4 Ορίζουσα πίνακα.....	49
2.4.1 Η ορίζουσα πίνακα 2×2	50
2.4.2 Ιδιότητες των οριζουσών.....	52
2.4.3 Η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3	54
2.5 Χαρακτηριστικά ποσά πίνακα	56
2.5.1 Γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης $Au = \lambda u$	57
2.5.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών.	59
Κεφάλαιο τρίτο.....	63
3.1 Εφαρμογή της άλγεβρας πινάκων στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων.....	63
3.1.1 Διαφορικό συνάρτησης.	65
3.1.2 Πεπλεγμένη συνάρτηση.....	66
3.1.3 Επέκταση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης σε συστήματα εξισώσεων.....	69
3.2 Εφαρμογή της Γραμμικής Άλγεβρας στην Οικονομική Επιστήμη	72
3.2.1 Το υπόδειγμα εθνικού εισοδήματος (IS-LM).....	72
Συμπεράσματα.....	77
Πηγές – Βιβλιογραφία	79
Παραρτήματα	84
Π.1 Φύλλο εργασίας στις ορίζουσες.....	84
Π.2 Φύλλο εργασίας στις ιδιοτιμές και στα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα	87

Σχήματα

Σχήμα 1. Κατασκευή διανύσματος με συγκεκριμένες συντεταγμένες.....	22
Σχήμα 2. Αντιστοιχία σημείου με διάνυσμα και αντίστροφα	23
Σχήμα 3. Κατασκευή του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων	24
Σχήμα 4. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου	25
Σχήμα 5. Κατασκευή της διαφοράς δύο διανυσμάτων στο επίπεδο	25
Σχήμα 6. Κατασκευή του διανύσματος $\lambda \cdot u$, με $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$	26
Σχήμα 7. Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων	27
Σχήμα 8. Γεωμετρική απεικόνιση του μέτρου ενός διανύσματος στο χώρο	29
Σχήμα 9. Απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^2$	29
Σχήμα 10. Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$	31
Σχήμα 11. Γραμμικός συνδυασμός ενός διανύσματος ως προς την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$	34
Σχήμα 12. Γραμμικός συνδυασμός διανύσματος u ως προς νέα βάση (b_1, b_2) του $\mathbb{R}^2$	35
Σχήμα 13. Τα γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα δεν συνιστούν βάση	35
Σχήμα 14. Αντιστοιχία σημείου, διανύσματος και πίνακα στήλη	38
Σχήμα 15. Γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$	44
Σχήμα 16. Ο πίνακας ως ένας γραμμικός μετασχηματισμός του διανύσματος	45
Σχήμα 17. Οπτική αναπαράσταση γραμμικών μετασχηματισμών πίνακα σε εικόνα.....	47
Σχήμα 18. Γεωμετρικός υπολογισμός του τύπου της ορίζουσας πίνακα 2×2 , με εμβαδά	50
Σχήμα 19. Η ορίζουσα πίνακα αναπαριστά την κλίμακα μεταβολής του εμβαδού του χωρίου που ορίζει ο μοναδιαίος πίνακας I_2	51
Σχήμα 20. Η γεωμετρική ερμηνεία ορίζουσας πίνακα με αρνητική τιμή	52
Σχήμα 21. Ο κανόνας του Sarrus για ορίζουσα 3×3	55
Σχήμα 22. Γεωμετρική αναπαράσταση της ορίζουσας πίνακα 3×3	56
Σχήμα 23. Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού πίνακα A με διάνυσμα u	57
Σχήμα 24. Η συγγραμμικότητα των διανυσμάτων u και Au	57
Σχήμα 25. Η κίνηση του Au διαγράφει έλλειψη, καθώς το u κινείται στο μοναδιαίο κύκλο	58
Σχήμα 26. Γινόμενο του μοναδιαίου διανύσματος u επί τον πίνακα A	61
Σχήμα 27. Μετατροπή συστήματος 2×3 με τη βοήθεια πινάκων	63
Σχήμα 28. Λεπτομερής αναφορά των πινάκων A, X, B ενός συστήματος	64
Σχήμα 29. Η γραφική παράσταση της $F(x, y) = y - x^2$	66
Σχήμα 30. Προσέγγιση κοντά στο $(2, 1)$ μιας συνεχώς διαφορίσιμης πεπλεγμένης συνάρτησης.....	69

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, η οποία συντάχθηκε στο πλαίσιο του Μεταπτυχιακού Προγράμματος του Τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου Πανεπιστημίου, παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση για φοιτητές της Οικονομικής Κατεύθυνσης, με θέμα την οπτική αναπαράσταση βασικών εννοιών από τη Γραμμική Άλγεβρα, με το εκπαιδευτικό λογισμικό CAS GeoGebra. Βασικός σκοπός της εργασίας αυτής τέθηκε η παρουσίαση ενός εργαλείου το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον Καθηγητή της τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης να διευρύνει τον τρόπο διδασκαλίας των βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας με τη χρήση των ΤΠΕ ως επικουρικό μέσο, το οποίο θα συνδέσει την παραδοσιακή διδασκαλία των Οικονομικών Μαθηματικών ΙΙ με τις νέες τεχνολογίες. Ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης βασίστηκε στις σύγχρονες εκπαιδευτικές προσεγγίσεις και στοχεύει τόσο στην προσέλκυση του ενδιαφέροντος των φοιτητών όσο και στην επίτευξη της κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών που οι φοιτητές θα χρησιμοποιήσουν στην επαγγελματική ή πανεπιστημιακή τους εξέλιξη στην Οικονομική Επιστήμη. Στην τρέχουσα εκπαιδευτική πραγματικότητα, η διδασκαλία στον πίνακα με τον παραδοσιακό τρόπο και η μελέτη από το βιβλίο είναι στατικές διαδικασίες που δεν επιτρέπουν στους φοιτητές την πλήρη κατανόηση των βασικών μαθηματικών εννοιών και την μετέπειτα εφαρμογή τους σε οικονομικά και επιχειρησιακά προβλήματα. Η υπόθεση της εργασίας ήταν πως, εφόσον τα εκπαιδευτικά λογισμικά παρέχουν τη δυνατότητα για δυναμικό χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών με την καθοδήγηση του εκπαιδευτή, ο οποίος θέτει κατάλληλες ερωτήσεις τότε ο εκπαιδευόμενος θα μπορεί να ανακαλύπτει εκ νέου γνώσεις που έχει ήδη προσλάβει, να επεξηγεί νέες γνώσεις, να παρουσιάζει ομοιότητες και διαφορές τους, να βρίσκει σχέσεις μεταξύ τους και να τις χρησιμοποιεί στην ανάλυση οικονομικών υποδειγμάτων. Τονίζεται ότι οι φοιτητές δεν είχαν τη δυνατότητα να εργαστούν ομαδοσυνεργατικά. Ωστόσο από τη διδακτική παρέμβαση, η οποία θα διεξαχθεί το επόμενο εξάμηνο κατά το οποίο διδάσκεται το μάθημα, θα φανεί η αποτελεσματικότητα των ψηφιακών μέσων στη διδασκαλία.

Λέξεις – κλειδιά: Γραμμική Άλγεβρα, Geogebra, Οπτική Αναπαράσταση, Δυναμική γεωμετρία, Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Abstract

This thesis, which has been conducted in the terms of the Postgraduate Program held in the Department of Public Administration of Panteion University, aims to present a didactic intervention to students in the field of Economics. Its purpose is a visual representation of basic concepts of Linear Algebra by use of CAS GeoGebra educational software. By means of this intervention there is an attempt to connect traditional teaching methods of Economic Mathematics II with new technologies. The main purpose of this thesis is the presentation of a way that enables every professor to teach the basic concepts of Linear Algebra using ICT as a subsidiary medium. Concerning the way such a didactic intervention was created, it is based on current educational approaches and it aims to attract students' interest, as well as to help them understand fundamental mathematical concepts, which will be useful to students engaged in Economics, either professionally or not. Nowadays, the traditional way of teaching in front of the blackboard and studying books is a static procedure, not allowing students to fully comprehend fundamental mathematical concepts, in order to apply them to economic and business issues. Educational software, which enables dynamic manipulation of multiple representations of mathematical concepts, combined with the teacher's guidance through appropriate questions, help students rediscover knowledge that have already acquired, obtain new knowledge, present similarities and differences between them and find their interrelationship. It is worth noting that students did not have the opportunity to cooperate with each other. Nevertheless, the didactic intervention is going to prove the effectiveness of digital media in teaching.

Keywords: Linear Algebra, GeoGebra, Matrices, Vectors, Visual Representation, Dynamic Geometry, Higher Education.

Εισαγωγή

Give a small boy a hammer and he will discover that everything in sight needs pounding.

Abraham Kaplan.

Ο άνθρωπος έχει τη συνήθεια να υποτάσσεται στις ήδη υπάρχουσες δεξιότητές του και να απορρίπτει, ακούσια πολλές φορές, τις πιο σύγχρονες τεχνικές, που όμως θα μπορούσαν να εκτοξεύσουν τις δεξιότητες που διαθέτει σε υψηλά επίπεδα. Αυτό μας θυμίζει ένα παιδί που, όταν του δίνεις ένα σφυρί, προσπαθεί να διορθώσει τα πάντα, μόνο με αυτό, χωρίς να νοιαστεί να χρησιμοποιήσει άλλα εργαλεία. Η τάση αυτή μας οδηγεί στη θεωρία των Συμπεριφοριστών, οι οποίοι δέχονται το κοινωνικό περιβάλλον όπως είναι, ενώ στοχεύουν στην προσαρμογή του εκπαιδευόμενου σ' αυτό.

Τα τελευταία χρόνια στο Πανεπιστήμιο, οι εκπαιδευόμενοι δείχνουν όλο και λιγότερο ενδιαφέρον στο μάθημα, οι Καθηγητές δεν βρίσκουν την αναμενόμενη ανταπόκριση και τα εκπαιδευτικά βιβλία έχουν παραγκωνιστεί. Η εκπαιδευτική διαδικασία τείνει να απαξιώνεται και να εξελίσσεται σε μια μονότονη δραστηριότητα που αδυνατεί να εκπλήξει και να συγκινήσει τον εκπαιδευόμενο. Είναι σημαντικό να αλλάξει το μοντέλο αυτό της στατικής διδασκαλίας, ιδιαίτερα σε μια εποχή που έχει να επιδείξει μια πληθώρα οπτικοακουστικών τεχνολογικών εργαλείων.

Το μειωμένο ενδιαφέρον των πρωτοετών φοιτητών της Οικονομικής Επιστήμης στα Μαθηματικά ήταν για μένα η αφορμή για την εκπόνηση της εργασίας μου, στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του τμήματος Δημόσιας Διοίκησης του Παντείου Πανεπιστημίου. Ίσως η δυσκολία των βασικών μαθηματικών εννοιών να αποτρέπει τους φοιτητές να παρακολουθήσουν τα Μαθηματικά και την Οικονομική Ανάλυση. Αυτό το μειωμένο ενδιαφέρον όμως τους ακολουθεί και στα επόμενα χρόνια σπουδών τους, όπου οι έννοιες αυτές βρίσκουν εφαρμογές στα μαθήματα της ειδικότητάς τους. Το αποτέλεσμα είναι ότι ο φοιτητής δεν μπορεί να εφαρμόσει τις έννοιες αυτές, αφού δεν τις έχει κατανοήσει εις βάθος. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα κατανόησης των μαθηματικών εννοιών έρχεται να καλύψει η οπτική αναπαράσταση των Μαθηματικών.

Επέλεξα να εργαστώ με έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας, διότι είναι ένας βασικός κλάδος των Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στις σύγχρονες επιστήμες. Είναι ένα χρήσιμο εργαλείο

σε πολλά επιστημονικά πεδία όπως τα Οικονομικά, τη Διοίκηση και Οργάνωση Δημόσιων Υπηρεσιών, την Οικονομετρία, την Τεχνολογία, τη Μηχανική κ.α.

Η εν λόγω εργασία δομείται σε δύο βασικά μέρη: το θεωρητικό και το πρακτικό.

Στο θεωρητικό πλαίσιο, σε τρία κεφάλαια αναπτύσσονται μέθοδοι διδασκαλίας, εκπαιδευτικά λογισμικά και βασικά κεφάλαια από τη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας. Όλα τα θέματα έχουν βασιστεί σε σχετική βιβλιογραφία που δίνεται στο τέλος. Τα σχήματα έχουν κατασκευαστεί από τη γράφουσα με το λογισμικό Geogebra.

Στην πρώτη ενότητα του πρώτου κεφαλαίου σκιαγραφείται με συνοπτικό τρόπο η εξέλιξη στις θεωρίες μάθησης ενώ στη δεύτερη ενότητα γίνεται μία περιορισμένη αναφορά στα εκπαιδευτικά λογισμικά. Το πρώτο κεφάλαιο του θεωρητικού μέρους κλείνει με σημαντικές πληροφορίες για το λογισμικό Geogebra.

Το δεύτερο κεφάλαιο αποτελείται από πέντε ενότητες. Στην πρώτη ενότητα γίνεται αναφορά στα διανύσματα καθώς και στην Άλγεβρα των διανυσμάτων. Τα σχήματα, τα οποία έχουν κατασκευαστεί με το λογισμικό Geogebra, εξυπηρετούν στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος και των πράξεων των διανυσμάτων, τόσο στο επίπεδο όσο και στον τρισδιάστατο χώρο. Η δεύτερη ενότητα διαπραγματεύεται βασικές αρχές των διανυσματικών χώρων όπως είναι η γραμμική ανεξαρτησία, η αλλαγή βάσης του διανυσματικού χώρου και η γραμμική απεικόνιση. Στην τρίτη, τέταρτη και πέμπτη ενότητα αναπτύσσεται η θεωρία των πινάκων και γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην ορίζουσα και στις χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα. Σε όλη την έκτασή τους, εμφανής είναι η γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών αυτών. Παρουσιάζονται παραδείγματα πινάκων και μέσα από αυτά φαίνεται η σύνδεση των πινάκων με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει δύο ενότητες. Στην πρώτη γίνεται μία περιληπτική αναφορά στην επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Δεν κρίθηκε απαραίτητη μια περαιτέρω ανάλυση τους, διότι τα περισσότερα οικονομικά προβλήματα, λόγω της φύσης τους, είναι μη γραμμικά και. Γίνεται όμως, αναφορά στην έννοια του ολικού διαφορικού από το Διαφορικό Λογισμό, η οποία σε συνδυασμό με το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης δείχνουν τη δύναμη της Γραμμικής Άλγεβρας να μετατρέπει τοπικά, μη γραμμικά συστήματα σε συστήματα με γραμμική συμπεριφορά. Στη δεύτερη ενότητα, παρουσιάζεται και επιλύεται το μη

γραμμικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας του εθνικού εισοδήματος, το οποίο μελετάει η Μακροοικονομική θεωρία. Στην ανάλυση που ακολουθείται, το συγκεκριμένο οικονομικό πρόβλημα θα θεωρηθεί κατά προσέγγιση γραμμικό για να επιλυθεί πιο εύκολα. Αν και δεν είναι δυνατόν να πάρουμε ευθείες λύσεις των ενδογενών μεταβλητών του υποδείγματος, βασιζόμενοι στο θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη τους και να καταλήξουμε σε ποιοτικά οικονομικά συμπεράσματα..

Στο πρακτικό μέρος έχουν δημιουργηθεί μικροπειράματα¹, με τα οποία οι φοιτητές ανακαλύπτουν τις έννοιες και τις ιδιότητες του διανύσματος, των πινάκων και των εφαρμογών τους στην επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων, μέσω δυναμικού χειρισμού κατάλληλων σχημάτων ή της αυτόματης κίνησής τους. Στόχος είναι να συνδεθούν γεωμετρικές με αλγεβρικές οντότητες ώστε με την πειραματική διαδικασία οι φοιτητές να διαπιστώνουν τις ιδιότητες βασικών εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας σε κάθε περίπτωση. Κάτι που, όπως υποθέτουμε, πρόκειται να βοηθήσει αποτελεσματικά την κατανόηση και εκμάθηση από τους φοιτητές των εννοιών αυτών.

Το υλικό του πρακτικού μέρους έχει δημοσιευθεί στην ιστοσελίδα

<http://geogebra.org/u/fanlyhou>.

Οποιαδήποτε παρατήρηση για διορθώσεις, παραλείψεις και συμπληρώσεις είναι επιθυμητή και μπορεί να αποστέλλεται στο προσωπικό μου email : fanlyhou@yahoo.gr

¹ αρχεία .ggp με το εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας και χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων CAS Geogebra

Κεφάλαιο πρώτο

1.1 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης (αρχές 20^{ου} αι.)

Με εξαιρετικά συνοπτικό τρόπο, στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται μερικές από τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης και τα χαρακτηριστικά τους.

Ο πιο συμβατός με τις σύγχρονες αντιλήψεις και γενικά αποδεκτός **ορισμός** της μάθησης αναφέρεται στη μάθηση ως απόκτηση και μεταβολή γνώσεων, δεξιοτήτων και διάφορων μορφών συμπεριφοράς του ατόμου ως αποτέλεσμα εμπειριών ή ασκήσεων. (Shunk,2010)

Τα ρεύματα και οι σχολές που ασχολήθηκαν με τη μάθηση είναι πολλά μεταξύ των οποίων είναι οι θεωρίες που προσεγγίζουν τη μάθηση ως :

- ✓ μία διαδικασία απόκτησης της γνώσης – Συμπεριφορισμός
- ✓ μία διαδικασία δημιουργίας της γνώσης – Κονστрукτιβισμός
- ✓ αποτέλεσμα της συμμετοχής του ατόμου σε κοινωνικές ομάδες – Κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες

1.1.1 Συμπεριφορισμός.

Σύμφωνα με τους Συμπεριφοριστές, η γνώση επιτυγχάνεται με την εξωτερική σύνδεση του ερεθίσματος² – input και της αντίδρασης³ – output σ' αυτό. Άρα, όσα περισσότερα ερεθίσματα δέχεται το άτομο από το περιβάλλον του, τόσο μεγαλύτερες θα είναι οι πιθανότητες για καλύτερα αποτελέσματα μάθησης.

Έτσι, δημιουργείται ένα προγραμματισμένο και ελεγχόμενο μαθησιακό περιβάλλον που βασίζεται στην ενίσχυση του εκπαιδευόμενου με ανταμοιβή ή με τιμωρία. Η διδακτέα ύλη αναπτύσσεται σε επιμέρους τμήματα, τα οποία διδάσκονται από τα πιο απλά προς τα πιο σύνθετα, όπου ο εκπαιδευόμενος συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία, δίνοντας απαντήσεις στις ερωτήσεις που βάζει ο εκπαιδευτής. Όσες από τις ερωτήσεις δεν απαντήθηκαν επιτυχώς, τίθενται εκ νέου αναδιατυπωμένες, μέχρι να καταφέρει να τις απαντήσει σωστά. (Κολιάδης, 1996)

² π.χ. ερώτηση του εκπαιδευτικού

³ π.χ. απάντηση του εκπαιδευόμενου

Τα αποτελέσματα, από τη χρήση των συμπεριφοριστικών μεθόδων, ήταν τέτοια που ο σύγχρονος μελετητής (Neisser, 1976) εξέφρασε σοβαρούς φόβους για την περίπτωση χρήσης τους στην κατεύθυνση και στο χειρισμό της συμπεριφοράς του ατόμου και των λαϊκών μαζών.

Κύριοι εκπρόσωποι του ρεύματος ήταν οι Pavlov, Watson, Skinner, Crowder, Gagné⁴, Badura και άλλοι.

1.1.2 Γνωστικές θεωρίες – Εποικοδομισμός – Κονστρουκτιβισμός.

Στις σχολές αυτές, η μάθηση δεν μεταδίδεται αλλά οικοδομείται από τον ίδιο τον εκπαιδευόμενο με βάση προηγούμενες γνώσεις του. Έτσι, ο εκπαιδευόμενος, από παθητικός υποδοχέας πληροφοριών, γίνεται ενεργός δημιουργός της γνώσης. Διαμέσου ενός πλούσιου σε εξωτερικά ερεθίσματα μαθησιακού περιβάλλοντος, θα ανακαλύψει σταδιακά τη γνώση με πειραματισμούς, δοκιμές και επαληθεύσεις.

Σύμφωνα με το ρεύμα αυτό, ο εκπαιδευτικός είναι καθοδηγητής - εμπνευστής στη μαθησιακή διαδικασία, ενόσω ο εκπαιδευόμενος με τους δικούς του ρυθμούς και το δικό του υπόβαθρο⁵ διερευνά, αναζητά, κάνει υποθέσεις, ανακαλύπτει και κατακτά τη γνώση. (Κολιάδης, 1997)

Η συμβολή του εποικοδομισμού στην εκπαίδευση είναι ότι δίνεται πλέον προσοχή στην κατανόηση των εννοιών.

Κύριοι εκπρόσωποι της σχολής αυτής, ήταν οι Dewey, Piaget, Papert καθώς και πολλοί άλλοι..

1.1.3 Κοινωνικο-πολιτισμικές θεωρίες.

Τα τελευταία χρόνια, επικρατεί όλο και περισσότερο η άποψη ότι τα άτομα μαθαίνουν όταν τους δίνονται ευκαιρίες να αλληλοεπιδράσουν με το εκπαιδευτικό τους περιβάλλον. Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές, η μάθηση συντελείται μέσα σε συγκεκριμένο πολιτισμικό πλαίσιο το οποίο περιλαμβάνει τη γλώσσα, τα στερεότυπα, τις αντιλήψεις, οι οποίες επικρατούν και ουσιαστικά επιτυγχάνεται όταν το άτομο συνεργάζεται με τους συνεκπαιδευόμενους και με τον εκπαιδευτικό κατά τη διάρκεια υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. (Ζωγόπουλος, 2013)

Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στον κοινωνικό παράγοντα. Ο εκπαιδευόμενος δεν είναι μόνος του. Κατά τη διαδικασία της μάθησης αλληλοεπιδρά με τους άλλους εκπαιδευόμενους και με τους

⁴ Ο Robert Mills Gagné εκπροσώπησε το διδακτικό σχεδιασμό σε πέντε βήματα : Ανάλυση στόχων, Σχεδίαση μαθημάτων, Ανάπτυξη υλικού, Εφαρμογή, Αξιολόγηση (ADDIE: Analyze, Design, Develop, Implement, Evaluate)

⁵ τα οποία ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να αγνοεί και να υποτιμά

εκπαιδευτές του. Μέσα από τη συνεργασία και την αντιπαράθεση επισημαίνονται διάφοροι συσχετισμοί των παραμέτρων του προβλήματος, ενδυναμώνεται το ενδιαφέρον του για μάθηση και μέσω μιας συνθετικής διαδικασίας φτάνει τελικά στη λύση. (Kozulin, 2003)

Βασικοί εκπρόσωποι της κατηγορίας αυτής είναι ο Bruner, Vygotsky.

Πιο συγκεκριμένα ο Vygotsky διαπίστωσε ότι το σχολείο αναπαράγει κοινωνικές ανισότητες μέσω της αποτυχίας στα σχολικά μαθηματικά (.Σακονίδης,2007)

1.1.4 Οι θεωρίες μάθησης στη διδασκαλία με ψηφιακές τεχνολογίες.

Η συμβολή των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι ουσιαστική διότι όταν το άτομο καλείται να επιλύσει ένα πρόβλημα τότε η αναζήτηση της πληροφορίας σε ψηφιακή μορφή είναι άμεση, γρήγορη, με ποικιλία συνδυασμών διαφορετικών θεμάτων και μπορεί να επιτευχθεί είτε με πρόσβαση σε μια ιστοσελίδα είτε με δυνατότητα συνεργασίας και επικοινωνίας σε ένα forum ή ένα chat room. Συνακόλουθα, το άτομο μαθαίνει να συνεργάζεται και να επικοινωνεί, μέσα από Κοινότητες, όπου έχει τη δυνατότητα να ανταλλάξει γνώσεις, απόψεις, υλικό, να προτείνει λύσεις ακόμα και να συνομιλήσει . (Kozulin, 2003).

Επιπλέον, η χρήση των ΤΠΕ, πολλές φορές απαιτεί τη δημιουργία σεναρίων και μικροπειραμάτων⁶, τα οποία αποτελούν ένα πρότυπο της ανακαλυπτικής μαθητοκεντρικής⁷ διδασκαλίας. Ιδιαίτερα ορισμένες μαθηματικές έννοιες απαιτούν πολλαπλές αναπαραστάσεις των οποίων η δημιουργία είναι χρονοβόρα για τον διδάσκοντα και γίνονται δύσκολα κατανοητές από τον εκπαιδευόμενο, καθώς καλείται να διαβάσει και να παρατηρήσει διαφορετικές στατικές εικόνες.(Κόμης,2004)

Επομένως, είναι εμφανής η ύπαρξη των σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας και μάθησης στις ΤΠΕ.

1.2 Ο ρόλος της μνήμης στη μάθηση των Μαθηματικών

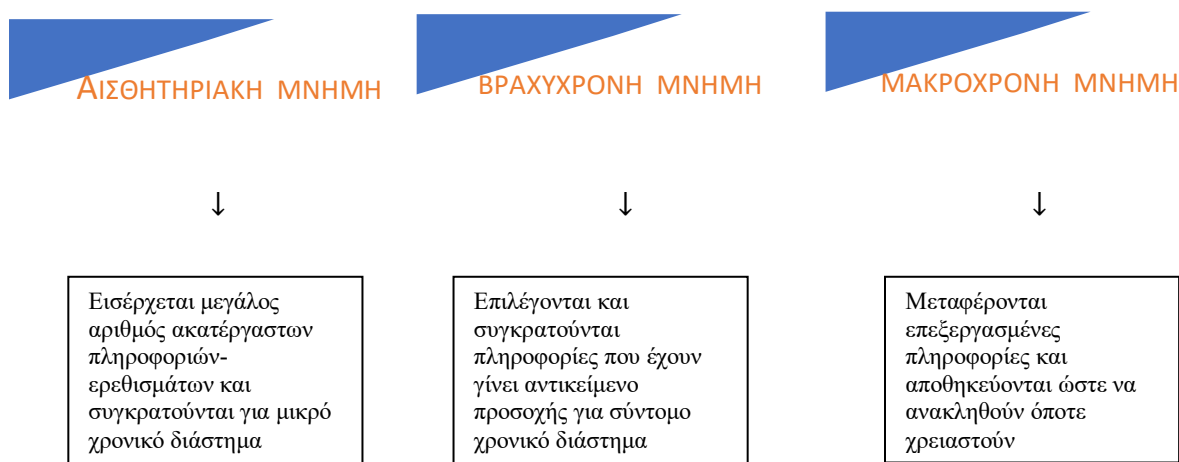
Η μνήμη ή αλλιώς η ικανότητα του ανθρώπου να συγκρατεί και να ανακαλεί πληροφορίες, είχε θεωρηθεί από τους Αρχαίους Έλληνες, ως θεϊκό δώρο. Απόδειξη είναι ο μύθος της

⁶ τα οποία, αν και μας θυμίζουν τα σχέδια μαθημάτων των Συμπεριφοριστών,, περιέχουν στοιχεία κοινωνικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθητών ή των διδασκόντων

⁷ Με τον εκπαιδευόμενο να οικοδομεί τη γνώση, να αναπτύσσει την κριτική του σκέψη μέσα από την αλληλεπίδραση με το κοινωνικό του περιβάλλον.

Μνημοσύνης ή Μνήμης, μητέρας των εννέα Μουσών η οποία βοήθησε στη διατήρηση των μύθων μέσα από την απομνημόνευση, πριν οι άνθρωποι επινοήσουν τη γραφή.

Από επιστημονικής απόψεως οι βασικές μορφές μνήμης διακρίνονται στο παρακάτω σχήμα :



Μόλις ακούσουμε μία λέξη, η εσωτερική φωνή μας την επαναλαμβάνει συνεχώς στον εγκέφαλο. Έτσι, διατηρείται για αρκετό χρόνο στη βραχύχρονη μνήμη, ώστε αν χρειαστεί να μεταφερθεί αργότερα για αποθήκευση στη μακρόχρονη μνήμη.

Όταν όμως, βλέπουμε μία εικόνα γίνεται επανάληψη της εικόνας στην εσωτερική μας όραση. Έτσι, η εμπειρία μας παραμένει για αρκετό χρονικό διάστημα για να “αγκιστρωθεί” αν πρέπει στη μακρόχρονη μνήμη.

Κατά την απόδοση του νοήματος μιας μαθηματικής έννοιας με γεωμετρική κατασκευή γίνονται συλλογισμοί και σχέδια, βάσει αυτών των συλλογισμών, χρησιμοποιούνται ιδιότητες γεωμετρικών αντικειμένων κάτι που διασφαλίζει την κατανόησή της.(Νικολόπουλος, 2019)

Το σίγουρο είναι ότι η μνήμη είναι κεντρικός παράγοντας, απαραίτητος στη μάθηση. Σε σχέση με τα Μαθηματικά ο ρόλος της μνήμης είναι βασικός, γιατί καθώς είναι γνωστό τα Μαθηματικά χρησιμοποιούν και αξιοποιούν όλες τις πλευρές του εγκεφάλου.

1.3 Εκπαιδευτικά λογισμικά

Για να χαρακτηρίσουμε ένα λογισμικό εκπαιδευτικό θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας, τόσο την παιδαγωγική, όσο και την τεχνολογική του διάσταση.

Από παιδαγωγική άποψη, το εκπαιδευτικό λογισμικό εμπεριέχει διδακτικούς στόχους, ολοκληρωμένα σενάρια, εικόνες και σχήματα που επεξηγούν έννοιες ή ιδέες, ώστε να μπορούν να γίνουν κατανοητές από το ευρύ κοινό με διδακτικά μαθησιακά αποτελέσματα.

Από τεχνική άποψη το εκπαιδευτικό λογισμικό εξετάζεται ως προς την ποιότητα του περιβάλλοντος διεπαφής, την εργονομία, την αλληλεπίδραση του χρήστη με τα αντικείμενα (εικόνα, ήχος, βίντεο, κείμενο) και την αισθητική του.(Κασιμάτη,2001)

Μαθηματικά εκπαιδευτικά λογισμικά, σύμφωνα με το Υ.ΠΑΙ.Θ είναι :

Geometer's Sketchpad,

ΓΑΙΑ

ΙΠΙΣ

Χελωνόκοσμος

Modellus

Geogebra

Mathematica

MathLab

Autograph

IQ⁺ κ.α.

Με βάση τις θεωρίες μάθησης διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εκπαιδευτικών λογισμικών :

Στην πρώτη κατηγορία συναντάμε τα περιβάλλοντα καθοδηγούμενης διδασκαλίας, τα οποία στηρίζονται σε συμπεριφοριστικές θεωρίες μάθησης.

Στη δεύτερη κατηγορία είναι τα περιβάλλοντα καθοδηγητικής ή όχι ανακάλυψης και διερεύνησης εννοιών, βασιζόμενα σε γνωστικές και εποικοδομητιστικές θεωρίες μάθησης.⁸

Τέλος, στην τρίτη κατηγορία ανήκουν τα περιβάλλοντα έκφρασης, οικοδόμησης, αναζήτησης και επικοινωνίας της Πληροφορίας, τα οποία βασίζονται σε εποικοδομητιστικές και κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες μάθησης.

Σύμφωνα με το διεθνές πρότυπο ISO τα εκπαιδευτικά λογισμικά πρέπει να είναι εύχρηστα παρέχοντας ευκολία μάθησης (learnability), ευκολία κατανόησης (understandability) και ευκολία λειτουργίας (operability), καθώς είναι αποτελεσματικά (effective), αποδοτικά (efficient) και οι χρήστες να μένουν υποκειμενικά ικανοποιημένοι.

1.4 Το Geogebra

Το Geogebra αποτελεί ένα μη εμπορικό, βραβευμένο, εκπαιδευτικό, διαδραστικό λογισμικό μαθηματικών για όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, το οποίο διανέμεται δωρεάν. Χρησιμοποιείται από εκατομμύρια χρήστες σε όλο τον κόσμο. Πήρε το όνομά του από τη σύνθεση των λέξεων **Geometry** και **algebra** αφού ενώνει γεωμετρία, άλγεβρα, πίνακες, γραφήματα, στατιστικά και απειροστικό λογισμό. Συνδυάζει χαρακτηριστικά προγραμμάτων δυναμικής γεωμετρίας και γραφικών παραστάσεων. Κυκλοφορεί σε διάφορες εκδόσεις είτε για προσωπικούς υπολογιστές είτε για tablets. Ήδη, από την έκδοση 5, επιτρέπει να εργαστεί κανείς με 3διαστατες εφαρμογές, συμπεριλαμβάνοντας στερεομετρικές προβολές με ανάγλυφη μορφή.

1.4.1 Σύντομη ιστορία του Geogebra.

Σχεδιάστηκε το 2001 από τον Ελβετό Μάρκου Χοενβάρτερ (Markus Hohenwarter) ως μέρος της διπλωματικής του εργασίας για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Μαθηματικά της Εκπαίδευσης και της Επιστήμης των Υπολογιστών» στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ της Αυστρίας. Στη συνέχεια εμπλουτίστηκε και επεξεργάστηκε σε πανεπιστήμια της Φλόριντα (2006-2009) και πλέον στο Πανεπιστήμιο του Λιντς στην Αυστρία με τη βοήθεια προγραμματιστών και μεταφραστών απ' όλο τον κόσμο.

⁸ Το περιβάλλον Geogebra ανήκει σε αυτήν την κατηγορία

1.4.2 Τα οφέλη από τη διδασκαλία των Μαθηματικών με Geogebra.

Για τους φοιτητές:

Σε περιβάλλον Geogebra η διδασκαλία αποτελείται από οπτικές αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών με δυνατότητα επεξεργασίας τους. Οι εκπαιδευόμενοι αναπτύσσουν πρωτοβουλίες και κατασκευάζουν σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές, τα οποία παρατηρούν. Μέσα από το πρόγραμμα, τα γραφικά αυτά, μπορούν να δημιουργηθούν και να ανανεωθούν με ακρίβεια για εξοικονόμηση χρόνου. Καθώς δημιουργούν ένα σχήμα οι εκπαιδευόμενοι δύνανται να του αλλάζουν το μέγεθος, να το μετακινήσουν, να εξετάσουν αν συμπίπτει με ένα άλλο σχήμα, κάτι που δεν μπορεί να γίνει εύκολα με τους παραδοσιακούς τρόπους διδασκαλίας.

Η εισαγωγή της κίνησης στη μελέτη των αντικειμένων διευρύνει και αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται και συζητούν οι εκπαιδευόμενοι για τις μαθηματικές έννοιες που διαχειρίζονται. Παρακολουθώντας την αλλαγή των σχημάτων οι φοιτητές μπορούν να κάνουν εικασίες, πειραματισμούς και επεξηγήσεις πάνω σε παραγωγικούς συλλογισμούς τα οποία είναι αναγκαία στη διδακτική των Μαθηματικών.(Hannah, 2013)

Επιπλέον, οι γνώσεις στην Πληροφορική, τις οποίες αποκτούν κατά τη διάρκεια ενασχόλησης με το πρόγραμμα, μπορούν να φανούν εξαιρετικά χρήσιμες στην αυριανή επαγγελματική πρόοδο των φοιτητών.

Συνεπώς, η ενεργητική ενασχόληση με το λογισμικό διευρύνει τη φαντασία και δημιουργεί κίνητρα για μάθηση.

Για τους εκπαιδευτές :

Το υλικό, το οποίο θα διδάξουν οι εκπαιδευτές εμπεριέχει μαθησιακά αντικείμενα είναι σύντομο σε διάρκεια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί όσες φορές χρειαστεί, και για διαφορετικό σκοπό, εφόσον καλύπτει τους στόχους κάποιου μαθήματος.

Ο εκπαιδευτικός με μηδενικό κόστος έχει ένα χρήσιμο εργαλείο στη διδασκαλία του.

Τέλος, τα γραφικά του Geogebra αν εξαχθούν (export image) σε μορφή .png, τότε μπορούν να εισαχθούν σε έγγραφο του Word, κάτι που διευκολύνει τη δημιουργία διδακτικού υλικού.

1.4.3 Αδυναμίες της διδασκαλίας των Μαθηματικών με Geogebra.

Λόγω όμως, του τεράστιου δυναμικού τους οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν εύκολα να ξεφύγουν από το έλεγχό μας και να φέρουν αλλαγές που μπορούν να αποδειχθούν ακόμα και ανεπιθύμητες.

Αναλυτικότερα, ο εκπαιδευόμενος κινδυνεύει να αρκεστεί στην παρατήρηση ενός θεωρήματος και να μην ασχοληθεί με την απόδειξή του που είναι και η ουσιαστική μαθηματική σκέψη.

Επομένως, χρειάζεται να τεθούν οι ψηφιακές τεχνολογίες στην υπηρεσία των εκπαιδευόμενων και όχι αντίστροφα, καθώς καθοριστικής σημασίας είναι η συμβολή του εκπαιδευτή, ο οποίος δύναται να βοηθήσει τον εκπαιδευόμενο να ενεργήσει, να επαληθεύσει και να φτάσει σε συμπεράσματα και αντενδείξεις.(Hannah, 2013)

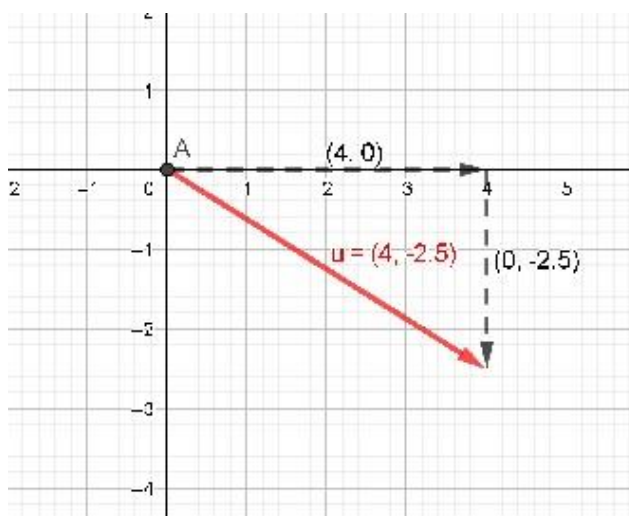
Κεφάλαιο δεύτερο

2.1 Η έννοια του Διανύσματος

Οι έννοιες «σημείο», «ευθεία», «επίπεδο», όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, παίρνουν υπόσταση με τη βοήθεια των γεωμετρικών αξιωμάτων. Η αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών και αντίστροφα προσφέρει στα Μαθηματικά αλλά και σε άλλες επιστήμες τη δυνατότητα μαθηματικής προτυποποίησης των μεγεθών τους. Ο Γάλλος φιλόσοφος Ρενέ Ντεκάρτ ή αλλιώς Καρτέσιος, ήταν ο πρώτος που συνέλαβε την αντιστοιχία σημείου με συντεταγμένες και έθεσε τις βάσεις για την Αναλυτική Γεωμετρία.

Έτσι, στην πρώτη ενότητα θα μελετήσουμε τα διανύσματα που είναι η καρδιά της Γραμμικής Άλγεβρας⁹.

Ορισμός : Ευκλείδειο διάνυσμα ή απλά διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καλείται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που το ένα άκρο του, το A χαρακτηρίζεται ως «αρχή ή σημείο εφαρμογής» και το άκρο με το βέλος, το B ως «τέλος ή πέρας».



Σχήμα 1. Κατασκευή διανύσματος με συγκεκριμένες συντεταγμένες

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία ενός διανύσματος είναι : η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο του.

⁹ Strang Gillbert , p. 77

- Διεύθυνση ή φορέας του διανύσματος είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα αλλά και κάθε παράλληλη ευθεία σε αυτήν.
- Φορά του διανύσματος είναι ο προσανατολισμός του. Η διεύθυνση και η φορά συνοψίζονται σε μία έννοια, την κατεύθυνση του διανύσματος.
- Μέτρο του διανύσματος είναι το μήκος του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος.

Ορίζουμε ως μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ κάθε διάνυσμα που η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Είναι φανερό ότι έχει οποιαδήποτε κατεύθυνση θέλουμε.

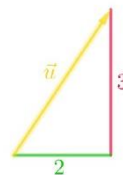
Δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται ίσα αν και μόνο αν είναι ομόρροπα (έχουν ίδια κατεύθυνση) και έχουν το ίδιο μέτρο.

Σημείωση : Ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου x-y και στα διανύσματα υπάρχει μοναδική αντιστοιχία

Ένα διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ με αρχή την αρχή O (0,0) έχει συντεταγμένες τις συντεταγμένες του σημείου του επιπέδου στο οποίο καταλήγει. (Βλέπε το σχήμα 1 και τον σύνδεσμο <https://www.geogebra.org/m/aaegczdw> .)

Κάθε ζεύγος αριθμών μας δίνει ένα διάνυσμα και κάθε διάνυσμα συνδέεται με ένα και μόνο ζεύγος αριθμών.

(2,3)



Σχήμα 2. Αντιστοιχία σημείου με διάνυσμα και αντίστροφα

Στη Γραμμική Άλγεβρα, συμφωνούμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ με αρχή την αρχή των αξόνων θα ορίζεται ως **εκπρόσωπος** όλων των διανυσμάτων του επιπέδου που έχουν την ίδια κατεύθυνση (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και ίσο μέτρο με το διάνυσμα $\vec{u}$.

Αν θεωρήσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα επί των ορθογωνίων αξόνων του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ είναι $\vec{i} = (1,0)^T$ και $\vec{j} = (0,1)^T$ τότε το διάνυσμα $\vec{u} = (x,y)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Έτσι, καταλαβαίνουμε την ύπαρξη μίας αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ του διανύσματος, του σημείου του επιπέδου και των στοιχείων του αντίστοιχου πίνακα :

$$\vec{u} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow (x,y) \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow (x,y)^T$$

Ανάλογα με την περίπτωση μπορούμε να φανταζόμαστε τα διανύσματα, άλλοτε ως σημεία ενός χώρου και να τα ταυτίζουμε με καρτεσιανές συντεταγμένες π.χ. (x_1, x_2, x_3) και άλλοτε ως βέλη με αρχή, την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$ και τέλος το σημείο (x_1, x_2, x_3) .

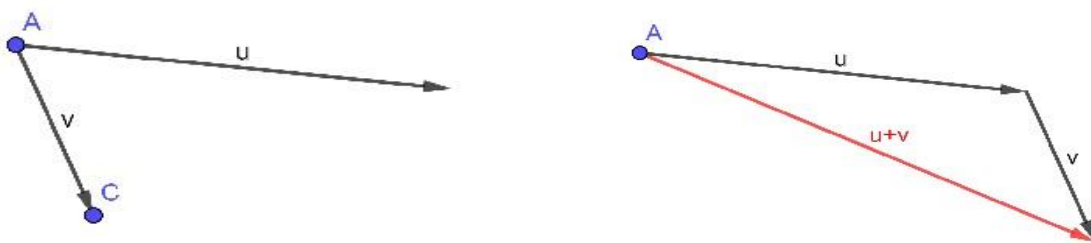
2.1.1 Πράξεις Διανυσμάτων.

Αρχικά, θα ορίσουμε τις πράξεις, της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και κατόπιν, θα δώσουμε τη γεωμετρική τους ερμηνεία , αντιστοίχως.

Πρόσθεση Αν $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, τότε ορίζουμε το άθροισμα τους ως το διάνυσμα: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της διανυσματικής πρόσθεσης μπορεί να αποδοθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

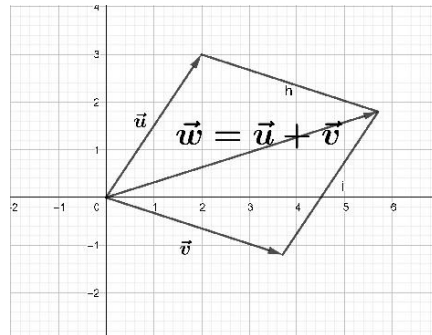
- ❖ Ένας πρώτος τρόπος κατασκευής είναι τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ να γίνουν διαδοχικά¹⁰. Τότε, σύμφωνα και με το σχήμα 3, το διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$ έχει αρχή την αρχή του $\vec{u}$ και τέλος το τέλος του $\vec{v}$.



Σχήμα 3. Κατασκευή του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων

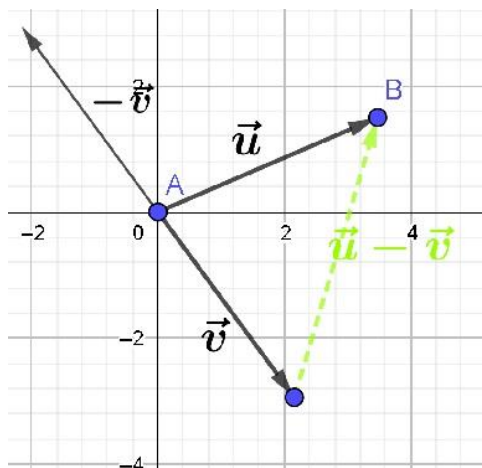
¹⁰ γνωστός και ως η μέθοδος του πολυγώνου.

- ❖ Ένας δεύτερος τρόπος κατασκευής του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$ είναι τα διανύσματα να έχουν κοινή αρχή ¹¹ (Βλ. σχήμα 4 και τον σύνδεσμό <https://www.geogebra.org/m/h5b7usr5> .)



Σχήμα 4. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου

Αφαίρεση : Αν $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ τότε ορίζουμε τη διαφορά τους ως το διάνυσμα $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.



Η γεωμετρική ερμηνεία του διανύσματος της διαφοράς δίνεται στο Σχήμα 5.

Σχήμα 5. Κατασκευή της διαφοράς δύο διανυσμάτων στο επίπεδο

¹¹ γνωστός ως ο κανόνας του παραλληλογράμμου που χρησιμοποιείται ευρέως στη Φυσική.

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός ή αλλιώς πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό.

Αν $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ και λ ένας αριθμός τότε ορίζουμε βαθμωτό ή αριθμητικό πολλαπλασιασμό, το διάνυσμα: $\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

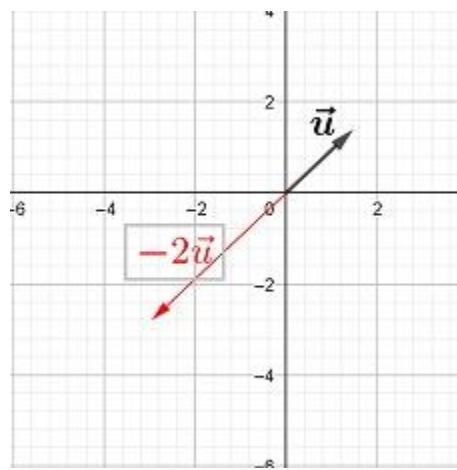
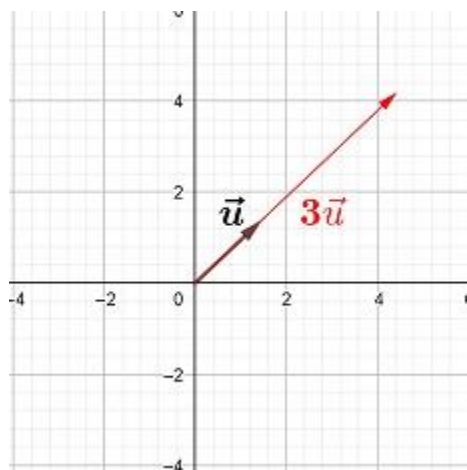
Γεωμετρικά, το γινόμενο $\lambda\vec{u}$ ορίζεται ως το διάνυσμα με μέτρο λ φορές το μέτρο του $\vec{u}$ το οποίο:

- αν $\lambda > 0$, έχει ίδια διεύθυνση και φορά (ομόρροπο) με το $\vec{u}$ και
- αν $\lambda < 0$, έχει ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (αντίρροπο) με το $\vec{u}$. (Βλ. σχήμα 6)

Παρατήρηση

Για $\lambda = 0$ ή $\vec{u} = \vec{0}$ ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Για $\lambda = -1$ τότε το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{u}$ ονομάζεται αντίθετο του $\vec{u}$ και συμβολίζεται με $-\vec{u}$.



Σχήμα 6. Κατασκευή του διανύσματος $\lambda \cdot \vec{u}$, με $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$

Για το αρχείο Geogebra σχετικά με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, πατήστε τον σύνδεσμο :

<https://www.geogebra.org/m/m7megvyq>

Ιδιότητες των πράξεων με διανύσματα

➤ Στην **πρόσθεση** δύο διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (αντιμεταθετική)

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (προσεταιριστική)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (ουδέτερο στοιχείο)
- για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ υπάρχει το αντίθετο του διάνυσμα, που συμβολίζεται με $-\vec{u}$ τέτοιο ώστε : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

➤ Στο **βαθμωτό πολλαπλασιασμό** κάθε διανύσματος με έναν αριθμό (scalar), ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

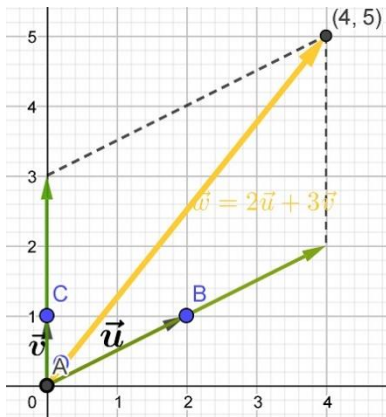
- $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς αριθμό)
- $(k_1 + k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{u}$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς το διάνυσμα)
- $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{u})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (ο πολλαπλασιασμός με τη μονάδα αφήνει το διάνυσμα αναλλοίωτο)
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

2.1.2 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων.

Ορίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ ενός διανυσματικού χώρου λέγεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, αν υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, \dots, k_n$, τέτοιοι ώστε :

$$\vec{u} = k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + \dots + k_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n k_i \vec{u}_i$$

Στο σχήμα 7. βλέπουμε ότι το διάνυσμα $\vec{w}$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, κατά μοναδικό τρόπο¹²



$$\begin{aligned} \vec{w} &= a\vec{u} + b\vec{v} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Σχήμα 7. Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

¹² σαν βαθμωτοί πολλαπλασιασμοί των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Επιπλέον, το διάνυσμα $\vec{w}$ εκφράζεται ως ο γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων και ορθογώνιων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$, ως εξής :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αλλά, δεν μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός : Το **εσωτερικό γινόμενο** (inner ή dot product) δύο διανυσμάτων $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, συμβολίζεται $\vec{u} \cdot \vec{v}$ και ορίζεται ως : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ και βεβαίως παριστάνει έναν αριθμό.

Αν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν τότε αυτά ονομάζονται **ορθογώνια** (orthogonal)

2.1.4 Μέτρο διανύσματος.

Ορισμός : Μήκος ή μέτρο ή νόρμα ενός διανύσματος $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ στο $\mathbb{R}^2$ λέγεται η τετραγωνική ρίζα του αριθμού που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}^T \cdot \vec{u}$, συμβολίζεται $\|\vec{u}\|$ και ισούται με : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Βλ. σχήμα 2). Η νόρμα ενός διανύσματος παριστάνει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα την αρχή και το πέρας του διανύσματος .

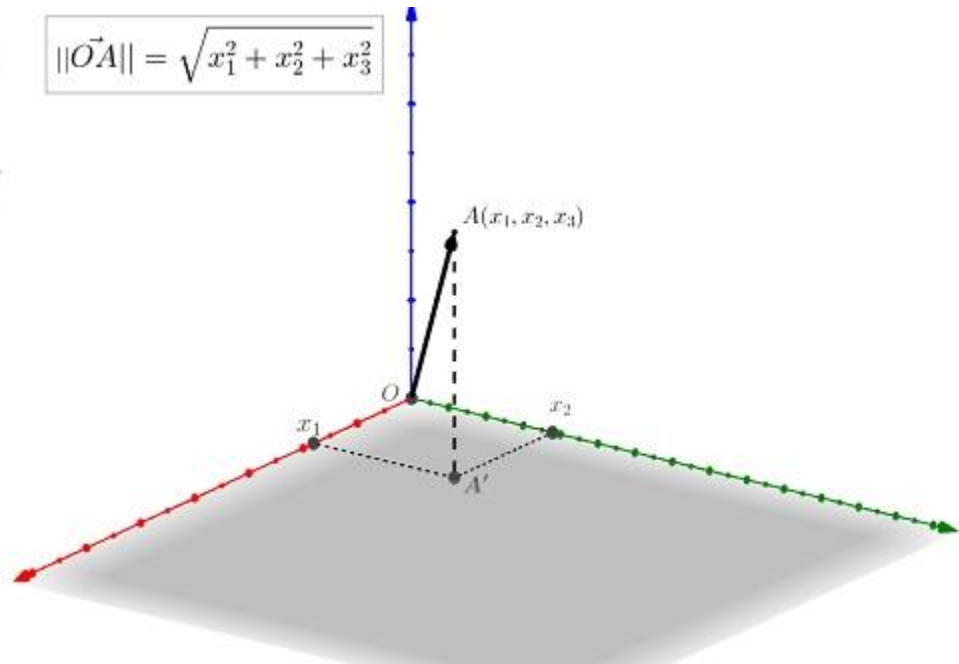
Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου ενός διανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο.

Μέτρο διανύσματος

$$\|\vec{OA}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\|OA'\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|AA'\| = x_3$$

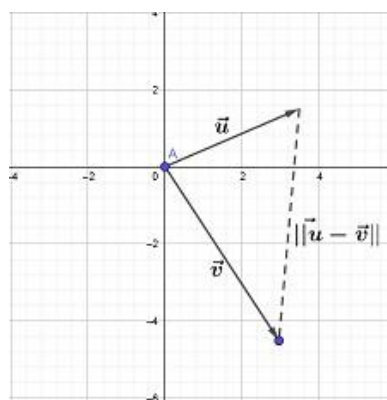


Σχήμα 8. Γεωμετρική απεικόνιση του μέτρου ενός διανύσματος στο χώρο

2.1.5 Απόσταση δύο διανυσμάτων.

Ορισμός : Η απόσταση δύο διανυσμάτων $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ στο $\mathbb{R}^2$ συμβολίζεται με

$$d(\vec{u}, \vec{v}) \text{ και ισούται με : } d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Σχήμα 9. Απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^2$

2.2 Διανυσματικός χώρος

Στην ενότητα αυτή θα εισαχθεί η έννοια του διανυσματικού χώρου, η οποία συναντάται σε πολλά προβλήματα του φυσικού μας κόσμου. Οι διανυσματικοί χώροι αποτελούν βασικό στοιχείο της Γραμμικής Άλγεβρας και βοηθούν στην κατανόηση των πινάκων για τους οποίους θα γίνει λόγος σε επόμενη ενότητα.

Ορισμός: Διανυσματικός χώρος (vector space) είναι ένα μη κενό σύνολο διανυσμάτων εφοδιασμένο με δύο πράξεις: την **πρόσθεση διανυσμάτων** και τον **πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα**

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι Ευκλείδειοι διανυσματικοί χώροι. Οι Ευκλείδειοι διανυσματικοί χώροι,

- μιας διάστασης είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών, η οποία ορίζει τον $\mathbb{R}^1$.
- δύο διαστάσεων είναι το καρτεσιανό επίπεδο, το οποίο ορίζει τον

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \}.$$

Σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα διάνυσμα και σε κάθε διάνυσμα του αντιστοιχεί ένα σημείο και αντίστροφα.

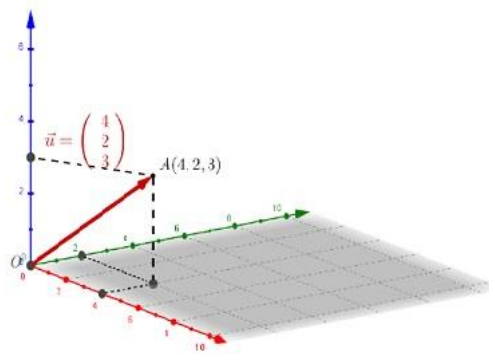
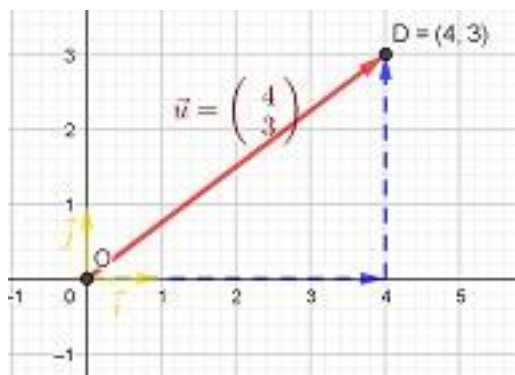
- Τριών διαστάσεων είναι ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος, ο οποίος ορίζει τον

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) / x,y,z \in \mathbb{R} \}.$$

Κάθε σημείο στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται από 3 συντεταγμένες και ορίζει ένα διάνυσμα στον χώρο αυτό.

- Και συνεχίζοντας, ο n-διαστατος χώρος αντιπροσωπεύει τον πραγματικό χώρο με n συντεταγμένες, ο οποίος ορίζει τον $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$.

Κάθε σημείο στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο ορίζεται από μια πλειάδα (n-αδα) συντεταγμένων και ορίζει με τη σειρά του ένα διάνυσμα, παρόλο που δεν μπορούμε να έχουμε μια γραφική παράσταση του $\mathbb{R}^n$. (Chiang,2009)



Σχήμα 10. Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Όπως ο πραγματικός Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, έτσι και ο μιγαδικός Ευκλείδειος n -χώρος ορίζεται ως : $C_n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) / z_i \in C, i=1,2,\dots,n\}$. Τα στοιχεία του χώρου C_n ονομάζονται σημεία ή διανύσματα και οι δε μιγαδικοί αριθμοί του χώρου C λέγονται συντεταγμένες του διανύσματος.(Strang,2016)

2.2.1 Γραμμική Ανεξαρτησία διανυσμάτων.

Σε κάθε διανυσματικό χώρο είναι χρήσιμη η γνώση ενός¹³ συνόλου γεννητόρων του, μιας και οι ιδιότητες των διανυσμάτων αυτών, επεκτείνονται και στα υπόλοιπα στοιχεία του διανυσματικού χώρου. Για τον λόγο αυτό, θα εξεταστεί η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων.

Ορισμός : Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$, n στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V τότε για οποιουδήποτε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ τα διανύσματα αυτά λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** όταν ο γραμμικός συνδυασμός τους

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ ισούται με το μηδέν αν και μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ορισμός : Τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ θα λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από τους παραπάνω ορισμούς, διαπιστώνεται ότι κάθε φορά που ένα τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ ισούται με το γραμμικό συνδυασμό άλλων διανυσμάτων, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

¹³ όσο το δυνατό μικρότερο

Πιο συγκεκριμένα,

$$\text{αν } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \Rightarrow \vec{v} - \lambda_1 \vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \dots - \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ **γραμμικώς εξαρτημένα**

Επιπροσθέτως, για κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, τα διανύσματα του είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού υπάρχει αριθμός $\lambda \neq 0$, τέτοιος ώστε : $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + \lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα στο $\mathbb{R}^2$, εάν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα στο $\mathbb{R}^3$, εάν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τέσσερα διανύσματα είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^3$. (Βλέπε παρακάτω, στα συμπεράσματα της βάσης ενός διανυσματικού χώρου σελ. 36)

Κάθε υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V , που εξακολουθεί να διατηρεί τις ιδιότητες του V λέγεται **διανυσματικός υπόχωρος** ή απλά **υπόχωρος** του διανυσματικού χώρου V και γράφουμε $U \subseteq V$.

Ειδικά, ένα μη κενό υποσύνολο U του διανυσματικού χώρου V λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του V , όταν :

- $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$

Όταν προσθέσουμε δύο διανύσματα του υπόχωρου, τότε το άθροισμά τους ανήκει στον υπόχωρο.

- $\lambda \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \vec{u} \in V \Rightarrow \lambda \cdot \vec{u} \in V$

Όταν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του υπόχωρου με έναν αριθμό, τότε το πολλαπλάσιό του ανήκει πάλι, στον υπόχωρο. (Χρυσάκης, 1987)

Ορισμός : Ένα σύνολο διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ λέγεται ότι παράγει έναν διανυσματικό υπόχωρο U , όταν οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v}$ του U γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε :

$$S(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n) = \{ \vec{v} \in U \mid \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \}$$

2.2.2 Βάση διανυσματικού χώρου.

Ορισμός : Βάση ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται ένα υποσύνολο διανυσμάτων του V το οποίο έχει δύο ιδιότητες:

- είναι γραμμικά ανεξάρτητο και,
- παράγει τον V .

Κάθε διανυσματικός χώρος έχει άπειρες βάσεις, αλλά όλες οι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. .

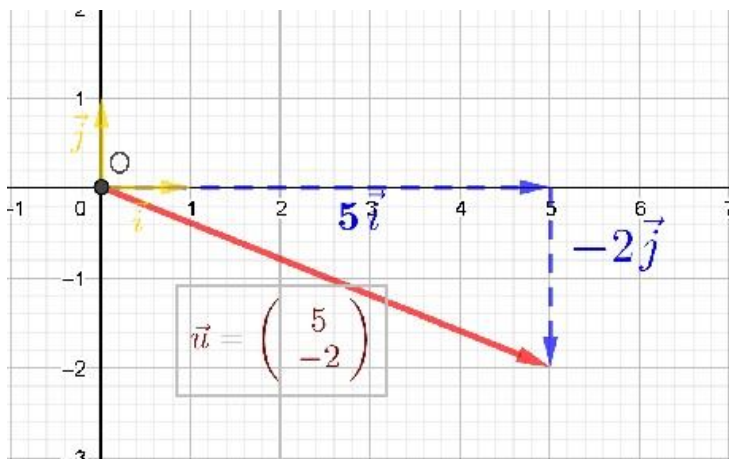
Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ είναι μια βάση του V , τότε κάθε στοιχείο $\vec{u} \in V$ γράφεται σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B , $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ¹⁴. Δηλαδή, $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$. Οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ λέγονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$ ως προς τη βάση $B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$. Αν, μάλιστα, η βάση είναι διατεταγμένη τότε το λ_1 θα λέγεται πρώτη συντεταγμένη, το λ_2 δεύτερη, ..., το λ_n n -ιοστή (Δονάτος, 2008).

Ο ορισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου είναι θεμελιώδης για τη Γραμμική Άλγεβρα διότι κάθε διάνυσμα γράφεται, μοναδικά, ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής.

Για παράδειγμα αν ορίσουμε στον $\mathbb{R}^2$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i} = (1,0)^T$ και $\vec{j} = (0,1)^T$, τότε το διάνυσμα $\vec{u} = (5,-2)^T$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο: $\vec{u} = 5\vec{i} + (-2)\vec{j}$. Άρα μία βάση του είναι το σύνολο: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ (Βλέπε σχ. 11 και τον σύνδεσμο <https://www.geogebra.org/m/aaegczdw>)

Δηλαδή κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ κατά μοναδικό τρόπο, τέτοιο ώστε: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, όπου οι αριθμοί x και y λέγονται συνιστώσες του $\vec{u}$.

¹⁴ Πραγματικά, αν $u \in V$ και $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ και $\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_n u_n$ είναι δυο γραμμικοί συνδυασμοί του u συναρτήσει των $u_1, u_2, \dots, u_n$ τότε
 $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \dots + \rho_n u_n \Leftrightarrow$
 $(\lambda_1 - \rho_1) u_1 + (\lambda_2 - \rho_2) u_2 + \dots + (\lambda_n - \rho_n) u_n = 0$ και επειδή τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έπεται ότι $\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \dots, \lambda_n = \rho_n$



Σχήμα 11. Γραμμικός συνδυασμός ενός διανύσματος ως προς την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

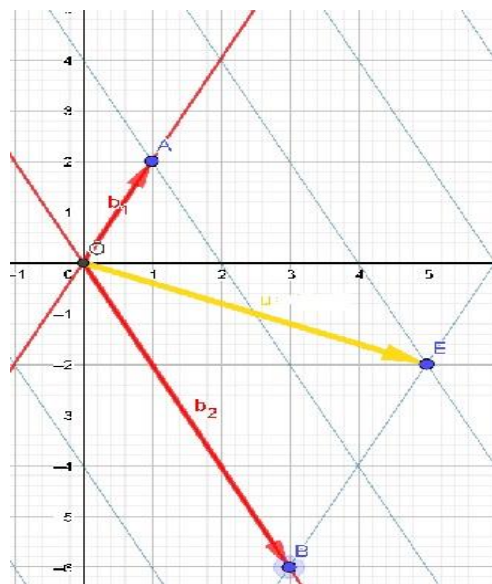
Αν όμως, το σύστημα συντεταγμένων αλλάξει, τότε οι συνιστώσες του διανύσματος αλλάζουν.

Για παράδειγμα, έστω στο $\mathbb{R}^2$ τα διανύσματα $\vec{b}_1=(1,2)^T$ και $\vec{b}_2=(3,-6)^T$ σαν νέα βάση, τότε για το διάνυσμα $\vec{u}$ του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε:

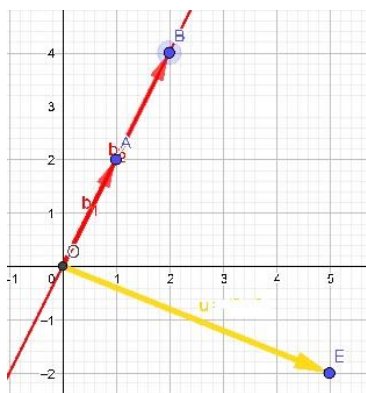
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \vec{b}_1 + \vec{b}_2. \text{ Άρα οι συντεταγμένες του διανύσματος μας στη νέα βάση είναι : } \vec{u}_{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Βλέπε σχ. 12 και τον σύνδεσμο: <https://www.geogebra.org/m/z8uddnsf>)

Επομένως, η έκφραση ενός διανύσματος με τη βοήθεια των συντεταγμένων του δεν είναι μοναδική, αλλά εξαρτάται από την επιλεγμένη βάση του διανυσματικού χώρου.



Σχήμα 12. Γραμμικός συνδυασμός διανύσματος u ως προς νέα βάση (b_1, b_2) του $\mathbb{R}^2$



Παρατήρηση:

Στην περίπτωση που ως βάση θεωρήσουμε διανύσματα, τα οποία είναι γραμμικώς εξαρτημένα π.χ. $\vec{b}_1 = (1, 2)^T$ και $\vec{b}_2 = (2, 4)^T$ τότε δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός που να μας δίνει το $\vec{u}$ και άρα δεν υφίσταται η συγκεκριμένη βάση για τον $\mathbb{R}^2$.

Σχήμα 13. Τα γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα δεν συνιστούν βάση

Ορισμός : Διάσταση (Dimension) ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου V ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του V . Έτσι, αν μια βάση του V έχει n στοιχεία, θα γράφουμε $\dim V = n$.

Από τον τελευταίο ορισμό προκύπτει ότι αν ένας διανυσματικός χώρος V έχει διάσταση n , τότε οποιαδήποτε το n πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V αποτελούν βάση του.

Άρα το $\mathbb{R}^2$ έχει διάσταση 2, το $\mathbb{R}^3$ έχει 3 κοκ.

Άμεσα συμπεράσματα της πρότασης αυτής είναι ότι, στους πραγματικούς διανυσματικούς χώρους ισχύουν τα εξής :

- $n+1$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- δεν υπάρχει σύνολο με περισσότερα από n διανύσματα, το οποίο να παράγει έναν υπόχωρο V , με $\dim V = n$.

Στη συνέχεια θα διαπιστωθεί ότι το σύνολο των πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό καθώς και ότι κάθε πίνακας θεμελιώνεται από τους υποχώρους των στηλών και των γραμμών του.

Η σύγκριση των διανυσματικών χώρων επιτυγχάνεται με απεικονίσεις. Όταν οι απεικονίσεις αυτές είναι γραμμικές, η εν λόγω σύγκριση διευκολύνεται, διαφορετικά είναι περίπλοκη. Μια ειδική περίπτωση γραμμικής απεικόνισης συνδέεται με την έννοια των όμοιων πινάκων, οι οποίοι αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση, αλλά σε δύο διαφορετικές βάσεις του διανυσματικού χώρου .

2.2.3 Γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων.

Στην επόμενη παράγραφο θα μελετηθούν οι πίνακες, που περιγράφουν γραμμικούς μετασχηματισμούς – απεικονίσεις, που λόγω του ότι εμπεριέχουν κίνηση θα χρησιμοποιείται ο όρος “μετασχηματισμός” αντί “απεικόνισης” κάθε φορά που θα αναφερόμαστε σε πίνακες. Οι γραμμικές απεικονίσεις κατέχουν κεντρική θέση στην επιστήμη της ρομποτικής, των γραφικών υπολογιστή κτλ. Χάρη στις γραμμικές απεικονίσεις, γίνεται αυτόματη αντιστοίχιση των σημείων σε νέες συντεταγμένες μέσω μετασχηματισμών, οι οποίοι μπορεί να περιστρέφουν τα σημεία αυτά γύρω από έναν άξονα, να τα μετακινούν στο χώρο κτλ. Είναι σκόπιμο, λοιπόν, να οριστεί η έννοια τους.

Ορισμός : Μία απεικόνιση ¹⁵ $L : U \rightarrow V$, μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων U και V θα λέγεται γραμμική, όταν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ του U ισχύει : $L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$

¹⁵ ή συνάρτηση

και

- Για κάθε βαθμωτό μέγεθος λ και για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ του U ισχύει : $L(\lambda \vec{u}) = \lambda L(\vec{u})$

Παρατήρηση : Οι προηγούμενες συνθήκες του ορισμού είναι ισοδύναμες με την παρακάτω συνθήκη :

Σε μία γραμμική απεικόνιση L μεταξύ δυο διανυσματικών χώρων, ισχύει :

$$L(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda L(\vec{u}) + \mu L(\vec{v}), \text{ όπου } \lambda, \mu \text{ βαθμωτά μεγέθη και } \vec{u}, \vec{v} \text{ διανύσματα.}$$

Όταν $U \equiv V$ τότε η απεικόνιση λέγεται γραμμικός μετασχηματισμός.

Τελειώνοντας είναι αναγκαίο να ορίσουμε τη σύνθεση δύο απεικονίσεων f, g :

Έστω οι απεικονίσεις $f: U \rightarrow V$ και $g: V \rightarrow W$ τότε ορίζουμε τη σύνθεσή τους ως την απεικόνιση $g \circ f: U \rightarrow W$, όπου $(g \circ f)(\vec{u}) = g(f(\vec{u}))$, με $\vec{u} \in U$

2.3 Πίνακας

Πίνακας ή **μήτρα** είναι μια ορθογώνια διάταξη στοιχείων σε γραμμές και στήλες, της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

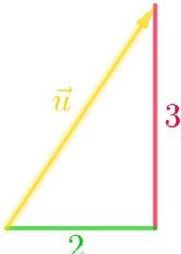
Πιο απλά, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι ένας πίνακας είναι ταξινομημένες λίστες αριθμών, πραγματικών ή μιγαδικών.

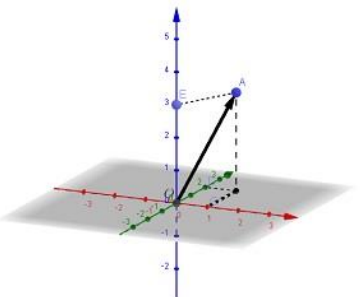
Οι αριθμοί $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ ονομάζονται στοιχεία του πίνακα A και οι δείκτες μας δείχνουν τη θέση που κατέχει κάθε στοιχείο στον πίνακα. Ο πρώτος δείκτης δείχνει τη γραμμή και ο δεύτερος δείχνει τη στήλη. Γι αυτό, εν συντομία, ο πίνακας γράφεται $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$

Όταν ο πίνακας έχει m γραμμές και n στήλες λέμε ότι είναι πίνακας τάξης-διάστασης $m \times n$.

Ένας πίνακας τάξης $m \times 1$ λέγεται πίνακας στήλη και είναι ένα διάνυσμα στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^m$

Αξιοσημείωτο είναι ότι οι πίνακες τύπου 2×1 και 3×1 ονομάζονται και διανύσματα διότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και του χώρου, αντίστοιχα, με τα στοιχεία των πινάκων αυτών. Στα παρακάτω παραδείγματα φαίνεται ότι τα στοιχεία των πινάκων K και M είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{OA}$, αντίστοιχα.

$$(2,3) \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{2} \quad \text{3} \\ \text{2} \end{array} \Leftrightarrow K = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$


$$(1,2,3) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \\ \text{3} \end{array} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$


Σχήμα 14. Αντιστοιχία σημείου, διανύσματος και πίνακα στήλη

2.3.1 Είδη πινάκων

Αν το πλήθος των γραμμών και των στηλών ενός πίνακα είναι το ίδιο (δηλαδή $m = n$) τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** τάξεως m . Σε έναν τετραγωνικό πίνακα τα στοιχεία α_{11} , α_{22} , α_{33} , ... , α_{mm} ονομάζονται διαγώνια και αποτελούν την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Οι τετραγωνικοί πίνακες της παρακάτω μορφής :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & & 0 \\ & \alpha_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{mm} \end{bmatrix}$$

λέγονται αντίστοιχα **άνω τριγωνικός**¹⁶, **κάτω τριγωνικός** και **διαγώνιος πίνακας**.

Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ με m γραμμές και m στήλες ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται I_m .

Αν θέλουμε να γράψουμε ένα διάνυσμα $\vec{u}$ ως πίνακα γραμμή τότε θα γράφουμε $\vec{u}^T$ και θα το διαβάζουμε : u ανάστροφο. Γενικά, ο **ανάστροφος (transpose)** ενός πίνακα A βρίσκεται αν διατάξουμε τις γραμμές του $A = [\alpha_{ij}]$ ως στήλες, συμβολίζεται με A^T και ισούται με $A^T = [\alpha_{ji}]$

Για τον ανάστροφο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, για οποιοδήποτε αριθμό λ.
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Ένας πίνακας λέγεται **συμμετρικός** όταν τα ζευγάρια των στοιχείων που είναι σε συμμετρικές θέσεις ως προς την κύρια διαγώνιο είναι ίσα δηλαδή $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$, ..., $\alpha_{1m} = \alpha_{m1}$, $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, ..., $\alpha_{2m} = \alpha_{m2}$, ..., $\alpha_{m-1,m} = \alpha_{m,m-1}$. Προφανώς, κάθε συμμετρικός πίνακας A είναι τετραγωνικός με $A^T = A$ (ο πίνακας που ταυτίζεται με τον ανάστροφό του). Οι συμμετρικοί πίνακες παρουσιάζουν πολλές και σημαντικές εφαρμογές στις οικονομικές και διοικητικές επιστήμες. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την **Εσσιανή μήτρα**¹⁷ που χρησιμοποιείται σε

¹⁶ δηλαδή $\alpha_{ij}=0$ για $i>j$

¹⁷ Η μήτρα όλων των μερικών παραγώγων β' τάξης $H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

προβλήματα βελτιστοποίησης και τους πίνακες συμμεταβλητότητας που χρησιμοποιούνται στη στατιστική και στην οικονομετρία.

Εξάλλου, ένας πίνακας λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $A = -A^T$ και **ορθογώνιος** αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$

Σχετικά με τα ανωτέρω, ισχύει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.¹⁸

Για κάθε πίνακα που έχει για στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, χρήσιμοι πίνακες είναι οι **συζυγείς πίνακες** και ο **Ερμιτιανός συζυγής πίνακας**¹⁹. Ο συζυγής ενός πίνακα A συμβολίζεται με $\bar{A}$ και αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A

Αν ο ανάστροφος του $\bar{A}$ είναι ίσος με τον A τότε ο $(\bar{A})^T$ είναι ένας τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας που ονομάζεται Ερμιτιανός, συμβολίζεται με A^H και γι αυτόν ισχύει ότι:

$$A^H = \bar{A}^T = \overline{A^T} = A.$$

Ο **αντίστροφος** ενός πίνακα A συμβολίζεται με A^{-1} και έχει τις εξής ιδιότητες :

- ✓ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- ✓ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ✓ $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- ✓ $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$
- ✓ $\lambda A^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Δύο πίνακές με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών που τα στοιχεία τους στις ίδιες θέσεις είναι ίσα, ονομάζονται ίσοι

Βαθμός (rank) ενός πίνακα ονομάζεται το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα.

2.3.2 Πράξεις πινάκων.

Πρόσθεση πινάκων

¹⁸ Σελ. 43-44 Χρυσάκης Θ. Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας

¹⁹ ή προσαρτημένος

Για να προσθέσουμε δύο πίνακες πρέπει να έχουν ίσες τις γραμμές και ίσες τις στήλες τους δηλαδή να είναι ίδιου τύπου. Τότε απλά αθροίζουμε τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις.

Για παράδειγμα το άθροισμα δύο τετραγωνικών πινάκων στο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται ως :

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό πίνακες διαφορετικού τύπου δεν μπορούν να προστεθούν.

Πολλαπλασιασμός αριθμού επί πίνακα

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πίνακα με έναν αριθμό λ , αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πίνακα επί λ .

Για παράδειγμα, για έναν τετραγωνικό πίνακα ορίζουμε το βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} \\ \lambda \alpha_{21} & \lambda \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: Για $\lambda = -1$, ο πίνακας $(-1)A = -A$ λέγεται αντίθετος του A . Έτσι για τους πίνακες A και B ίδιου τύπου ορίζεται η διαφορά τους ως εξής : $A - B = A + (-B)$

Πολλαπλασιασμός πινάκων

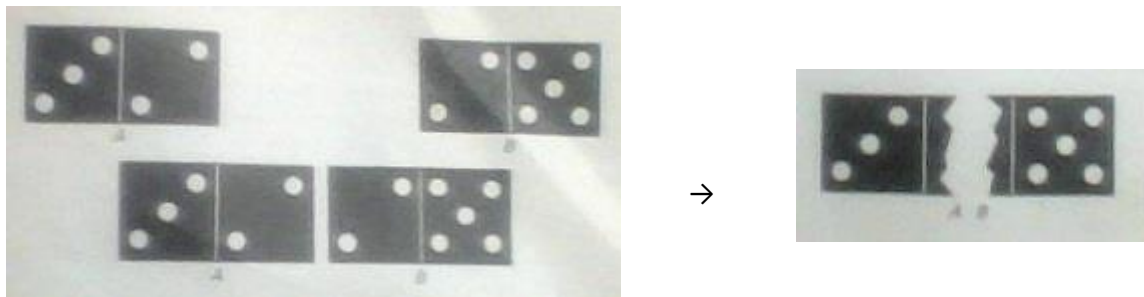
Ο πολλαπλασιασμός AB των πινάκων A και B είναι αρκετά περίπλοκος.

Για να βοηθηθούμε, ας ορίσουμε αρχικά το γινόμενο ενός πίνακα γραμμή, οποίος έχει ως στοιχεία τα διανύσματα γραμμές του A , με έναν πίνακα στήλη, με στοιχεία τα διανύσματα στήλες του B

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Για να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων A και B , βασική προϋπόθεση είναι όσες στήλες έχει ο A τόσες γραμμές να έχει ο B . Πιο συγκεκριμένα, αν ο A έχει διαστάση $m \times s$, ο B θα πρέπει να έχει διάσταση $s \times n$ και τότε το γινόμενό τους θα είναι ένας πίνακας τάξης $m \times n$.

Σχηματικά αυτό μας θυμίζει το ντόμινο.



Αναδημοσίευση της φωτογραφίας από το βιβλίο *Martices and society* των I.Bradley and R.Meek, 1986 , σ.25, England: © Penguin books.

Έτσι για να υπολογίσουμε το στοιχείο στη θέση ij του πίνακα γινόμενο AB , θα πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της i γραμμής του πίνακα A επί τα στοιχεία της j στήλης του πίνακα B .

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 64 \end{bmatrix} \quad 1 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times 11 = 58 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix} \quad 1 \times 8 + 2 \times 10 + 3 \times 12 = 64 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix} \quad 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11 = 139 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix} \quad 4 \times 8 + 5 \times 10 + 6 \times 12 = 154
 \end{array}$$

Η παραπάνω εικόνα είναι αναρτημένη από το διαδίκτυο²⁰ και είναι ένα χαρακτηριστικά λυμένο παράδειγμα, από το οποίο ο φοιτητής μπορεί να κατανοήσει το μηχανισμό του πολλαπλασιασμού δύο πινάκων

Ιδιότητες στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Για ευνόητους λόγους, στον πολλαπλασιασμό πινάκων²¹, η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει γενικά, ενώ διατηρείται η ισχύς της προσεταιριστικής και επιμεριστικής ιδιότητας. Επομένως, έχουμε :

$$A \cdot B \neq B \cdot A,$$

$$\text{ενώ } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ και}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Για κάθε πίνακα $A_{m \times n}$ ισχύει η ισότητα : $I_m A = A I_n = A$.

Τώρα, έστω A ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας. Θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε : $AB = BA = I_n$. Ένας τέτοιος πίνακας B , αν υπάρχει, είναι μοναδικός, λέγεται αντίστροφος του A και συμβολίζεται A^{-1} .

Παρατήρηση :

Είναι δυνατόν

✓ $AB = 0$, αλλά $A \neq 0$ και $B \neq 0$, καθώς και

✓ $AB = AC$, αλλά $B \neq C$.

2.3.3 Το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα .

Ορισμός : Το γινόμενο, ενός $m \times n$ πίνακα $M = [a_{ij}]$ με ένα n -διάνυσμα $\vec{u} = (u_j)$, είναι ένα m -διάνυσμα $M\vec{u}$ του οποίου η συνιστώσα στη θέση i είναι το εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του πίνακα M με το διάνυσμα $\vec{u}$.

²⁰ https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fsv.answerelf.com%2F46507-how-do-you-multiply-matrices-3-2-3-1-2-4-and-3-1-2-4-and-2-4-1-3-67&psig=AOvVaw1B4hkmw9ESUmlE31rQ1pB9&ust=1582717000218000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxgFwoTCMCQo_vX7OcfQAAAAAdAAAAABA0

²¹ Ακόμα και αν ορίζονται τα γινόμενα AB και BA .

$$M\vec{u} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ όπου } y_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Θα μπορούσαμε εδώ, να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση της μορφής

$$\vec{u} \xrightarrow{f} M\vec{u} \text{ με } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Για παράδειγμα, έστω $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, τότε αν $f(u) = Mu$, με $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

έχουμε ότι : $f(1,2,3) = (-2,11)$

Επιπροσθέτως, παρατηρούμε ότι για τον πίνακα $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{bmatrix}$ και το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

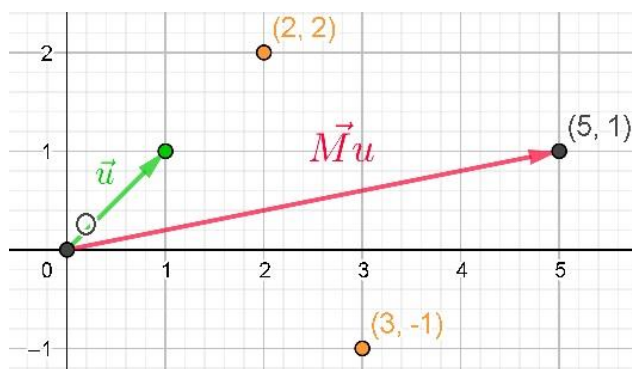
$$Mu = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ cx + dy \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \alpha \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \beta \\ d \end{bmatrix}$$

δηλαδή το διάνυσμα $M\vec{u}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα M με συντελεστές τις συντεταγμένες του $\vec{u}$. Άρα όταν οι στήλες του πίνακα M είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε μπορούμε να μιλάμε για μία βάση του $\mathbb{R}^2$.

Για παράδειγμα, οι στήλες του πίνακα

$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, διότι

$$\overrightarrow{Mu} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ -1x + 2y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

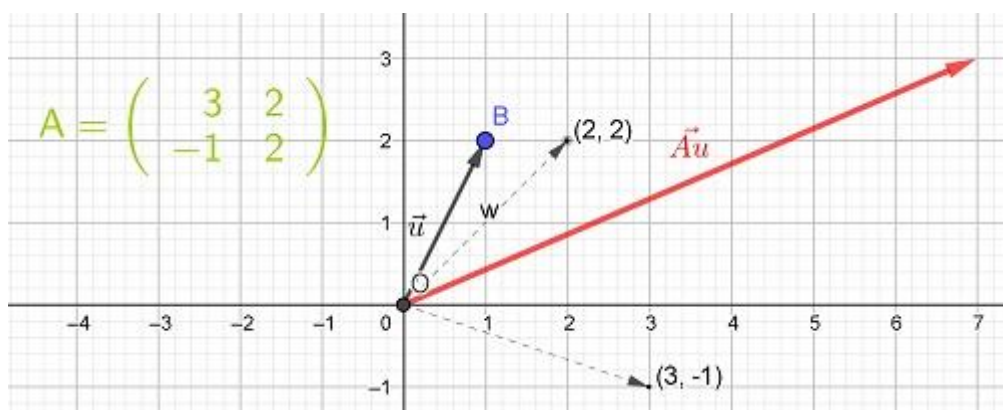


Σχήμα 15. Γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$

Από το σχήμα 15 φαίνεται, ότι τα διανύσματα $\vec{u}$, $M\vec{u}$ δεν είναι «απαραίτητα» συγγραμμικά. Η λέξη απαραίτητα κρίνεται αναγκαία στην παρούσα φάση της εργασίας να μπει σε εισαγωγικά, εφόσον σε παρακάτω ενότητα θα εισάγουμε μία σημαντική ιδιότητα των διανυσμάτων $\vec{u}$, $M\vec{u}$, όταν αυτά γίνουν συγγραμμικά.

2.3.4 Αντιστοιχία γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Ξεκινάμε την ενότητα αυτή με ένα σχήμα και προτείνουμε ένα πειραματισμό πατώντας τον σύνδεσμο <https://www.geogebra.org/m/bfeyqzut>, ώστε ο αναγνώστης της εργασίας αυτής να διαπιστώσει τα όσα θα αναφερθούν παρακάτω.



Σχήμα 16. Ο πίνακας ως ένας γραμμικός μετασχηματισμός του διανύσματος

Για την απεικόνιση $f: U \rightarrow V$ και για τις βάσεις $S_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $S_V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ των διανυσματικών χώρων U και V , αντίστοιχα, τα στοιχεία $f(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ του διανυσματικού χώρου V γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικοί συνδυασμοί των v_i , $i = 1, 2, \dots, m$, δηλαδή υπάρχουν $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$: $f(u_i) = \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \dots + \alpha_{im} v_m$

Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας αναπαράστασης της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τις βάσεις S_U , S_V είναι :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ όπου η πρώτη στήλη του πίνακα } M \text{ σχηματίζεται από τις}$$

συντεταγμένες του $f(u_1)$ ως προς τη βάση S_V , η δεύτερη στήλη από τις συντεταγμένες του $f(u_2)$ ως προς τη βάση S_V κ.ο.κ

Βασικό συμπέρασμα :

Τελικά, οφείλουμε να σκεφτόμαστε τους πίνακες ως γραμμικούς μετασχηματισμούς,²² οι οποίοι όταν πολλαπλασιάζουν ένα διάνυσμα, το μετακινούν σε μία νέα θέση σε σύστημα συντεταγμένων με βάση τα διανύσματα των στηλών ή των γραμμών του πίνακα (Βλέπε σχήμα 16).

Οι πιο συνηθισμένοι μετασχηματισμοί είναι οι γραμμικοί, οι οποίοι "διατηρούν" την αρχή των αξόνων σταθερή και τις παράλληλες γραμμές τους ώστε να "παραμένουν" παράλληλες και ομοιόμορφα κατανομημένες. Στους γραμμικούς μετασχηματισμούς περιλαμβάνονται η περιστροφή (rotation), η κλιμάκωση (dilatation), ο αντικατοπτρισμός (reflection) και η στρέβλωση ενός αντικειμένου.

2.3.5 Παραδείγματα γραμμικών μετασχηματισμών στο επίπεδο.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ (καμία αλλαγή)}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{bmatrix} \text{ (αλλαγή κλίμακας)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \text{ (αντικατοπτρισμός ως προς την αρχή των αξόνων)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \text{ (αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα } x')$$

²² <https://www.geogebra.org/m/mffmefet>

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα } y'y)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{επέκταση κατά μήκος του άξονα } x'x)$$

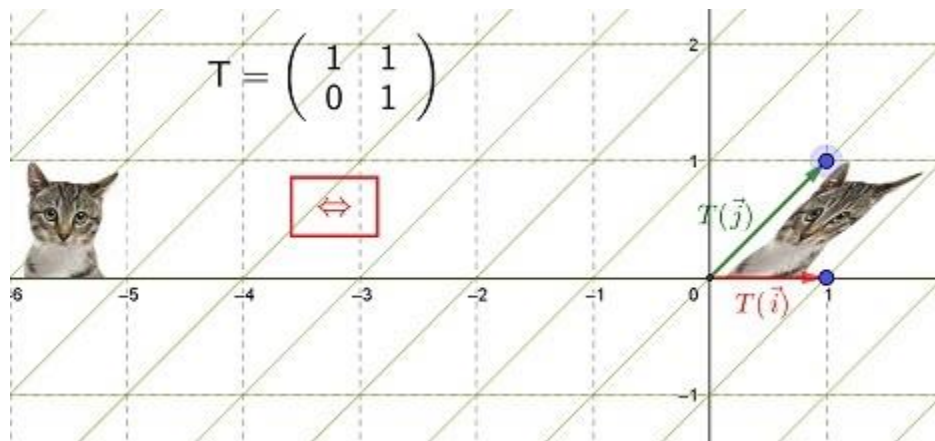
$$\begin{bmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \kappa y \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{στρέβλωση})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ my \end{pmatrix} \quad (\text{μετακίνηση})$$

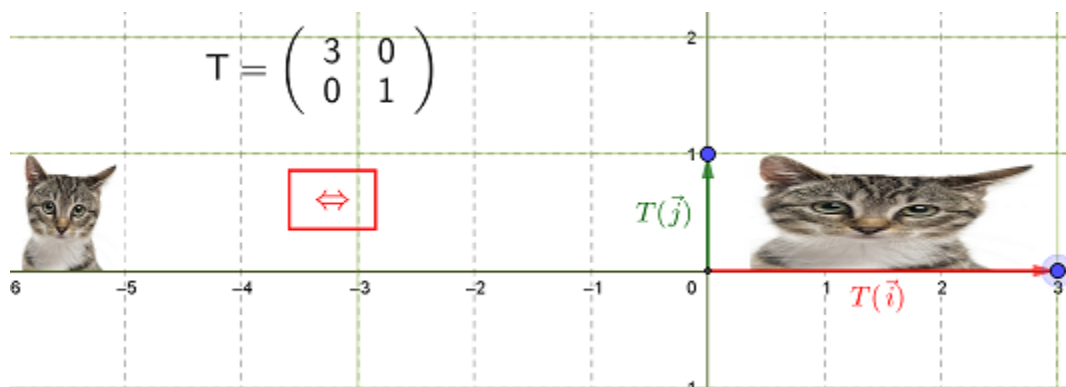
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix} \quad (\text{περιστροφή κατά γωνία } \theta, \text{ αριστερόστροφα})$$

Στα παρακάτω σχήματα, καθώς επίσης και στο μικροπείραμα που βρίσκεται ακολουθώντας τον σύνδεσμο: <https://www.geogebra.org/m/ypvhpswk> παρατηρούμε και διαπιστώνουμε τους κατάλληλους πίνακες γραμμικών μετασχηματισμών.

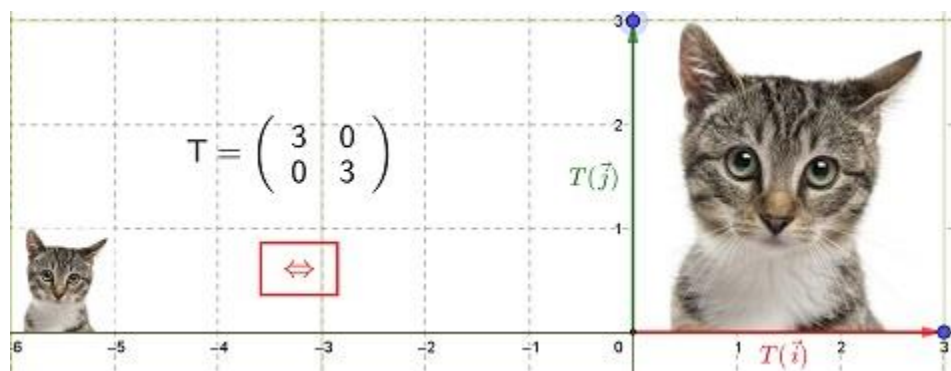
Σχήμα 17. Οπτική αναπαράσταση γραμμικών μετασχηματισμών πίνακα σε εικόνα



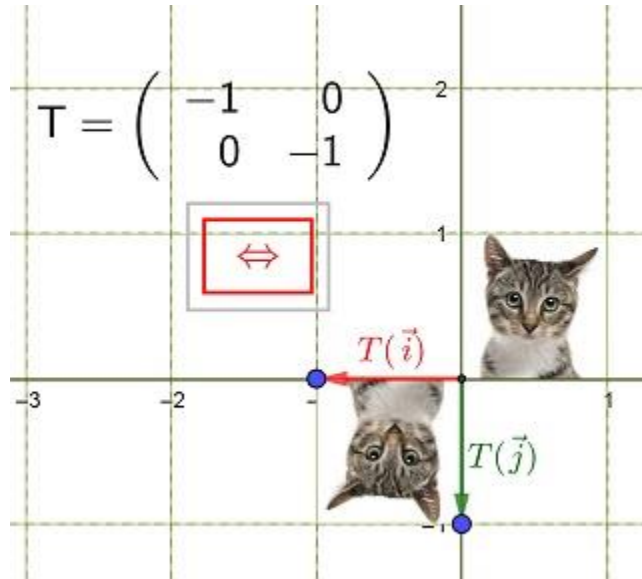
Στρέβλωση



Τέντωμα κατά μήκος του x'



Κλιμάκωση 1:2



Αντικατοπτρισμός ως προς την αρχή των αξόνων

2.4 Ορίζουσα πίνακα

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ένας αριθμός, ο οποίος αντιστοιχεί στον πίνακα κατά ένα συγκεκριμένο τρόπο και συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $\det A$ ή $|A|$.

Οι ορίζουσες τα τελευταία εκατό χρόνια δεν είναι στο επίκεντρο της Γραμμικής Άλγεβρας.²³ Παρόλα αυτά είναι εκπληκτικό πόσα πολλά μπορεί να κάνει αυτός ο αριθμός.

Μερικές χρήσεις των οριζουσών είναι οι εξής:

1. Οι ορίζουσες ελέγχουν αν ένας πίνακας έχει αντίστροφο ή ισοδύναμα αν είναι αντιστρέψιμος: **Αν $|A| \neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος** καθώς επίσης, βρίσκουν τον αντίστροφο του πίνακα **αφού ο A^{-1} περιέχει τον αριθμό $\frac{1}{|A|}$.**
2. Οι ορίζουσες επιλύουν ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής $Ax = b$ ²⁴ και υπολογίζουν την μοναδική του λύση από τον τύπο $x = A^{-1}b$ με τον κανόνα του Cramer.

²³ Strang Gilbert p.225

²⁴ όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και b ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων των εξισώσεων του συστήματος

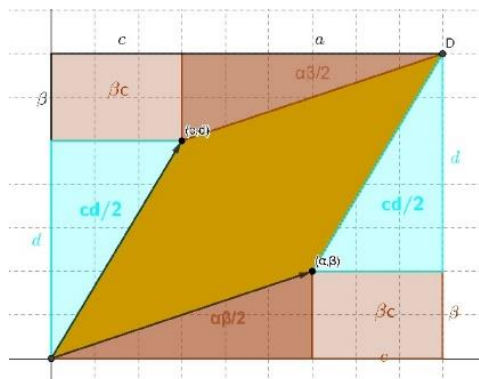
3. Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα A είτε 2×2 είτε 3×3 με πραγματικά στοιχεία, γεωμετρικά ερμηνεύεται ως η κλίμακα με την οποία πολλαπλασιάζεται το εμβαδό και αντίστοιχα ο όγκος από το γραμμικό μετασχηματισμό που περιγράφει ο πίνακας A στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}^3$ ενώ το πρόσημο της δείχνει τον προσανατολισμό αυτού του μετασχηματισμού.
4. Οι ορίζουσες της μορφής $A - \lambda I$, όπου η παράμετρος λ αφαιρείται από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα A $n \times n$ μας βοηθούν να υπολογίσουμε τις n σε πλήθος ιδιοτιμές του πίνακα A επιλύοντας την εξίσωση $|A - \lambda I| = 0$ (χαρακτηριστική εξίσωση βαθμού n ως προς λ).

2.4.1 Η ορίζουσα πίνακα 2×2 .

Η ορίζουσα ενός πίνακα 2×2 υπολογίζεται ως εξής : $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ και η απόλυτη τιμή της εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδόν²⁵ του παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα διανύσματα των στηλών ή των γραμμών του πίνακα.

Ας θεωρήσουμε το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα γραμμών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{bmatrix}$$



Σχήμα 18. Γεωμετρικός υπολογισμός του τύπου της ορίζουσας πίνακα 2×2 , με εμβαδά

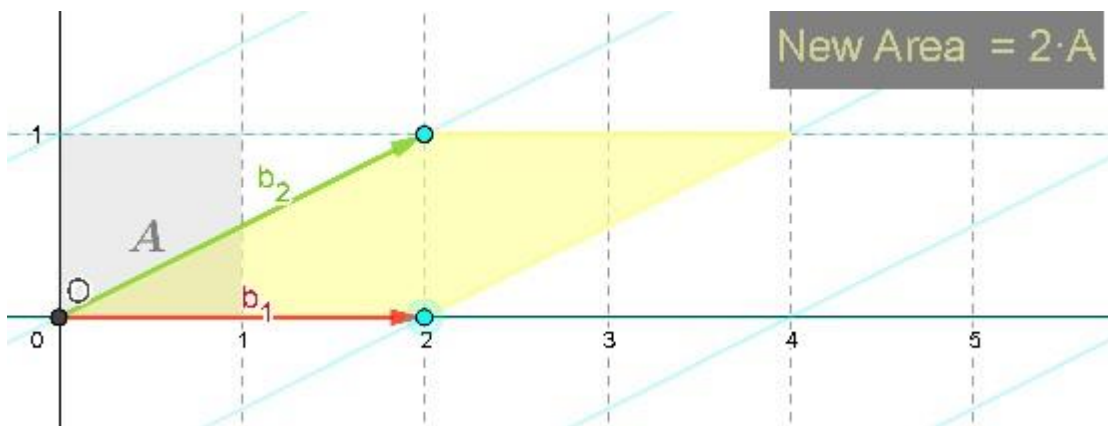
²⁵ με μονάδα μέτρησης, το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα της βάσης του διανυσματικού χώρου.

Όπως μπορούμε να διακρίνουμε από το σχήμα 18, το εμβαδό του παραλληλογράμμου υπολογίζεται με αφαίρεση των εμβαδών των άλλων σχημάτων από το εμβαδό του ορθογώνιου με διαστάσεις : $\alpha + d$, $\beta + c$:

$$E = (\alpha + c)(\beta + d) - [2\beta c + 2(cd/2) + 2(\alpha\beta/2)] = \alpha\beta + \alpha d + c\beta + cd - (2\beta c + cd + \alpha\beta) \\ = \alpha d - c\beta$$

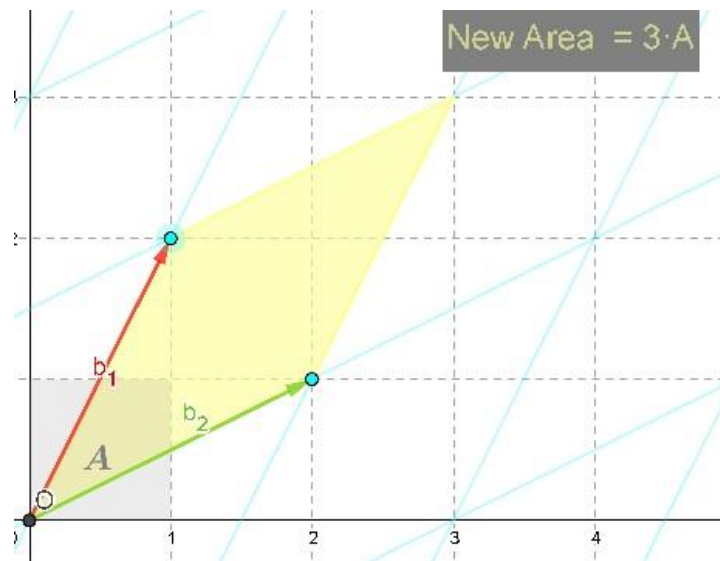
Παραθέτουμε, επίσης τον σύνδεσμο <https://www.geogebra.org/m/h7jy2wk3> για πειραματισμό και το αντίστοιχο φύλλο εργασίας στα παραρτήματα της παρούσας εργασίας.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα συγκεκριμένα, εκφράζει τη μεταβολή του εμβαδού A του τετραγώνου που σχηματίζεται από τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα ίδιας διάστασης και η παραδοχή αυτή μπορεί να διαπιστωθεί είτε από το σχ. 19 , είτε από το μικροπείραμα πατώντας [εδώ](#).



Σχήμα 19. Η ορίζουσα πίνακα αναπαριστά την κλίμακα μεταβολής του εμβαδού του χωρίου που ορίζει ο μοναδιαίος πίνακας I_2

Εάν η ορίζουσα του πίνακα είναι αρνητικός αριθμός, τότε το παραλληλόγραμμο περιστρέφεται δεξιόστροφα και η γωνία του σχηματίζεται από το δεύτερο διάνυσμα $(c,d)^T$ στο πρώτο διάνυσμα $(\alpha,\beta)^T$ των γραμμών ή των στηλών του πίνακα (Βλέπε σχ. 20).



Σχήμα 20. Η γεωμετρική ερμηνεία ορίζουσας πίνακα με αρνητική τιμή

Σε αυτή την περίπτωση η **απόλυτη τιμή** της ορίζουσας παριστάνει τη μεταβολή του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από τα διανύσματα στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_2

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα ίση με -3 . Όπως διακρίνουμε στο σχήμα 20, η απόλυτη τιμή της ορίζουσας ισούται με την αύξηση του εμβαδού A .

Τι έχει όμως, συμβεί; Ο Ευκλείδειος χώρος $x-y$ έχει περιστραφεί κατά 180° , όπως ένα κομμάτι χαρτί που το γυρίζουμε ανάποδα.

Προφανώς, από το σχήμα 13 της σελ.35 μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν οι στήλες ή οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα τότε ο πίνακας έχει ορίζουσα ίση με το μηδέν.

2.4.2 Ιδιότητες των οριζουσών.

Χρησιμοποιώντας το μικροπείραμα <https://www.geogebra.org/m/h7jy2wk3>

μπορούμε να διαπιστώσουμε την ισχύ των παρακάτω ιδιοτήτων των οριζουσών. Το συγκεκριμένο αρχείο χρησιμοποιεί τεχνικές καθοδήγησης, εφόσον συνοδεύεται από το φύλλο εργασίας των οριζουσών, το οποίο δίνεται στα παραρτήματα.

Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι 1

$$\checkmark \quad \det(I) = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα δεν αλλάζει όταν οι γραμμές του γίνουν στήλες ή οι στήλες γίνουν γραμμές.

$$\checkmark \quad |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|,$$

Η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο όταν εναλλάσσουμε δυο γραμμές της ή δύο στήλες της

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Για τετραγωνικούς πίνακες της ίδιας διάστασης,

Η ορίζουσα του AB ισούται με το γινόμενο των οριζουσών τους

$$\checkmark \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Παρατήρηση : Για το άθροισμα δεν ισχύει ανάλογη σχέση, δηλ. γενικά έχουμε :

$$\checkmark \quad \det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Η ορίζουσα του αντίστροφου ενός πίνακα ισούται με το αντίστροφο της ορίζουσάς του

$$\checkmark \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\checkmark \quad \det(\kappa A) = \kappa^n \det(A) \text{ για κάθε } n \times n \text{ πίνακα}$$

$$\checkmark \quad \det(A^n) = (\det A)^n$$

Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης ενός πίνακα A πολλαπλασιαστούν επί κ , τότε η ορίζουσα του νέου πίνακα ισούται με $\kappa \cdot \det(A)$

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} \kappa\alpha & \kappa\beta \\ c & d \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix}$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα που δύο γραμμές ή δύο στήλες του είναι ίσες, ισούται με το μηδέν

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Αν το πολλαπλάσιο μιας γραμμής ή μιας στήλης του πίνακα προστεθεί σε μια άλλη γραμμή ή στήλη του πίνακα, τότε η ορίζουσά του παραμένει ίδια

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \kappa c & \beta + \kappa d \\ c & d \end{vmatrix}$$

Εάν ο πίνακας έχει μια μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε η ορίζουσά του ισούται με το μηδέν

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

Εάν ο πίνακας έχει δυο γραμμές ή στήλες ανάλογες, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το μηδέν

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda\alpha & \lambda\beta \end{vmatrix} = 0$$

Εάν ο πίνακας είναι τριγωνικός, τότε η ορίζουσά του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγώνιου του

$$\checkmark \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn} = \prod \alpha_{ii}, \text{ όταν } \alpha_{ij} = 0 \text{ με } i > j \text{ ή με } i < j$$

Εάν ο πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος (non-singular), τότε $\det(A) \neq 0$.

Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (singular), τότε $\det(A) = 0$

Στο σημείο αυτό της εργασίας να τονιστεί, ότι αδυναμία των εκπαιδευτικών λογισμικών θα ήταν ο εκπαιδευόμενος να αρκεστεί στην παρατήρηση των ιδιοτήτων των οριζουσών και να μην ασχοληθεί με την απόδειξή τους πο είναι η ουσιαστική μαθηματική σκέψη.

2.4.3 Η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 .

Η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 υπολογίζεται με το ανάπτυγμα Laplace ως προς μία γραμμή ή στήλη²⁶, ως εξής :

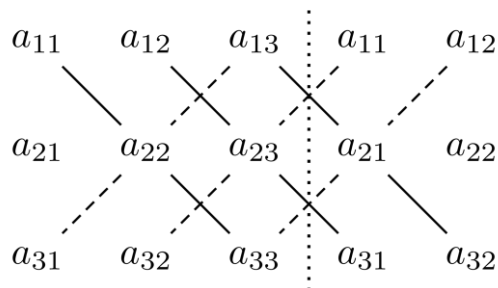
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \dots$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Από τον τελευταίο τύπο ορίζεται επιπλέον, ένας μνημονικός κανόνας για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας πίνακα 3×3 , ο κανόνας του Sarrus όπως έχει επικρατήσει να λέγεται. Σύμφωνα με

²⁶ Η επιλογή γίνεται ανάλογα με το πλήθος των μηδενικών στοιχείων που έχει ο πίνακας. Εδώ αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής

αυτόν υπολογίζεται το άθροισμα των γινομένων των τριών διαγώνιων στοιχείων από το πάνω αριστερά προς το κάτω δεξιά μείον το άθροισμα των γινομένων των διαγώνιων στοιχείων από το κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά, έχοντας ήδη αντιγράψει τις δύο πρώτες στήλες του πίνακα δίπλα του όπως φαίνεται στο σχήμα 20.



Σχήμα 21. Ο κανόνας του Sarrus για ορίζουσα 3×3

Γενικά, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 αλλά και ανώτερης διάστασης, προτιμότερο είναι να χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Laplace από τον κανόνα του Sarrus.

Έστω ότι αναπτύσσουμε ως προς την $1^{\text{η}}$ γραμμή, τότε έχουμε:

$\det(A) = \sum_{j=1}^3 a_{1j} C_{1j}$, όπου ο αριθμός $C_{1j} = (-1)^{1+j} \det M_{1j}$ ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{1j} , οι ορίζουσες $\det M_{1j}$ λέγονται ελάσσονες ορίζουσες του στοιχείου a_{1j} και υπολογίζονται διαγράφοντας την 1η γραμμή και την j στήλη του πίνακα A , για $j=1,2,3$.

Προφανώς, ισχύει :

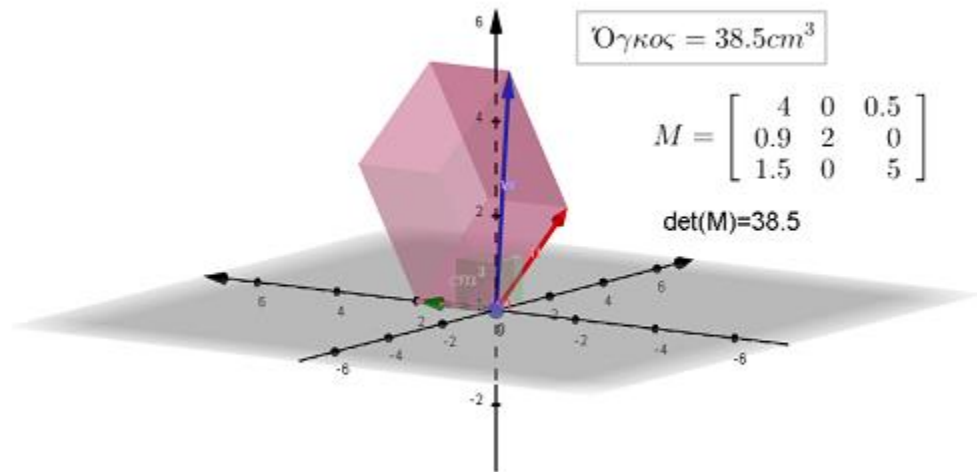
$$\det(A) = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} .$$

Ο παράγοντας C_{1j} , $j=1,2,3$ περιέχει την ελάσσονα ορίζουσα $\det M_{1j}$, που σχηματίστηκε αφότου σβήσαμε την $1^{\text{η}}$ γραμμή με την αντίστοιχη j στήλη με το σωστό πρόσημο που ορίζεται από τον παράγοντα $(-1)^{1+j}$.

Τέλος από το σχήμα 22, όπου βλέπουμε μία γεωμετρική αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των γραμμών ενός πίνακα τριών διαστάσεων, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου²⁷ που έχει ακμές τα διανύσματα που ορίζονται από τις στήλες ή τις γραμμές του πίνακα διαστάσεων 3×3 δίνεται από την απόλυτη τιμή της ορίζουσας αυτού του πίνακα.

Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας πίνακα 3×3



Σχήμα 22. Γεωμετρική αναπαράσταση της ορίζουσας πίνακα 3×3

2.5 Χαρακτηριστικά ποσά πίνακα

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούν τα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα που είναι οι ιδιοτιμές (eigenvalues) και τα ιδιοδιανύσματα (eigenvectors) του. Ο στόχος είναι να προσεγγιστούν με γεωμετρικό τρόπο, ώστε να γίνουν κατανοητά. Σύμφωνα με τον Λουκάκη (2016) στο βιβλίο του Πρόσκληση στα Μαθηματικά, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A παίζουν κεντρικό ρόλο στη δυναμική ανάλυση, στη βελτιστοποίηση, στη θεωρία των πιθανοτήτων, στην οικονομετρία και πιο γενικά στους γραμμικούς μετασχηματισμούς,

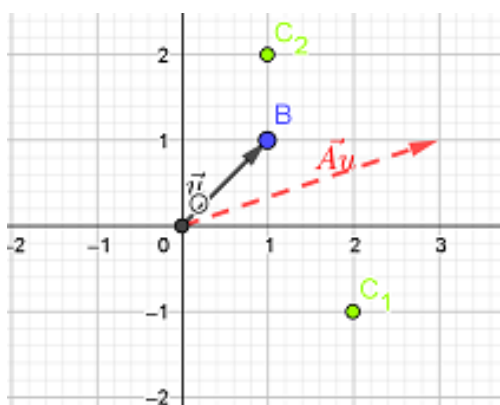
Ορισμός : Έστω ένας τετράγωνος πίνακας A και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$: εάν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε : $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ τότε το διάνυσμα $\vec{u}$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

²⁷ με μονάδα μέτρησης των όγκο του κύβου με ακμές τα διανύσματα του μοναδιαίου πίνακα I_3

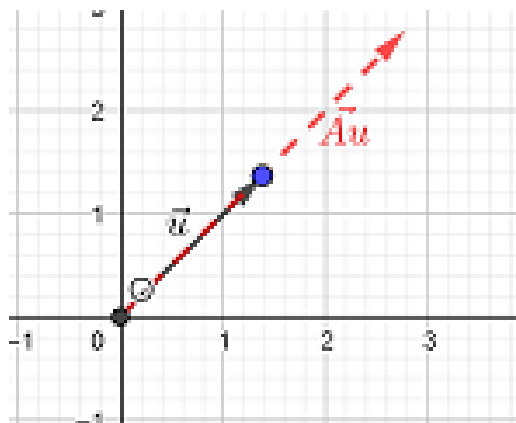
Με άλλα λόγια, αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$ πολλαπλασιαστεί από αριστερά με έναν πίνακα A και δεν αλλάξει διεύθυνση, αλλά μόνο μέτρο κατά λ φορές, τότε το διάνυσμα αυτό είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A και ο παράγοντας λ είναι η ιδιοτιμή, στην οποία αντιστοιχεί.

Σύμφωνα με την έρευνα του Τσάνη (χ.χ), όπου αναφέρεται στο Moller, (2004) στις σημειώσεις του, οι ιδιοτιμές έχουν μεγάλη σημασία στην περίπτωση που ο πίνακας περιγράφει μετασχηματισμό από ένα διανυσματικό χώρο στον εαυτό του.

2.5.1 Γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.



Σχήμα 23. Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού πίνακα A με διάνυσμα u



Σχήμα 24. Η συγγραμμικότητα των διανυσμάτων u και Au

Παρατηρώντας το σχήμα 23, για τον τετραγωνικό πίνακα A , ο πολλαπλασιασμός $A\vec{u}$ μετασχηματίζει το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$ σε διάφορες διευθύνσεις. Υπάρχει όμως, και η περίπτωση, όπου ο μετασχηματισμός αυτός παράγει συγγραμμικά διανύσματα σύμφωνα με το σχήμα 24. Τότε ο πίνακας A μετασχηματίζει το $\vec{u}$ σε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιό του $\lambda\vec{u}$, όπου το λ είναι μία ιδιοτιμή του A και το $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A , το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ανάλογα με τις τιμές του λ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις (Cvetkovic,1997):

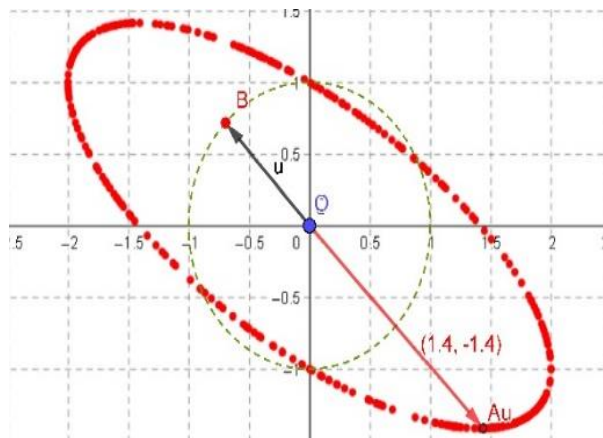
Αν $\lambda > 0$, τότε το $\vec{u}$ επεκτείνεται(τεντώνεται)

Αν $0 < \lambda < 1$, τότε το $\vec{u}$ συμπτύσσεται

Αν $\lambda = 1$, τότε το $\vec{u}$ δεν αλλάζει

Αν $\lambda = 0$, τότε το $\vec{u}$ μετασχηματίζεται στο μηδενικό διάνυσμα

Αν $\lambda < 0$, τότε το $\vec{u}$ μετασχηματίζεται σε αντίθετη κατεύθυνση.



Σχήμα 25. Η κίνηση του $A\vec{u}$ διαγράφει έλλειψη, καθώς το $\vec{u}$ κινείται στο μοναδιαίο κύκλο

Αξιοσημείωτη είναι η εφαρμογή σε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$, μέσα από το μικροπείραμα <https://www.geogebra.org/m/dq435zrn>, απ' όπου μπορεί να διαπιστωθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των περάτων των διανυσμάτων $A\vec{u}$ είναι μία έλλειψη. (Βλέπε Σχ.25)

2.5.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών.

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A φέρουμε την εξίσωση $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ στην εξής ισοδύναμη μορφή : $A\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{0}$ και λύνουμε το ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων $(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0}$, το οποίο θέλουμε να έχει μοναδική λύση για το $\vec{u}$.

Όπως θα δούμε στο τρίτο κεφάλαιο, ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει μοναδική λύση, αν ο πίνακας των συντελεστών του είναι ιδιάζων. Με άλλα λόγια, η ορίζουσά του πρέπει να είναι μηδέν: $\det(A-\lambda I) = 0$, η οποία καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A , βαθμού ως προς λ ίσου με τη διάσταση του πίνακα.

Από την εξίσωση αυτή, υπολογίζονται εκείνοι οι αριθμοί λ_i , πραγματικοί ή μιγαδικοί, τόσοι στο πλήθος όσο και η τάξη του πίνακα A , που δεν είναι αναγκαστικά διαφορετικοί ο ένας από τον άλλο, και λέγονται ιδιοτιμές του πίνακα A .²⁸

Η αντικατάσταση κάθε ιδιοτιμής στο ομογενές σύστημα $(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0}$ θα παράγει ένα αντίστοιχο διάνυσμα $\vec{u}$ ²⁹, που λέγεται ιδιοδιάνυσμα της συγκεκριμένης ιδιοτιμής.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες ιδιότητες των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων πινάκων :

- Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A τότε
 - $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
 - $\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ (ίχνος του πίνακα A)
- Οι πίνακες A και A^T έχουν ακριβώς ίδιες ιδιοτιμές.
- Ο πίνακας A^k έχει για ιδιοτιμές $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$
- Ο πίνακας A αντιστρέφεται, προφανώς, αν $\lambda \neq 0$ και ο A^{-1} έχει ως ιδιοτιμές τις αντίστροφες των ιδιοτιμών του A .

²⁸ Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα .

²⁹ Πιο συγκεκριμένα , λόγω του ότι το σύστημα είναι ομογενές, θα δώσει έναν άπειρο αριθμό διανυσμάτων τα οποία αντιστοιχούν στη λύση λ_i (Chiang, 2009 p.482-483), εμείς όμως θα διαλέγουμε ένα συγκεκριμένο μέλος αυτού του άπειρου συνόλου ως το χαρακτηριστικό διάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στο λ_i .

- Τα ιδιοποσά όμοιων πινάκων ταυτίζονται.
- Οι ιδιοτιμές κάθε συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.³⁰
- Οι ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου.
- Οι πίνακες AB και BA έχουν ίδιες ιδιοτιμές όταν οι πίνακες A και B έχουν πραγματικές ιδιοτιμές.

Με το μικροπείραμα <https://www.geogebra.org/m/gnyx9pbu> και το φύλλο εργασίας πάνω στις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα πινάκων, το οποίο δίνεται στα παραρτήματα της παρούσας εργασίας, μπορούν να διαπιστωθούν οι βασικές ιδιότητές τους.

Για έναν τετράγωνο ή ορθογώνιο πίνακα A

- ιδιάζουσα τιμή (singular value) του λέγεται ένα βαθμωτό μέγεθος σ και
- ένα ζεύγος ιδιάζόντων διανυσμάτων της σ λέγονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

τέτοια ώστε $A\vec{u} = \sigma\vec{u}$ και $A^H \vec{u} = \sigma \vec{u}$ όπου ο πίνακας A^H δηλώνει τον Ερμιτιανό ανάστροφο του πίνακα A δηλαδή τον συζυγή ανάστροφο του A ο οποίος περιέχει μιγαδικές τιμές. Αν ο A έχει πραγματικές τιμές τότε $A^H=A^T$.

Στην περίπτωση των ιδιάζουσων τιμών ο Τσάνης (χ.χ) αναφέρει ότι παίζουν μεγάλη σημασία όταν ο πίνακας περιγράφει μετασχηματισμό από ένα διανυσματικό χώρο σε έναν άλλο διανυσματικό χώρο, πιθανόν με άλλη διάσταση.

Επομένως, σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τόσους όσες και οι εξισώσεις, οι ιδιοτιμές μπορεί να αντιστοιχούν σε κρίσιμες τιμές παραμέτρων ευστάθειας, σε συχνότητες ταλάντωσης και σε άλλα κρίσιμα μεγέθη, ενώ σε συστήματα με περισσότερους ή λιγότερους αγνώστους από εξισώσεις αλγεβρικών εξισώσεων οι ιδιάζουσες τιμές αποτελούν επίσης, ένα σημαντικό παράδειγμα .

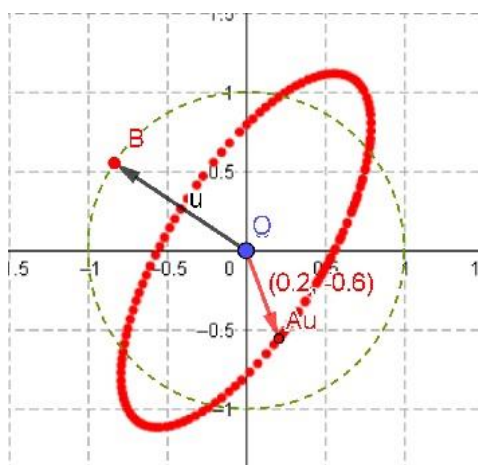
³⁰ Υπενθυμίζουμε ότι δύο διανύσματα a_1, a_2 είναι ορθογώνια όταν $a_1^T \cdot a_2 = 0$

Να αναφερθεί ότι αν x είναι ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα A και u, v είναι ζεύγος ιδιαζόντων διανυσμάτων τότε κάθε πολλαπλάσιο (αλλαγή κλίμακας) cx του x και cu, cv των u, v αντιστοίχως με $c \neq 0$ παραμένει ιδιοδιάνυσμα με την ίδια ιδιοτιμή και ζεύγος ιδιαζόντων διανυσμάτων με την ίδια ιδιάζουσα τιμή αντίστοιχα.

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ και το μοναδιαίο διάνυσμα $u = [1 \ 0]^T$ παρατηρούμε ότι το

διάνυσμα $A\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$ ταυτίζεται με την πρώτη στήλη του πίνακα A .

Όταν το διάνυσμα $\vec{u}$ περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου, τότε προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή του $A\vec{u}$, η οποία σχηματίζει ελλειπτική τροχιά.



Σχήμα 26. Γινόμενο του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ επί τον πίνακα A

Μέχρι τώρα υπολογίσαμε ιδιοτιμές πινάκων 2×2 και 3×3 , οι οποίοι επιλέχθηκαν, ώστε να έχουν ακέραιες ιδιοτιμές. Στην πραγματικότητα οι ιδιοτιμές ενός πίνακα μπορεί να είναι άρρητοι ή μιγαδικοί αριθμοί καθώς επίσης ο πίνακας να έχει διάσταση $n > 3$.

Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε διαγώνιους ή τριγωνικούς πίνακες και προσπαθούμε να δημιουργήσουμε όμοιους πίνακες³¹ για ευκολία .

- ❖ Η διαγώνιος μήτρα έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα
- ❖ Όμοιοι πίνακες λέγονται δύο πίνακες A και B , όταν υπάρχει ομαλός πίνακας P τέτοιος ώστε : $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP$

Να σημειωθεί ότι:

- αν δύο πίνακες A και B είναι όμοιοι τότε $\det(A)=\det(B)$
- δύο όμοιοι πίνακες έχουν πάντα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα , ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά
- δύο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές
- ένας πίνακας A λέγεται διαγωνιοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα Λ .
- Κάθε πίνακας με διακριτές ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος με $A = P^{-1}\Lambda P$, όπου ο πίνακας P έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A και ο διαγώνιος πίνακας Λ έχει τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A ως διαγώνια στοιχεία
- Αν δυο πίνακες A και B είναι όμοιοι, τότε $A^k = P^{-1}B^kP$

Για να διαγωνοποιηθεί ένας $n \times n$ πίνακας A κάνουμε τα εξής :

- Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του πίνακα A
- Εξετάζουμε αν ο πίνακας έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και τότε σχηματίζουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P , αλλιώς αν έχει $k < n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα , ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται.

³¹ Πίνακες με ίσες ιδιοτιμές και ίχνος.

Κεφάλαιο τρίτο

3.1 Εφαρμογή της άλγεβρας πινάκων στην επίλυση συστημάτων εξισώσεων

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται για να γράψουμε περιεκτικά πολλές γραμμικές εξισώσεις σε μία διανυσματική εξίσωση.

Για παράδειγμα το παρακάτω σύστημα ομογενών γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

παίρνει τη μορφή $A \cdot X = 0$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας τη λογική του παραπάνω ομογενούς συστήματος γραμμικών εξισώσεων, κάθε γραμμικό σύστημα δύναται να πάρει τη μορφή $A \cdot X = B$, όπου ο πίνακας A έχει στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων, το διάνυσμα X έχει συντεταγμένες τους αγνώστους του συστήματος και το διάνυσμα B έχει ως στοιχεία τους σταθερούς όρους.

Από την μελέτη του παρακάτω σχήματος, διακρίνεται η μετατροπή ενός γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια των πινάκων και συνεπάγεται ο ακόλουθος πίνακας (Βλέπε σχ.28), στον οποίο αναφέρονται λεπτομερώς οι πίνακες A , X και B .

$$\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 4x+2y+2z=-1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad AX=B$$

Σχήμα 27. Μετατροπή συστήματος 2×3 με τη βοήθεια πινάκων

ΠΙΝΑΚΑΣ	ΔΙΑΣΤΑΣΗ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ
A	2x3	Πίνακας συντελεστών του συστήματος
X	3x1	Πίνακας στήλη των αγνώστων
B	2x1	Πίνακας σταθερών όρων

Σχήμα 28. Λεπτομερής αναφορά των πινάκων A,X,B ενός συστήματος

Η απλοποιημένη αυτή, μορφή είναι εύχρηστη για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων διότι μας θυμίζει πρωτοβάθμιες εξισώσεις της μορφής $ax = \beta$. Όπως σε μία πρωτοβάθμια εξίσωση, έτσι και σε ένα σύστημα της μορφής $A \cdot X = B$, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- το σύστημα έχει μία μοναδική λύση την $X = A^{-1}B$ όταν $\det(A) \neq 0$
- το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $\det A = 0$ ³² και $B = \vec{0}$
- το σύστημα είναι αδύνατο όταν $\det A = 0$ και $B \neq \vec{0}$

Ειδική περίπτωση αποτελεί το ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A \cdot X = \vec{0}$, το οποίο έχει τουλάχιστον τη μηδενική λύση. Πιο συγκεκριμένα, αν ο πίνακας A είναι μη ιδιάζων³³ τότε το σύστημα μπορεί να έχει μία τετριμμένη λύση ίση με το μηδενικό διάνυσμα.

Από την άλλη πλευρά, για τη μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής γράφουμε

$A \cdot X = B$ ή $A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B$ ή $I \cdot X = A^{-1}B$ ή $X = A^{-1}B$, όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, που ισοδυναμεί με $\det(A) \neq 0$

Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων είναι:

- η γνωστή μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών των αγνώστων ή μέθοδος του Gauss.

³² Όταν οι εξισώσεις του συστήματος είναι εξαρτημένες.

³³ $|A| \neq 0$ ή ισοδύναμα είναι αντιστρέψιμος

- η μέθοδος του επαυξημένου πίνακα³⁴, κατά την οποία δεν αναγράφουμε τους αγνώστους αλλά μόνο τους συντελεστές διατηρώντας αυστηρά τη γραμμή και στήλη που ανήκουν.
- η μέθοδος του Crammer

Δεν θα αναλύσουμε περισσότερο την επίλυση των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων αλλά θα προχωρήσουμε αμέσως στη μελέτη συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Στα περισσότερα οικονομικά υποδείγματα οι σχέσεις που περιγράφουν τα οικονομικά μεγέθη είναι μη γραμμικές. Έτσι, θα γίνει προσπάθεια να συνδέσουμε κάποιες έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα, που περιγράψαμε στο 2^ο κεφάλαιο με τα συστήματα εξισώσεων και τις οικονομικές εφαρμογές τους.

Σε πολλά οικονομικά υποδείγματα οι συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών. Γι αυτό θα πρέπει πρώτα να εισαχθούν κάποιες έννοιες από το Διαφορικό Λογισμό .

3.1.1 Διαφορικό συνάρτησης.

Για μία συνάρτηση $y = f(x)$, εξ ορισμού η παράγωγος $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ είναι το όριο του πηλίκου των διαφορών, δηλαδή $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε την απόκλιση $\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = \delta$, όπου $\delta \rightarrow 0$ και $\Delta x \rightarrow 0$ παίρνουμε τη σχέση $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x - \delta \Delta x$ ή $\Delta y = f'(x) \Delta x - \delta \Delta x$. Όταν το x αλλάζει τότε και το y μεταβάλλεται πάνω στην καμπύλη $y=f(x)$ από το σημείο A στο σημείο B και ο λόγος $\Delta y/\Delta x$ είναι ίσος με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος AB. Λόγω των απειροελάχιστων μεταβολών $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, τότε $dy = f'(x)dx$. Οι ποσότητες dy και dx ονομάζονται διαφορικά του y και x , αντίστοιχα.

Η έννοια του διαφορικού μπορεί να επεκταθεί σε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση $y=F(x,z)$ τότε με την ίδια λογική, η μεταβολή του y που οφείλεται σε μια απειροελάχιστη μεταβολή του x και του z , προσεγγίζεται συνολικά από το διαφορικό $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz$ ή με έναν διαφορετικό συμβολισμό $dy = F_x dx + F_z dz$. Η έκφραση αυτή ονομάζεται ολικό διαφορικό της συνάρτησης F και είναι ίση με το άθροισμα των μεταβολών των μεγεθών x και z .

³⁴ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & : & 0 \\ 4 & 2 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$ ο επαυξημένος πίνακας του παραδείγματος

Ενδεικτικά αναφέρονται οι ιδιότητες των διαφορικών :

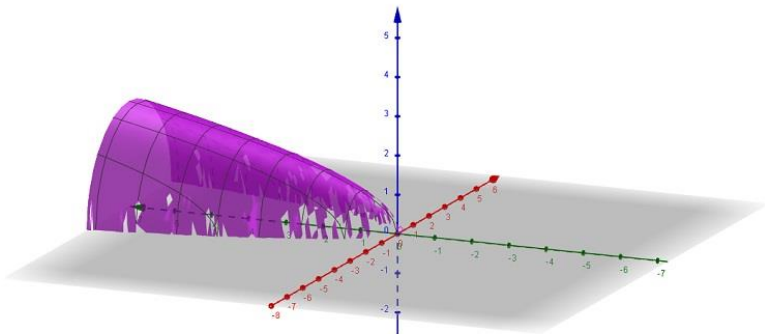
- $dk = 0$
- $d(cx^n) = cnx^{n-1}dx$
- $d(x \pm z) = dx \pm dz$
- $d(xz) = zdx + xdz$
- $d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{1}{z^2}(zdx - xdz)$

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε μια συνάρτηση $y=f(x,w)$, με $x=g(w)$ τότε το ολικό διαφορικό της f είναι : $dy=f_x dx + f_w dw$.

3.1.2 Πεπλεγμένη συνάρτηση.

Μία συνάρτηση της μορφής $y - f(x) = 0$ ή $F(x,y) = 0$ λέγεται πεπλεγμένα ορισμένη. Στην περίπτωση αυτή, η $y=f(x)$ καλείται λυμένη συνάρτηση.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $F(x,y) = \sqrt{y - x^2}$



Σχήμα 29. Η γραφική παράσταση της $F(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

Οι σύνθετες συναρτήσεις συναντώνται πιο συχνά και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στα οικονομικά και σε άλλα επιστημονικά πεδία για να ορίσουμε την εξέλιξη ενός μεγέθους. Η εφαρμογή του Geogebra [εδώ](#) είναι ένας καλός πειραματισμός για τις γραφικές παραστάσεις κάποιων

επιλεγμένων πεπλεγμένων συναρτήσεων και παρέχει δυνατότητες σχεδιασμού της γραφικής παράστασης οποιασδήποτε συνάρτησης .

Για παράδειγμα, όταν μία συνάρτηση F έχει πολλές μεταβλητές, τότε μια εξίσωση της μορφής $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$ μπορεί να μην λύνεται ως προς y , και να μην ορίζει τη λυμένη συνάρτηση $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει να ρωτήσουμε πότε είμαστε σίγουροι ότι μια εξίσωση της μορφής $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$ ορίζει πράγματι μια συνάρτηση $y = f(x_1, \dots, x_n)$, ακόμα και αν δεν μπορούμε να την προσδιορίσουμε με ακρίβεια;

Το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης (**Implicit theorem**) δίνει την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, το οποίο λέει ότι:

(α) αν η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $F_y, F_1, F_2, \dots, F_n$ και αν

(β) σ' ένα σημείο $(y_0, x_1, \dots, x_n)$ της γραφικής παράστασης της F , η F_y είναι μη μηδενική, τότε υπάρχει μια n -διάστατη περιοχή του $(x_1, \dots, x_n)$, στην οποία το y είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ της μορφής $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Η πεπλεγμένη αυτή συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις: $y_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ και $F(y_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ στην περιοχή του σημείου $(x_1, \dots, x_n)$.³⁵ Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής, και έχει μερικές παραγώγους $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρει ο Chang (2009) το θεώρημα αυτό είναι μεγάλης σπουδαιότητας, διότι όποτε οι συνθήκες του ικανοποιούνται, έχει νόημα να μιλάμε και να χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση, όπως η $y = f(x_1, \dots, x_n)$, ακόμα και αν το υπόδειγμά μας περιέχει μια εξίσωση της μορφής $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, η οποία είναι δύσκολο να λυθεί ως προς y συναρτήσει των x μεταβλητών.

Διαφορίζοντας την εξίσωση $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$ μπορούμε να γράψουμε :

$$F_y dy + F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = 0 \quad \text{και εφόσον, η συνάρτηση } y = f(x_1, \dots, x_n) \text{ έχει ολικό διαφορικό}$$
$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

³⁵ δίνοντας έτσι στην εξίσωση $F(y, x_1, \dots, x_n) = 0$ το νόημα μιας ταυτότητας σ' αυτή την περιοχή.

μετά από αντικατάσταση, μπορούμε να πάρουμε την ισοδύναμη έκφραση

$$(F_y f_1 + F_1) dx_1 + (F_y f_2 + F_2) dx_2 + \dots + (F_y f_n + F_n) dx_n = 0.$$

Για να ισχύει όμως, η έκφραση αυτή, αφού τα dx_i μεταβάλλονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, πρέπει να έχουμε : $F_y + f_i = 0$, για κάθε i ή ισοδύναμα

$$f_i \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_y}, \quad i=1,2,\dots,n$$

Οπότε, ακόμα και αν η μορφή της πεπλεγμένης συνάρτησης δεν είναι γνωστή μπορούμε να βρούμε τις παραγώγους της από την τελευταία σχέση.

Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση $y^3 x^2 + w^3 + y x w - 3 = 0$, η οποία δεν λύνεται εύκολα ως προς y .

Θεωρούμε ότι έχουμε τη μορφή $F(x,y,w) = y^3 x^2 + w^3 + y x w - 3$

Αλλά επειδή οι μερικές παράγωγοι F_x, F_y, F_w είναι προφανώς, συνεχείς και στο σημείο $(1,1,1)$ η F_y είναι μη μηδενική, είναι βέβαιο ότι γύρω από αυτό το σημείο αυτό υπάρχει μια πεπλεγμένη

συνάρτηση $y = f(x,w)$, τέτοια ώστε : $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2y^3 x + y w}{3y^2 x^2 + x w}$

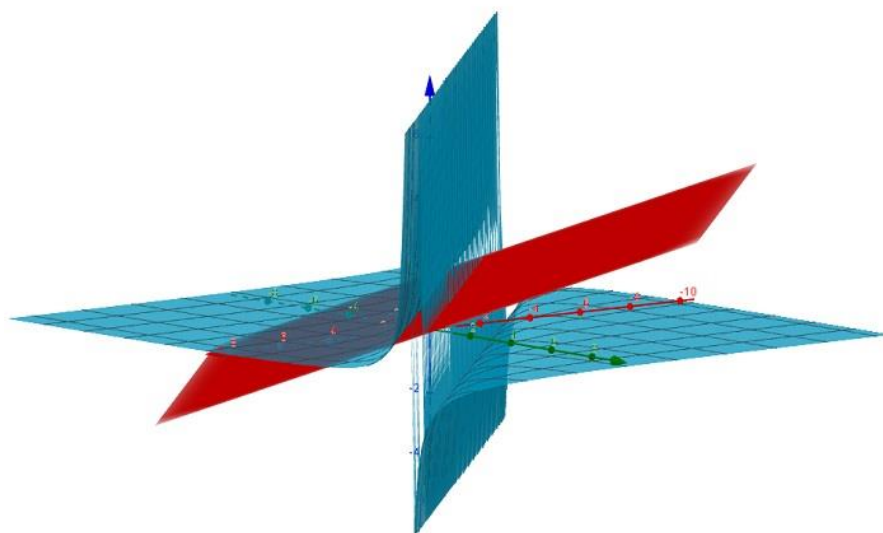
Για την ανάλυση μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, θα χρησιμοποιήσουμε το πολυώνυμο Taylor³⁶ για να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση σε μια περιοχή ενός σημείου της. Αρκεί να ξέρουμε ότι για μία συνάρτηση f , οι μερικές παράγωγοί της πρώτης και δεύτερης τάξης είναι συνεχείς σε ένα σημείο (x_0, y_0) της γραφικής της παράστασης.

Η παραπάνω τεχνική ονομάζεται γραμμικοποίηση (linearization) και στηρίζεται στο γεγονός ότι η διαταραχή της συνάρτησης είναι μικρή, τοπικά και οι τελευταίοι όροι στη σειρά του Taylor πρακτικά είναι απειροελάχιστοι, οπότε μπορούμε να τους αγνοήσουμε.

Για παράδειγμα, έστω $f(x,y) = \frac{1}{1+x-y}$, τότε για τις μερικές παραγώγους της έχουμε :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(1+x-y)^2}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(1+x-y)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2}{(1+x-y)^3}.$$

³⁶ Για μία συνάρτηση $y=f(x)$ και το σημείο $x=a$ της γραφικής της παράστασης, το πολυώνυμο Taylor δηλώνει ότι
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$



Σχήμα 30. Προσέγγιση κοντά στο (2,1) μιας συνεχώς διαφορίσιμης πεπλεγμένης συνάρτησης

Προφανώς, η f και οι μερικές παράγωγοι α΄ και β΄ τάξης είναι συνεχείς κοντά στο σημείο (2,1), άρα μπορούμε να την προσεγγίσουμε με το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης κοντά στο σημείο (2,1)

$$f(x, y) \approx f(2,1) + f_x(2,1)(x - 2) + f_y(2,1)(y - 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{4}(y - 1) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{4}$$

3.1.3 Επέκταση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης σε συστήματα εξισώσεων.

Έστω ένα σύνολο εξισώσεων

$$F^1(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

$$F^2(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

.....

$$F^n(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

για τις οποίες : (α) αν οι συναρτήσεις F^i , $i=1,2,...,n$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς y_i , x_j και αν (β) στο σημείο $(y_{10},...,y_{n0},x_{10},...,x_{m0})$ το οποίο ικανοποιεί το αρχικό σύστημα, η Ιακωβιανή ορίζουσα δεν είναι μηδέν

$$|J| \equiv \left| \frac{\partial(F^1, F^2, \dots, F^n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Τότε υπάρχει m-διάστατη περιοχή του $(x_{10},...,x_{m0})$ στην οποία οι μεταβλητές $y_1,y_2,...,y_n$ είναι συναρτήσεις των μεταβλητών $x_1,x_2,...,x_m$ στη μορφή

$$y_1=f^1(x_1,x_2,...,x_n)$$

$$y_2=f^2(x_1,x_2,...,x_n)$$

.....

$$y_n=f^n(x_1,x_2,...,x_n)$$

Έτσι στην περιοχή του σημείου $(x_{10},...,x_{m0})$ ορίζουν ένα σύνολο ταυτοτήτων και αν επιπλέον οι πεπλεγμένες συναρτήσεις f^i είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές x_j , $j=1,2,...,m$ τότε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης ισχύει (Chung,2009)

Όπως και στην περίπτωση της μιας εξίσωσης είναι δυνατό να βρούμε τις μερικές παραγώγους των πεπλεγμένων συναρτήσεων απευθείας από τις n εξισώσεις του συστήματος, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε ως προς y_i , $i=1,2,...,n$. Ξέροντας ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες επέκτασης του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης , μπορούμε να διαφορίσουμε τις εξισώσεις του συστήματος και να έχουμε

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n} dy_n = -(\frac{\partial F^1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial x_m} dx_m)$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n} dy_n = -(\frac{\partial F^2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial x_m} dx_m)$$

$$\frac{\partial F^n}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^n}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^n}{\partial y_n} = -\left(\frac{\partial F^n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F^n}{\partial x_m} dx_m\right)$$

Επιπλέον για τα διαφορικά των y_i μπορούμε να γράψουμε

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_m} dx_m$$

$$dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_m} dx_m$$

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_m} dx_m$$

Εάν $dx_1 \neq 0$ και $dx_2 = \dots = dx_m = 0$ μετά από αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^1}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F^n}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^n}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^n}{\partial x_1}$$

Το σημείο αυτό της εργασίας είναι κομβικό διότι το μη γραμμικό αρχικό σύστημα έχει φτάσει σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, δηλαδή έχουμε μια εικόνα του πώς η Γραμμική Άλγεβρα εισέρχεται ακόμα και σε μη γραμμικά προβλήματα. Άρα με χρήση πινάκων γράφουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F^n}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα $|J|$, η οποία υπό την ικανοποίηση των συνθηκών του θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης και επειδή το σύστημα δεν είναι ομογενές, έχουμε ότι $|J| \neq 0$. Οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση η οποία υπολογίζεται από τον κανόνα του Cramer σύμφωνα με τον τύπο $\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = \frac{|J_i|}{|J|}$ $i = 1, 2, \dots, n$

3.2 Εφαρμογή της Γραμμικής Άλγεβρας στην Οικονομική Επιστήμη

Στην παρούσα ενότητα κρίνεται απαραίτητο³⁷ να αναλυθεί ένα οικονομικό υπόδειγμα γενικής ισορροπίας από τη Μακροοικονομία, ώστε κατά την επίλυσή του να εφαρμοστούν μαθηματικές έννοιες, οι οποίες έχουν αναφερθεί και αναλυθεί στα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας έρευνας. Να τονιστεί ότι θα ακολουθηθεί συγκριτική στατική μελέτη, όπου θα εξεταστεί πώς η μεταβολή μιας παραμέτρου του προβλήματος θα επηρεάσει την κατάσταση ισορροπίας του υποδείγματος.

Η συγκριτική στατική μελέτη, όπως θα δούμε είναι χρήσιμη σε οικονομικά προβλήματα μεταβολής μεταβλητών, παρόλο που δεν λαμβάνει υπόψη τη διαδικασία προσαρμογής που ακολουθεί το δεδομένο σύστημα από την παλιά κατάσταση ισορροπίας στη νέα.

3.2.1 Το υπόδειγμα εθνικού εισοδήματος (IS-LM)

Έστω μια αγορά αγαθών και υπηρεσιών σε κλειστή οικονομία³⁸, με κρατικό τομέα, η οποία περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

³⁷ εφόσον η μελέτη των οικονομικών απαιτεί την κατανόηση μαθηματικών υποδειγμάτων και γραφικών παραστάσεων.

³⁸ αυτό σημαίνει ότι στην οικονομία αυτή δεν υπάρχουν εισαγωγές M και εξαγωγές X

$$Y=C+I+G \quad (\text{μακροοικονομική ταυτότητα του εισοδήματος})$$

$$C=C(Y-T)$$

$$I=I(r)$$

$$T=T(Y)$$

$$G=G_0 ,$$

όπου Y το εθνικό εισόδημα³⁹, C η κατανάλωση για αγαθά και υπηρεσίες από τα νοικοκυριά, η οποία εξαρτάται από το διαθέσιμο εισόδημα, I οι δαπάνες για επενδύσεις από τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις ώστε να εξαρτώνται από το κόστος δανεισμού, G οι δημόσιες δαπάνες για αγαθά και υπηρεσίες και T οι καθαροί φόροι⁴⁰.

Η κατανάλωση (C) είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του διαθέσιμου εισοδήματος $Y^d = Y - T$, της οποίας η κλίση ονομάζεται οριακή ροπή προς κατανάλωση⁴¹ $MPC = \frac{dC}{dY^d} = C'(Y^d)$ και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0,1)$.

Οι δαπάνες για επενδύσεις (I) είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του επιτοκίου⁴² r με $\frac{dI}{dr} = I'(r) < 0$.

Οι δημόσιες δαπάνες G_0 θεωρούνται μία εξωγενής μεταβλητή, η οποία καθορίζεται από τη δημοσιονομική πολιτική της κυβέρνησης, επεκτατική ή χαλαρή, όταν αυξάνονται και συσταλτική ή σφιχτή, όταν μειώνονται.

Οι φόροι θεωρούνται εξωγενής μεταβλητή γνησίως αύξουσα συνάρτηση του εισοδήματος με τον οριακό φορολογικό συντελεστή $\frac{dT}{dY} = T'(Y)$ να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1.

Με αντικατάσταση των εξισώσεων αυτών στην εθνικολογιστική ταυτότητα έχουμε :

$$Y = C(Y-T(Y)) + I(r) + G_0 \quad \text{ή} \quad Y - C(Y-T(Y)) - I(r) - G_0 = 0.^{43}$$

³⁹ θα θεωρήσουμε ότι οι τιμές διαχρονικά δεν αλλάζουν οπότε το ονομαστικό ΑΕΠ συμπίπτει με το πραγματικό

⁴⁰ χωρίς τις μεταβιβαστικές πληρωμές (επιδόματα, συντάξεις κλπ)

⁴¹ είναι η αύξηση της κατανάλωσης, όταν το διαθέσιμο εισόδημα αυξηθεί κατά μία μονάδα.

⁴² πραγματικού επιτοκίου, διορθωμένο με βάσει τις επιπτώσεις του πληθωρισμού.

⁴³ στο σημείο αυτό είναι δύσκολο να λύσουμε ως προς Y ώστε να βρούμε το επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος

Η εξίσωση αυτή ορίζει πεπλεγμένα την καμπύλη IS.⁴⁴

Διαφορίζοντας ολικά ως προς τις ενδογενείς μεταβλητές Y και r γράφουμε :

$$dY - C'(Y - T(Y))[dY - T'(Y)dY] - I'(r)dr = 0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{dr}{dY} = \frac{1 - C'(Y - T(Y))(1 - T'(Y))}{I'(r)} < 0 \quad ^{45}$$

Επομένως, αφού η καμπύλη επένδυσης έχει αρνητική κλίση, ένα υψηλό επίπεδο παραγωγής προϊόντος θα συνδυαστεί με χαμηλό πραγματικό επιτόκιο.

Η αγορά χρήματος περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$M^d = L(Y, r) \quad \text{Ζήτηση ρευστών διαθεσίμων}$$

$$M^s = M^{s_0}$$

$$M^d = M^s \quad \text{Συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος}$$

όπου αύξηση ρευστότητας πραγματοποιείται είτε με αύξηση εισοδήματος άρα $L_Y > 0$ είτε με μείωση επιτοκίου, οπότε $L_r < 0$.

Η προσφορά χρηματικών διαθεσίμων M^s καθορίζεται εξωγενώς στο επίπεδο M^{s_0} από την κεντρική νομισματική αρχή⁴⁶ και δεν επηρεάζεται από το ύψος του πραγματικού επιτοκίου.

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες εξισώσεις στην τρίτη παίρνουμε μια έκφραση που ορίζει πεπλεγμένα την καμπύλη LM.⁴⁷

$$L(Y, r) \equiv M^{s_0}$$

Παίρνοντας το ολικό διαφορικό ως προς τις δυο ενδογενείς μεταβλητές Y και r

⁴⁴μας δίνει όλους τους συνδυασμούς των ενδογενών μεταβλητών- προϊόντος Y και πραγματικού επιτοκίου r - και ενός εξωγενώς προσδιοριζόμενου επιπέδου δημόσιων δαπανών G_0 για τους οποίους η επένδυση I είναι ίση με την αποταμίευση S .

⁴⁵ $0 < C'(Y^d) < 1$, $0 < T'(Y) < 1 \Rightarrow -1 < -T'(Y) < 0 \Rightarrow 0 < 1 - T'(Y) < 1$ άρα $C'(Y^d) \cdot (1 - T'(Y)) < 1$ ήτοι $1 - C'(Y^d) \cdot (1 - T'(Y)) > 0$

⁴⁶ με μια αύξηση στο M^{s_0} έχουμε επεκτατική νομισματική πολιτική, ενώ μια συσταλτική νομισματική πολιτική θα επιφέρει αντίστοιχα μείωση

⁴⁷ μας δίνει όλους τους συνδυασμούς (Y , r) και ενός εξωγενώς καθοριζόμενου επιπέδου προσφοράς χρήματος M^{s_0} στο οποίο εξισώνονται οι προσφερόμενες και οι ζητούμενες ποσότητες χρήματος.

$L_Y dY + L_r dr = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dY} = -\frac{L_Y}{L_r} > 0$ συμπεραίνοντας ότι η κλίση της LM είναι θετική.

Η ισορροπία σε μια κλειστή οικονομία χαρακτηρίζεται από δύο συνθήκες: η συνολική ζήτηση είναι ίση με τη συνολική προσφορά και η ζήτηση χρήματος είναι ίση με την προσφορά χρήματος, οπότε έχουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$Y = C(Y-T) + I(r) + G_0$$

$$L(Y,r) = M^{S_0}$$

το οποίο ορίζει πεπλεγμένα τις δύο εξωγενείς μεταβλητές G_0 και M^{S_0} .

Διαφορίζοντας ολικά τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε το σύστημα

$$\{1 - C'(Y - T(Y))[1 - T'(Y)]\}dY - I'(r)dr = dG_0$$

$$L_Y dY + L_r dr = dM_0^S$$

Το οποίο με τη βοήθεια των πινάκων παίρνει τη μορφή :

$$\begin{bmatrix} 1 - C'(Y - T(Y))[1 - T'(Y)] & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG_0 \\ dM_0^S \end{bmatrix}$$

Η Ιακωβιανή του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων dY , dr είναι

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 - C'(Y - T(Y))[1 - T'(Y)] & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{vmatrix}$$

$$= \{1 - C'(Y - T(Y))[1 - T'(Y)]\}L_r + I'(r)L_Y < 0$$

Αφού η Ιακωβιανή ορίζουσα των ενδογενών μεταβλητών είναι μη μηδενική στην αρχική ισορροπία του υποδείγματος, άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, οπότε σε μια μικρή περιοχή του σημείου ισορροπίας (Y^*, r^*) υπάρχουν οι πεπλεγμένες συναρτήσεις $Y^* = Y^*(G_0, M^{S_0})$ και $r^* = r^*(G_0, M^{S_0})$ ⁴⁸. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν συνεχείς παραγώγους. Έτσι τοπικά, δύναται να προσδιορίσουμε τις επιδράσεις της μεταβολής μιας από τις εξωγενείς μεταβλητές G_0 και M^{S_0} στις τιμές ισορροπίας.

⁴⁸ αν και δεν μπορούμε να τις υπολογίσουμε με ακρίβεια

Στη φάση αυτή για να προχωρήσουμε διαλέγουμε μία μόνο εξωγενή μεταβλητή, οπότε θέτουμε $dM^s_0 = 0$. Στη συνέχεια διαιρούμε όλους τους όρους του συστήματός μας με dG_0 ,

$$\begin{bmatrix} 1 - C'(Y - T(Y)) & -I'(r) \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dY^*}{dG_0} \\ \frac{dr^*}{dG_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από τον κανόνα του Cramer, βρίσκουμε τις παραγώγους συγκριτικής στατικής

$$\frac{dY^*}{dG_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I'(r) \\ 0 & L_r \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{L_r}{|J|} = \frac{-}{-} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{dr^*}{dG_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - C'(Y - T(Y)) & 1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix}}{|J|} = \frac{-L_Y}{|J|} = \frac{-}{-} > 0$$

Έτσι το ποιοτικό συμπέρασμα, από τη μελέτη του υποδείγματος εθνικού εισοδήματος σε κλειστή οικονομία, είναι ότι μια επεκτατική δημοσιονομική πολιτική θα έχει πάντα ως αποτέλεσμα μια αύξηση της τιμής ισορροπίας (Y^* , r^*). Να σημειωθεί ότι αν είναι γνωστές οι τιμές των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων σε κατάσταση αρχικής ισορροπίας, τόσο στην αγορά αγαθών, όσο και στην αγορά χρήματος, οι τελευταίες σχέσεις δύναται να δώσουν και ένα ποσοτικό συμπέρασμα.

Συμπεράσματα

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας, τα τελευταία χρόνια παρατηρείται στους φοιτητές των Οικονομικών Σχολών μια ολοένα αυξανόμενη δυσκολία στην κατανόηση και στο χειρισμό βασικών μαθηματικών εννοιών. Βασικές έννοιες από τη Γραμμική Άλγεβρα, οι οποίες αποτελούν δομικό λίθο στην επίλυση οικονομικών εφαρμογών, και κυρίως το διάνυσμα ως θεμελιώδης έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, μελετήθηκαν με τη χρήση των ψηφιακών εργαλείων. Έτσι δημιουργήθηκαν οπτικές αναπαραστάσεις αυτών των εννοιών, ερμηνεύτηκαν γεωμετρικά και η στατική διδασκαλία τους πήρε δυναμική μορφή. Μέσα από το δυναμικό περιβάλλον του Geogebra οι εκπαιδευόμενοι θα έχουν τη δυνατότητα να βρουν σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, μετά από την παρατήρηση γραφικών απεικονίσεων των δεδομένων. Η χρήση των ψηφιακών εργαλείων, η οποία εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια στη δευτεροβάθμια βαθμίδα εκπαίδευσης, είναι μια δημιουργική δραστηριότητα που καλλιεργεί τη σκέψη και την κατανόηση του χώρου ενός δεδομένου θέματος.

Με την παρούσα εργασία διατίθεται στους εκπαιδευτές της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης έτοιμο ψηφιακό υλικό με δυνατότητες τροποποίησης του σε πραγματικό χρόνο από τους ίδιους αλλά και από τους φοιτητές τους και αποτελεί μία καλή πρόταση για μελλοντική έρευνα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι, το να κατανοήσει κανείς τη βάση των μαθηματικών εννοιών από μόνος του – εμπειρικά – είναι σημαντικό για τη διαδικασία απομνημόνευσης και μάθησης. Η δε, χρήση των υπολογιστών δεν θα πρέπει να αποσκοπεί απλώς στο πώς θα διδαχθούν τα Μαθηματικά με τον καλύτερο τρόπο, αλλά στο πώς θα διδαχθούν «σωστά τα Μαθηματικά» καθώς ελλοχεύει ο κίνδυνος να παραγκωνιστεί ο αποδεικτικός συλλογισμός από τη διδασκαλία τους.

Για την Οικονομική Επιστήμη, η μελέτη των οικονομικών, μέσα από σύνθετα μαθηματικά υποδείγματα απαιτεί την κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, καθώς και γραφικών παραστάσεων. Κομβικό σημείο της ανάλυσης των μη γραμμικών οικονομικών υποδειγμάτων και των εννοιών από τη γραμμική άλγεβρα που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αναφέρθηκε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Όταν μία μη γραμμική συνάρτηση είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε τοπικά μπορεί να γραμμικοποιηθεί, αρκεί να ικανοποιούνται οι όροι του θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στο

μακροοικονομικό υπόδειγμα εθνικού εισοδήματος κλειστής οικονομίας και ερμηνεύτηκαν τα οικονομικά συμπεράσματα από τη μεταβολή των κρατικών δαπανών στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του προϊόντος και του πραγματικού επιτοκίου, τα οποία και παρουσιάστηκαν γραφικά μέσα από το πρόγραμμα Geogebra. Με τη γλώσσα των μαθηματικών διευκρινίζονται οι ιδέες, σκεφτόμαστε λογικά και μπαίνει σε τάξη με την ανάλυσή μας η πολυπλοκότητα των σύνθετων οικονομικών φαινομένων. Πολλά μαθηματικά προβλήματα συμπεριφέρονται γραμμικά και λύνονται πολύ πιο εύκολα από τα προβλήματα που δεν έχουν την εν λόγω ιδιότητα. Τα μη γραμμικά προβλήματα θεωρούνται κατά προσέγγιση γραμμικά για να επιλύονται ευκολότερα, όπως στην περίπτωση του μη γραμμικού υποδείγματος εισοδήματος με το οποίο ασχολείται η Μακροοικονομία.

Η συγκριτική στατική ανάλυση των οικονομικών προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκε είναι χρήσιμη για την ερμηνεία συμπερασμάτων, αν και για καλύτερη ανάλυση προτείνεται η έρευνα αυτή να προχωρήσει σε δυναμική μελέτη των υποδειγμάτων.

Παρόλο που ένα σημαντικό ποσοστό εκπαιδευτικών ασχολούνται με τη διαδικασία της εξάσκησης κατά τη διδασκαλία τους, ο συμπεριφορισμός ως μέθοδος μάθησης, βρίσκεται σε υποχώρηση. Στο επίκεντρο των ερευνών βρίσκονται οι γνωστικές και οι κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες μάθησης. Οι θεωρίες αυτές λειτουργούν συμπληρωματικά. Πιστεύεται ότι μέσα από την έρευνα αυτή θα δημιουργηθεί ένα έρεισμα για να συνδεθούν οι αδυναμίες της, με περισσότερες οικονομικές εφαρμογές και περαιτέρω έρευνα. Στην πραγματικότητα κάποιες παραδοσιακές μέθοδοι διδασκαλίας σταδιακά θα ακυρώνονται, αφού τα άτομα έχουν, πλέον πρόσβαση στο διαδίκτυο για αναζήτηση πληθώρας πληροφοριών.

Το εκπαιδευτικό υλικό που δημιουργήθηκε με το πρόγραμμα Geogebra πρόκειται να παρουσιαστεί και να εφαρμοστεί στο επόμενο εξάμηνο σπουδών στους φοιτητές. Το ανοικτό περιβάλλον και οι δυνατότητες του προγράμματος το έχουν μετατρέψει σε ένα εκπαιδευτικό εργαλείο με απεριόριστες δυνατότητες. Οι φοιτητές θα έχουν τη δυνατότητα, μέσα από το διαδραστικό περιβάλλον που προσφέρει το πρόγραμμα, να διερευνήσουν, να αναλύσουν, να εκτιμήσουν και να κατανοήσουν τις έννοιες μέσα από την αλληλεπίδραση φοιτητή με την εφαρμογή, φοιτητή με τον Καθηγητή και φοιτητή με τους άλλους φοιτητές.

Πηγές – Βιβλιογραφία

- Αδαμόπουλος, Λ. Βισκανδουράκης, Β. Γαβαλάς, Δ. Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (1998). *Μαθηματικά θετικής κατεύθυνσης*. (1^η εκδ.) Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
- Αθανασιάδης, Α. (1980). *Γραμμική Άλγεβρα Ι*, Θεσσαλονίκη: Α.Γ.Αθανασιάδη.
- Τσεκρέκος, Α. (2015). *Γραμμική άλγεβρα και μαθηματικός λογισμός για οικονομικά και επιχειρησιακά προβλήματα*. Ανακτήθηκε από: https://opencourses.aueb.gr/modules/document_/?course=LOXR100
- Barnett, S. (1990). *Matrices: methods and applications*. New York: Oxford University Press.
- Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Σχεδιάζοντας περιβάλλοντα μάθησης υποστηριζόμενοι από τις σύγχρονες τεχνολογίες*. Αθήνα: Gutenberg.
- Bradley, I. & Meek, R. (1986). *Martices and society*. England: Penguin books ltd.
- Γαϊτάνος, Θ. Μελετίδου, Ε. Μουστακίδης, Χ. Παπαδόπουλος, Δ., & Πασχάλης, Ι. (2018). *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*. Θεσσαλονίκη: Σοφία Α.Ε.
- Chiang, A., & Wainwright, K. (2009). *Μαθηματικές μέθοδοι οικονομικής ανάλυσης*. Αθήνα: Κριτική.
- Cvetkovic, D. Rowlinson, P., & Simic, S. (1997). *Eigenspaces of graphs*. Cambridge University Press.
- Δονάτος, Α., & Αδάμ, Μ. (2008). *Γραμμική άλγεβρα θεωρία και εφαρμογές*. Αθήνα : Gutenberg.
- Ζωγόπουλος, Ε. (2013). Η ομαδοσυνεργατική μέθοδος διδασκαλίας και η συμβολή των ΤΠΕ, *Τα Εκπαιδευτικά*, 105-106, 60-73.

- Hannah, J. Stewart, S., & Thomas. M (2013). Emphasizing language and visualization in teaching linear algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44:4, 475-489.doi: [10.1080/0020739X.2012.756545](https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.756545)
- Hohenwarter, Z., & Hohenwarter, J. (2007). Βοήθεια GeoGebra.
- Θεοχάρη-Αποστολίδη, Θ. Βαβατσούλας, Χ., & Χαραλάμπους, Χ. (2017). *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας.
- Kapa, E. (2001). A metacognitive support during the process of problem solving in a computerised environment, *Educational Studies in Mathematics* 47, 317–336.
- Kaplan, A. (1964) . *Methology for behavioral sciences* p.28, San Francisco: Chandler co.
- Κασιμάτη, Κ., & Γιαλαμάς, Β. (2001). Απόψεις εκπαιδευτικών για την συμβολή των νέων τεχνολογιών στην εκπαιδευτική διαδικασία. *Επιθεώρηση εκπαιδευτικών θεμάτων*, 114-125
- Κολιάδης, Ε. (1996). *Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη: Συμπεριφοριστικές Θεωρίες*. Τόμος Α. Αθήνα
- Κολιάδης, Ε. (1997). *Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη: Γνωστικές θεωρίες*. Τόμος Γ' , Αθήνα .
- Κόμης, Ι. Β., (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των επικοινωνιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών
- Kozulin, A. (2003). *Vygotsky' s Educational Theory in Cultural Context*. Cambridge: University Press
- Κυνηγός, Χ. (2007). *Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

- Κυνηγός, Χ., Ψυχάρης, Γ., Γαβρίλης, Κ., & Κείσογλου, Σ. (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*, Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, EAITY
- Λουκάκης, Μ. (2016). *Πρόσκληση στα Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών*. Τόμος Β'. Θεσσαλονίκη : Σοφία.
- Μακράκης, Β. (2008). *Υπερμέσα στην Εκπαίδευση. Μια κοινωνικό εποικοδομιστική προσέγγιση*. Αθήνα : Μεταίχμιο.
- Marsden, E. & Tromba, J. (2011). *Διανυσματικός λογισμός*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
- Μαρουλάς, Ι. (2005). *Γραμμική Άλγεβρα*. Αθήνα: ΕΜΠ. Ανακτήθηκε 2/12/2019 από : <https://www.slideshare.net/vasilistsougas/em-28671331>
- Ματσαγγούρας, Η. (2002). *Στρατηγικές διδασκαλίας : Η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*. Αθήνα: Gutenberg.
- Μπούντης, Α. (1997) . *Μη γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις*. Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού.
- Namboodiri, K. (X.X). *Matrix Algebra: An introduction. Quantitative applications in the social sciences*,38. A Sage University paper.
- Νικολόπουλος, Ι. (2019). Ο ρόλος της μνήμης στη μάθηση των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Α', Τεύχος ΙΙΙ*. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings learning cultures and computer*. Holland: Kluwer.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic software and their evolving mathematic explanations. *Educational studies in mathematics*, 44 , 55-85.

Σακονίδης, Χ. (2007). *Κοινότητες πρακτικής στη μάθηση. Μια αλλαγή προοπτικής για τη μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα : Μεταίχμιο.

Σάλτας, Β. (2013). *Geogebra: Βοήθημα χρήσης λογισμικού*. Αθήνα: Συμμετρία.

Σάλτας, Β. (2008). *Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Σαραφόπουλος, Γ., & Μυλωνάς, Ν. (2016). *Γραμμική Άλγεβρα, βελτιστοποίηση και δυναμική ανάλυση στις οικονομικές επιστήμες*. Αθήνα: Τζιόλα.

Shunk, D. (2010). *Θεωρίες μάθησης. Μια εκπαιδευτική προσέγγιση*. Αθήνα : Μεταίχμιο.

Sinclair., & Yurita.(2008). To be or to become : How dynamic geometry changes discourse. *Research in mathematics education*, 10 , 135-150 .

Spiegel, R.M. (2009). *Vector Analysis*. USA: Schaum's series

Strang, G. (2016) . *Linear algebra and its applications*. (6th ed.) . U.S.: Wellesley-Cambridge Press .

Strang, G. (2015). *Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές της*. Μετάφραση: Πάμφιλος Π. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Τασόπουλος, Α. (2016) . *Οικονομικά μαθηματικά Ι*. Αθήνα : Τσότρας.

Τζάνης, Α. (χ.χ.) *Ιδιοτιμές και ιδιάζουσες τιμές*, ανακτήθηκε από τη διεύθυνση

http://users.uoa.gr/~atzanis/MathGeo/Idiotimes_Idiodianysmata.pdf

οι σημειώσεις του βασίστηκαν στο 3^ο κεφ. Eigenvalues and singular values του βιβλίου Numerical computing with MathLab από τον Cleve Moller, Society for industrial and applied mathematics, 2004

- Τσουλφίδης, Λ.(2002). *Μαθήματα Οικονομικής Ανάλυσης*. Αθήνα: Gutenberg.
- Χαραλάμπους, Χ., & Φωτιάδης, Α. (2015). *Μια εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα για τις θετικές επιστήμες*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Ανακτήθηκε από : www.kallipos.gr
- Χρυσάκης, Θ. (1987). *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας* . Αθήνα: Αίθρα.
- Yang, Y. (2014). *A Concise Text on Advanced Linear Algebra* (pp. 205-225). Cambridge: Cambridge University Press.
doi:10.1017/CBO9781316103845.009

Παραρτήματα

Π.1 Φύλλο εργασίας στις ορίζουσες

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Ανοίξτε το αρχείο Determinant.ggb (<https://www.geogebra.org/m/rjtswbfd>)

. Από το σχήμα αποδείξτε ότι για κάθε πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ η ορίζουσά του δίνεται από τη σχέση

: $|A| = ad - bc$

.....
.....
.....

ΕΡΓΑΣΙΑ 2 Ανοίξτε το αρχείο geometry_Determinant.ggb

(<https://www.geogebra.org/m/h7jy2wk3>)

Τα διανύσματα b_1 και b_2 περιγράφουν τα διανύσματα στήλες των πινάκων που ακολουθούν κάθε φορά.

Σύρετε τα σημεία A και B για να ορίσετε την 1^η και 2^η στήλη ώστε να προκύψει ο πίνακας

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Υπολογίστε την ορίζουσά του και το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα δύο διανύσματα στηλών του πίνακα .Τι παρατηρείτε;

.....

Επαναλάβετε την εργασία για τους πίνακες $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



ΑΝ ΟΙ ΣΤΗΛΕΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΟΤΕ Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΟΥ ΜΑΣ ΔΙΝΕΙ ΚΑΤ'ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΗΝ ΚΛΙΜΑΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΕΤΑΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΣΤΗΛΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 3 Εξετάστε την περίπτωση του πίνακα $A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρείστε πως η ορίζουσά του είναι ίση με Πώς ερμηνεύετε το αποτέλεσμα της ορίζουσας του πίνακα A_6 , γεωμετρικά;

.....

.....

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Υπολογίστε την ορίζουσα των πινάκων $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Η ορίζουσά τους είναι αριθμός .

Πώς θα ερμηνεύατε το αποτέλεσμα που βρήκατε γεωμετρικά; (Στην περίπτωση αυτή, παρατηρείστε πώς άλλαξε η θέση των διανυσμάτων βάσης $\{b_1, b_2\}$

.....

.....

ΑΝ Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΗΘΗΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΥΤΟ ΜΑΣ ΔΕΙΧΝΕΙ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 5

Στην εργασία αυτή ορίστε δικό σας πίνακα 2×2 ώστε να διαπιστώσετε την αλήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών :

- Αλλάζοντας τις γραμμές ή στήλες τότε η ορίζουσα αλλάζει
- Πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό k μια γραμμή ή μια στήλη του πίνακα τότε η ορίζουσα
- Πολλαπλασιάζοντας με k όλα τα στοιχεία του πίνακά σας τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με
- Αν ο πίνακάς σας έχει γραμμικώς εξαρτημένες γραμμές ή στήλες τότε η ορίζουσά του
- Πολλαπλασιάζοντας μία γραμμή με έναν αριθμό και προσθέτοντας το γινόμενο σε μια άλλη γραμμή του πίνακα τότε η ορίζουσα

Π.2 Φύλλο εργασίας στις ιδιοτιμές και στα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1 Ανοίξτε το αρχείο eigenvalues.ggb (<https://www.geogebra.org/m/gnyx9pbu>)

Σύρετε τα πράσινα σημεία C_1 και C_2 για να ορίσετε την 1^η και 2^η στήλη αντίστοιχα του πίνακα A .

Εξετάστε τις περιπτώσεις $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2.8 & 0.4 \\ 0.4 & 2.2 \end{pmatrix}$,
 $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Πατήστε “ Δείξε το διάνυσμα Au ” για να δείτε πού τελειώνει το διάνυσμα u μετά το μετασχηματισμό του επί τον πίνακα A .

Τα διανύσματα u , Au είναι συγγραμμικά , πάντοτε;

ΕΡΓΑΣΙΑ 2 Περιστρέψτε το διάνυσμα u για να δείτε πού τελειώνει το Au .

Παρατηρείστε ότι για κάποια διανύσματα, τα $\vec{u}$, $A\vec{u}$ είναι συγγραμμικά, άλλοτε ομόρροπα και άλλοτε αντίρροπα. Τα διανύσματα $\vec{u}$ σε αυτή την περίπτωση ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A .

Όποτε αυτό συμβαίνει το $A\vec{u}$ γίνεται απλά ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός της μορφής $\lambda\vec{u}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\vec{u}$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Ο πίνακας A_1 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 =$ και $\lambda_2 =$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 =$ και $u_2 =$

Ο πίνακας A_2 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 =$ και $\lambda_2 =$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 =$ και $u_2 =$

Ο πίνακας A_3 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 =$ και $\lambda_2 =$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 =$ και $u_2 =$

Ο πίνακας A_4 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 =$ και $\lambda_2 =$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 =$ και $u_2 =$

Ο πίνακας A_5 έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 =$ και $\lambda_2 =$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 =$ και $u_2 =$