

ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΕΡΔΟΦΟΡΙΑ ΤΟΥΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΟΣΜΑΣ Κ. ΜΑΝΟΥΔΑΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2010

ΠΑΝΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΕΡΔΟΦΟΡΙΑ ΤΟΥΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΟΣΜΑΣ Κ. ΜΑΝΟΥΔΑΚΗΣ

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Καθηγητής Γιώργος Σταμάτης (Επιβλέπων)

Καθηγητής Κώστας Συριόπουλος (Μέλος)

Αναπλ. Καθηγητής Σ. Μαυρουδέας (Μέλος)

ΑΘΗΝΑ 2010

Στην οικογένεια μου,

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας διατριβής, καθηγητή κ. Γιώργο Σταμάτη. Οι επίμονες και οξυδερκείς επιστημονικές παρατηρήσεις του κατά την διάρκεια των συχνότατων αντάλλαγων απόψεων -τόσο για το θέμα καθεαυτό της παρούσας διατριβής, όσο και για την επιστήμη εν γένει- που είχα την τιμή και την χαρά να έχω μαζί του, στάθηκαν ουσιαστικές και πολύτιμες για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής. Επιπλέον δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ στην αμέριστη ηθική του συμπαράσταση και την έμπρακτη εμπιστοσύνη στο προσωπό μου, τόσο με την επιλογή του, όσο και με την πλήρη ελευθερία έκφρασης που μου παρείχε. Ως εκ τούτου για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής του οφείλω τα μέγιστα.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής καθηγητή Κώστα Συριόπουλο και αναπληρωτή καθηγητή Σταύρο Μαυρουδέα για το προσωπικό τους ενδιαφέρον και την ηθική βοήθεια που μου παρείχαν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής για την τιμή που μου έκαναν να αποτελέσουν μέλη της επταμελούς επιτροπής.

Δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω και την οικογένεια μου, τόσο για την ηθική συμπαράσταση, όσο και για όλα τα υπόλοιπα που τόσα χρόνια μου προσφέρουν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους συναδέλφους Δ. Κεραμύδα, Ζ.Στεφανοπούλου, Κ. Γόγολο και Π. Βουγιουκλάκη για την βοήθεια τους για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

© 2010

Μανουδάκης Κοσμάς

ALL RIGHTS RESERVED

Περιεχόμενα

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ.....	8
ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ:.....	14
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ	14
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	15
2 Ο ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	34
3 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΙΜΙΑΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ-ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΩΡΟΜΙΣΘΙΟΥ, ΛΟΓΩ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΩΝ	67
3.1 ΜΗ ΔΙΑΣΠΩΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	67
3.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΣΤΑ ΤΥΠΙΚΑ ΥΠΟΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	71
3.3 ΟΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΣΕ ΔΙΑΣΠΩΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΩΡΟΜΙΣΘΙΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ.....	101
3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	104
4 Η W-R ΣΧΕΣΗ	107
4.1 ΠΩΣ ΕΞΑΓΕΤΑΙ Η W-R ΣΧΕΣΗ.....	108
4.2 Η ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ W-R ΚΑΜΠΥΛΗΣ.....	108
4.3 ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟ ΩΡΟΜΙΣΘΙΟ	109
4.4 ΤΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΚΕΡΔΟΥΣ	110
4.5 ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ W-R ΚΑΜΠΥΛΗΣ.....	111
4.6 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΚΑΙ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ	113
4.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	115
5 ΤΥΠΙΚΑ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ.....	117
5.1 ΤΟ ΤΥΠΙΚΟ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑ ΤΟΥ SRAFFA.....	117
5.2 ΤΟ ΤΥΠΙΚΟ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑ ΤΟΥ ΜΙΑΥΟ.....	120
5.3 ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑ ΤΟΥ ΒΑΣΙΛΑΚΗ	123
5.4 ΤΟ ΤΥΠΙΚΟ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑ ΤΩΝ ΜΑΡΙΟΛΗ-ΒΟΥΓΙΟΥΚΛΑΚΗ	126
6 Η ΔΙΑΜΑΧΗ ΤΩΝ ΔΥΟ CAMBRIDGE	129
ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ:	152
1 ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ.....	153
2 ΤΟ W-R ΚΡΙΤΗΡΙΟ	155
2.1 Η ΤΕΧΝΙΚΗ $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ ΕΙΝΑΙ ΚΥΡΤΗ ΚΑΙ Η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ	155
2.2 Η ΤΕΧΝΙΚΗ $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΛΗ ΚΑΙ Η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ	156
2.3 ΤΟΣΟ Η ΤΕΧΝΙΚΗ $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ ΟΣΟ ΚΑΙ Η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ	157
2.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ.....	158
2.5 ΤΟ W-R ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΚΑΙ Η ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΤΥΠΙΚΟ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑ	162
2.6 Γ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	172
2.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	177
3 COST MINIMIZATION CRITERION.....	179

3.1	Η ΕΚΔΟΧΗ ΤΟΥ L. VON BORTKIEVITZ	179
3.2	Η ΕΚΔΟΧΗ ΤΟΥ N.OKISHIO	180
3.3	Η ΕΚΔΟΧΗ ΤΟΥ D.LEVHARI	183
3.4	Η ΟΠΤΙΚΗ ΤΟΥ L.PASINETTI	185
3.5	Η ΟΠΤΙΚΗ ΤΩΝ H.D.KURZ ΚΑΙ N.SALVADORI	189
3.6	Η ΟΠΤΙΚΗ ΤΟΥ G. ERREYERS	193
3.7	ΤΟ COST MINIMIZATION CRITERION (ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ)	197
3.8	ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (NON SUBSTITUTION THEOREM)	208
3.9	ΠΟΤΕ ΤΟ W-R ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΚΑΙ ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΥΜΠΙΠΤΟΥΝ	227
3.10	ΠΟΤΕ ΤΟ COST MINIMIZATION CRITERION ΚΑΙ ΤΟ NON SUBSTITUTION THEOREM ΣΥΜΠΙΠΤΟΥΝ	239
4	Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ	243
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ	243
4.2	Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	244
4.2.2	Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	254
5	ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗΣ ΚΑΤΑΤΑΞΗΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	262
5.1	CORN ECONOMIES	262
5.3	ΧΑΡΑΖΟΦΙΑΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	267
6	JOHN VON NEUMANN	275
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	275
6.2	Η ΑΡΧΙΚΗ ΕΚΔΟΧΗ	275
6.3	ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΚΔΟΧΗ	283
6.4	ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	292
6.5	ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	298
6.6	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ VON NEUMANN	307
7	(RE-)SWITCH POINTS	310
7.1	ΜΗ ΒΑΣΙΚΑ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	314
7.2	ΨΕΥΔΗ ΣΗΜΕΙΑ (ΕΝ)ΑΛΛΑΓΗΣ	316
8	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ (ΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΜΕΝΕΣ) ΕΙΣΡΟΕΣ	339
8.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	339
8.2	ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ	339
8.3	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	340
8.4	ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΓΟΜΕΝΕΣ ΕΙΣΡΟΕΣ	342
	ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ:	347
	ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	347
1	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	348
	Βιβλιογραφία	348

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Στις αρχές την δεκαετία του 1950 έως τις αρχές 1970 άρχισε μια συζήτηση γύρω από την σύνθεση, την μορφή και την μέτρηση του συντελεστή “κεφάλαιο”. Η συζήτηση αυτή πήρε το όνομα Cambridge Controversy, από τις δύο σχολές Cambridge- της αμερικανικής (νεοκλασικής) και της αγγλικής (νεοοικονομικής)- οι οποίες έλαβαν μέρος σε αυτήν.

Οι αμερικανική σχολή με κύριους εκφραστές τους R.Solow, P.Samuelson, D.Levhari πρότειναν την ύπαρξη μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής στην οποία -μέσω μίας πρωταρχικής εισροής, της εργασίας και με την χρήση μιας ομοιογενούς μάζας¹, την οποία ονόμασαν κεφάλαιο- παράγονταν μια ομοιογενής καθαρή εκροή. Στα πλαίσια των νεοκλασικών υποδειγμάτων η αμοιβή κάθε παραγωγικού συντελεστή δίδονταν από το οριακό προϊόν του. Οι αμοιβές όλων των εμπορευμάτων και των παραγωγικών συντελεστών προσδιορίζονταν μέσα σε υποδείγματα γενικής ισορροπίας, ένα εκ των οποίων μπορούμε να ειπωθεί ότι είναι και το Non-Substitution Theorem.

Από την άλλη πλευρά, η νεοοικονομική σχολή με κύριους εκπρόσωπους της τους P.Sraffa, L.Passinetti, J.Robinson, P.Garegnani και με πιο σύγχρονους τους C.Bidard, N.Salvadori και H.D.Kurz χρησιμοποιώντας γραμμικά συστήματα παραγωγής ετερογενούς κεφαλαίου ορίζουν την τιμή ενός εμπορεύματος σαν συνάρτηση των τεχνικών συντελεστών και των μεταβλητών της κατανομής του εισοδήματος.

Πεδίο της διένεξης αυτής ήταν η επιλογή και η κατάταξη των τεχνικών παραγωγής. Για τους νεοκλασικούς οικονομολόγους στα πλαίσια των αντίστοιχων συναρτήσεων παραγωγής, η κατάταξη των τεχνικών είναι πάντοτε δυνατή και μονοσήμαντη, και ορίζεται από τεχνικούς και μόνο συντελεστές.

Από την άλλη πλευρά και οι νεοοικονομικοί οικονομολόγοι δέχονται την δυνατότητα επιλογής των τεχνικών, ωστόσο προσπαθούν να την αποδείξουν. Παρατηρούν κάποια φαινόμενα, όπως η αντίστροφη σχέση ποσοστού κέρδους και έντασης κεφαλαίου² και

¹ Βλ. P. Samuelson (1962b) σελ. 200

² Γνωστή και ως capital deeping.

η εναλλαγή τεχνικών³. Η ύπαρξη των παραπάνω φαινομένων είναι αδύνατη στα πλαίσια των νεοκλασικών υποδειγμάτων επιλογής τεχνικής (τουλάχιστον στα πρώτα).

Η επιλογή τεχνικών γίνεται με διάφορα κριτήρια, όπως αυτό της κερδοφορίας, είτε αυτό της ελαχιστοποίησης του κόστους, είτε κάποιος αλγόριθμος της αγοράς. Τα παραπάνω κριτήρια επιλογής τεχνικής καθώς και το κριτήριο του John von Neumann⁴, θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία, για την περίπτωση γραμμικών συστημάτων απλής παραγωγής⁵. Επιπλέον θα εξεταστούν και οι διάφορες περιπτώσεις μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών παραγωγής. Αναλυτικότερα:

Η ανα χείρας διατριβή χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος χωρίζεται σε 3 κεφάλαια, και περιέχει κάποια εισαγωγικά και προαπαιτούμενα στοιχεία για την παρακολούθηση της παρούσας διατριβής

Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει η παρουσίαση της μεθοδολογίας που θα χρησιμοποιηθεί και θα διασαφηνιστούν κάποιες έννοιες, όπως:

- του συστήματος παραγωγής,
- των γραμμικών συστημάτων παραγωγής, *a la Sraffa-Leontief* και της τεχνικής απλής ή σύνθετης παραγωγής, διασπώμενης ή μή.

Αφού οριστεί η τεχνική παραγωγής, και αφού γίνει μια σύντομη αναφορά στις έννοιες του καθαρού και του ακαθάριστου προϊόντος ενός συστήματος-τεχνικής παραγωγής. Θα γίνει αναφορά, αλλά και θα εξαχθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες, για το παραγωγικό, το προσοδοφόρο, καθώς και για το βιώσιμο ενός συστήματος απλής ή σύνθετης παραγωγής.

Βάσει όλων των παραπάνω θα γίνει και η διαφοροποίηση ανάμεσα σε βασικά και μη βασικά εμπορεύματα αλλά και σε αναπαραγόμενα ή μη.

Επιπλέον θα διασαφηνιστεί η έννοια του τυπικού εμπορεύματος και του τυπικού υποσυστήματος

³ Δηλαδή την επιλογή μιας τεχνικής σε περισσότερες από 2 μη διαδοχικές τιμές του ποσοστού κέρδους.

⁴ Αν και έχει επικρατήσει να θεωρείται περισσότερο ως ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας.

⁵ Αλλά και σύνθετης για τις περιπτώσεις του αλγορίθμου του Bidard και του κριτηρίου του John von Neumann

Στο δεύτερο κεφάλαιο, και αφού διατυπωθούν οι αναγκαίες (προ)υποθέσεις, παρουσιάζεται το σύστημα προσδιορισμού των τιμών παραγωγής ενός συστήματος παραγωγής, *a la Sraffa-Leontief*. Στα πλαίσια αυτά, θα προσδιοριστούν οι τιμές παραγωγής για όλες τις δυνατές περιπτώσεις στην περίπτωση των μη διασπώμενων και διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής⁶, και κάθε ύψος ποσοστού κέρδους ή ονομαστικού ωρομισθίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα εξεταστεί ποιά τιμιακά μεγέθη μεταβάλλονται, με την τυποποίηση των τιμών. Το τελευταίο θα γίνει για κάθε είδος τυποποίησης.

Στο τέταρο κεφάλαιο θα εξεταστεί το πώς εξάγεται η καμπύλη (σχέση) ποσοστού κέρδους ονομαστικού ωρομισθίου ($w-r$ σχέση) και αφού παρουσιαστούν διαγραμματικά τα διάφορα είδη της, θα γίνει μια σύντομη αναφορά στην κλίση και το σχήμα της.

Στο πέμπτο κεφάλαιο του πρώτου μέρους παρουσιάζονται τα πλέον γνωστά στην βιβλιογραφία τυπικά εμπορεύματα, τα οποία έχουν την ιδιότητα της εξαγωγής μιας γραμμικής $w-r$ καμπύλης. Αναλυτικότερα θα παρουσιαστούν τα τυπικά εμπορεύματα του P.Sraffa, του T.Miayo, του Βασιλάκη και τέλος των Π.Βουγιουκλάκη και Θ.Μαριόλη.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια διεξοδικότερη παρουσίαση στην διαμάχη των δύο Cambridge. Όπως θα δούμε στην συνέχεια αντίπαλα ήταν τα δύο κύρια τότε ρευματα στην οικονομική επιστήμη, το νεοκλασικό και το νεο-ρικαρδιανό (νεοκευνσιανό). Θα γίνει αναφορά στα κύρια σημεία της θεωρίας καθώς και στα κύρια σημεία της κριτικής του αντίπαλου κάθε φορά στρατοπέδου. Ιδιαίτερη μνεία θα γίνει σε κάποια κεντρικά πρόσωπα της διαμάχης όπως, των P.Samuelson και D. Levhari από το «στρατόπεδο» των νεοκλασικών (Αμερικανικό Cambridge) και των J.Robinson, P.Sraffa, L.Pasinetti, P.Garegnani και άλλων από το στρατόπεδο των νεορικαρδιανών οικονομολόγων (Αγγλικό-Ευρωπαϊκό Cambridge).

⁶ Στην παρούσα διατριβή δεν θα εξεταστεί με λεπτομέρεια το πώς διαμορφώνονται οι τιμές στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής, καθώς η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση της απλής παραγωγής.

Το δεύτερο μέρος μελετάται το θέμα καθ'εαυτόν της παρούσας διατριβής. Πιο συγκεκριμένα εξετάζεται το πρόβλημα της επιλογής και της κατάταξης τεχνικών παραγωγής. Πιο συγκεκριμένα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται μια σύντομη περιγραφή του προβλήματος .

Στο δευτερο κεφάλαιο, μελετάται το κριτήριο της μεγιστοποίησης των κερδών ήτοι του $w-r$ κριτηρίου, καθώς και στο πότε η $w-r$ καμπύλη κάθε τεχνικής μεταβάλλεται με την τυποποίηση. Θα δείξουμε με άλλα λόγια, πως στην πραγματικότητα γίνεται λόγος για $w-r$ σχέσεις τυπικών υποσυστημάτων και όχι τεχνικών παραγωγής. Θα εξεταστούν οι περιπτώσεις μη διασπώμενων και διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής. Θα καταλήξουμε με άλλα λόγια ότι η μονοσήμαντη κατάταξη είναι μόνον δυνατή μόνο όταν οι τεχνικές οι οποίες συγκρίνονται είναι γειτονικές μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Στο τρίτο κεφάλαιο η προσοχή εστιάζεται στο cost minimization criterion ή ελληνιστί στο κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους. Αφού παρουσιαστούν οι διάφορες εκδοχές του στην βιβλιογραφία, θα γίνει η διατύπωση του και θα διαπιστωθεί αν η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση, για την περίπτωση διασπώμενων ή μή διασπώμενων τεχνικών παραγωγής και για διαφορετικές τυποποιήσεις των τιμών. Τέλος θα δοθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την μονοσήμαντη κατάταξη τους με αυτό το κριτήριο. Στα πλαίσια της παρουσίας του cost minimization criterion, θα παρουσιαστεί και το συγγενές σε αυτό Non Substitution theorem στις διάφορες εκδοχές του, όπως παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία. Επιπλέον θα εξεταστεί σε ποιές περιπτώσεις το cost minimization criterion συμπίπτει με το $w-r$ κριτήριο⁷, αλλά και με το Non Substitution Theorem. Τέλος εξετάζεται σε ποιές περιπτώσεις το κριτήριο της μεγιστοποίησης των κερδών συμπίπτει με αυτό της ελαχιστοποίησης του κόστους. Γίνεται αντιληπτό ότι τα δύο αυτά κριτήρια συμπίπτουν στην περίπτωση μή διασπώμενων γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής και στην περίπτωση διασπώμενων γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής, όπου όμως οι τιμές τυποποιούνται με το εμπορεύμα, το οποίο εξέρχεται από την διαδικασία παραγωγής κατά την οποία διαφέρουν οι δύο τεχνικές.

⁷ Αναφερόμενοι και εν συντομία και στην συζήτηση των H.D.Kurz/Gehrke με τον Γ. Σταμάτη γυρώ απο την σχέση $w-r$ και cost minimization criterion, και την δυνατότητα μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών παραγωγής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα διατυπωθεί ο αλγόριθμος στην περίπτωση της απλής και της σύνθετης παραγωγής. Με άλλα λόγια θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος της αγοράς του Levhari (για την περίπτωση της απλής παραγωγής) και του C.Bidard (για την περίπτωση της σύνθετης). Θα ελεγχθεί μάλιστα σε ποιες περιπτώσεις η κατάταξη που συνεπάγεται ο αλγόριθμος είναι μονοσήμαντη και ανεξάρτητη από την τυποποίηση, καθώς και πότε το σύστημα συγκλίνει στο κυρίαρχο κατά Bidard n -set.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες των χαραζοφιανών συστημάτων παραγωγής, καθώς και των corn economies και θα αποδειχθεί ότι οδηγούν σε μια κατάταξη τεχνικών ανεξάρτητη από την τυποποίηση των τιμών και ως εκ τούτου μονοσήμαντη.

Στο έκτο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το μοντέλο του von Neumann και θα δούμε πως αυτό το κριτήριο οδηγεί σε μια μονοσήμαντη κατάταξης των τεχνικών παραγωγής. Μάλιστα θα δείξουμε ότι το μοντέλο του von Neumann δεν είναι τίποτε άλλο από ένα χαραζοφιανό μοντέλο παραγωγής γενικευμένο στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Θα εξεταστούν διεξοδικά:

- Η αρχική εκδοχή του John von Neumann, χωρίς να επαναλάβουμε την απόδειξη του για το θεώρημα του σταθερού σημείου, στην οποία και βασίζει την ύπαρξη των λύσεων για το μοντέλο του.
- Θα ελεγχθεί επίσης κατά πόσον ένα σύστημα συγκλίνει στην λύση που έδωσε ο ίδιος ο von Neumann, χρησιμοποιώντας μια γενικευμένη εκδοχή, βασισμένη στον Γ.Σταμάτη, για τις περιπτώσεις, μη διασπώμενων, μη διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής, μη διασπώμενων διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής, διασπώμενων μη διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής και διασπώμενων διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται εκτενέστερα οι ιδιότητες που ισχύουν στα σημεία αλλαγής (switch) και εναλλαγής (reswitch) δύο τεχνικών. Επιπλέον θα δωθεί ιδιαίτερη σημασία στα λεγόμενα ψευδή σημεία εναλλαγής (Fake switch points). Θα δείξουμε ότι τα σημεία αυτά, αντίθετα με τα όσα υποστηρίζουν οι C.Bidard και E.Klimovksy, κάθε άλλο παρά ψευδή είναι.

Στο όγδοο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το πρόβλημα της επιλογής τεχνικής (σύμφωνα με το w - r κριτήριο) στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο πρωταρχικές εισροές, λόγου

χάρη γή. Εξατάζεται αρχικά το πώς προσδιορίζονται οι τιμές παραγωγής και στην συνέχεια εξετάζεται το πρόβλημα καθ' εαυτόν της επιλογής τεχνικής σύμφωνα με το W-w-r πλέον κριτήριο.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος εξάγονται τα τελικά συμπεράσματα της παρούσας διατριβής. Πιο συγκεκριμένα συνοψίζονται τα συμπεράσματα σχετικά με τα όσα αναφέρθηκαν στην παρούσα διατριβή. Κεντρικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι τις περισσότερες περιπτώσεις κατ' ουσίαν πρόκειται για κατάταξη τυπικών υποσυστημάτων και όχι για κατάταξη τεχνικών παραγωγής – με εξαίρεση φυσικά τα χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής και των corn economies.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ:

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το αναλυτικό πλαίσιο, στο οποίο θα κινηθεί η παρούσα διατριβή.

Η εξέταση του ζητήματος της επιλογής και της κατάταξης των τεχνικών παραγωγής θα γίνει στα πλαίσια γραμμικών συστημάτων παραγωγής, τα οποία από την φύση τους εμφανίζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Περιπτώσεις μη γραμμικών συστημάτων παραγωγής, δεν μπορούν να περιγράψουν μια οικονομία στο σύνολο της, και ως εκ τούτου θα τεθούν εκτός ανάλυσης στην παρούσα διατριβή.

Τα γραμμικά συστήματα παραγωγής, στην βιβλιογραφία, εμφανίστηκαν όπως τα ξέρουμε σήμερα, από τους W.Leontief⁸, John von Neumann⁹ και P.Sraffa¹⁰, καθώς και από τον L.von Bortkiewicz¹¹. Τα συστήματα αυτά είναι γραμμικά, καθώς οι διαδικασίες παραγωγής και το οικονομικό σύστημα στο σύνολο του, περιγράφονται από ένα σύνολο γραμμικών σχέσεων.

Για την κατανόηση της λειτουργίας των γραμμικών μοντέλων (ή συστημάτων) παραγωγής θα ήταν χρήσιμη η διασαφήνιση ορισμένων εννοιών γύρω από αυτά. Μερικές από αυτές ενδεικτικά θα είναι:

1. Η έννοια του συστήματος και της τεχνικής παραγωγής
2. Η έννοια της μεθόδου παραγωγής
3. Η έννοια του καθαρού και του ακαθάριστου προϊόντος
4. Η έννοια της τυποποίησης

1.1 Σύστημα παραγωγής

Προτού ορίσουμε τις τεχνικές, θα ήταν αναγκαίο να οριστούν οι μήτρες $A, A \geq 0$ και $B, B \geq 0$ καθώς και το διάνυσμα $\ell, \ell \geq 0$. Κατά συνέπεια σαν $A, A \geq 0$, ορίζουμε την

⁸ W.Leontief (1951)

⁹ John von Neumann (1937)

¹⁰ P.Sraffa (1960)

¹¹ L.von Bortkiewicz (1952)

$n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών (ή των εισροών σε εμπορεύματα), όπου κάθε στοιχείο της a_{ij} , παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος του είδους i , που εισέρχεται άμεσα στην διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j . Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η $n \times n$ μήτρα $B, B \geq 0$ των εκροών, όπου κάθε της στοιχείο b_{ij} , παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος i που εξέρχεται από την διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j . Σαν $\ell, \ell \geq 0$ ορίζεται το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε άμεση εργασία, ενώ κάθε στοιχείο του ℓ_i , παριστά την ποσότητα της άμεσης και ομοιογενούς εργασίας (ή όπως την ονομάζει ο Γ. Σταμάτης, ζωντανή εργασία), που εισέρχεται στην διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j .

Προκειμένου να περιγράψουμε ένα γραμμικό σύστημα παραγωγής, είναι αναγκαίος και ο ορισμός των διανυσμάτων του ακαθάριστου και του καθαρού προϊόντος, καθώς και αυτού των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος.

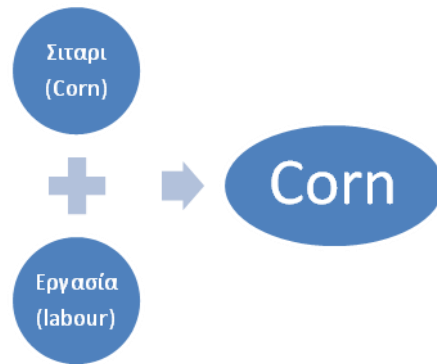
Αρχικά σαν ακαθάριστο προϊόν, ορίζεται το $n \times 1$ διάνυσμα $X, X \geq 0$, του οποίου κάθε στοιχείο X_j , παριστά την ακαθάριστη εκροή της διαδικασίας παραγωγής του εμπορεύματος j . Σαν καθαρό προϊόν, ορίζεται το $n \times 1$ διάνυσμα $Y, Y \geq 0$, του οποίου κάθε στοιχείο Y_j , παριστά την καθαρή εκροή της διαδικασίας παραγωγής του εμπορεύματος j . Με $x, x \geq 0$, ορίζεται το $n \times 1$ διάνυσμα $x, x \geq 0$, του οποίου κάθε στοιχείο x_j , παριστά το επίπεδο δραστηριότητας της διαδικασίας παραγωγής του εμπορεύματος j .

Οι μήτρες A και B , καθώς και τα διανύσματα x, Y, X , και ℓ σχηματίζουν ως γνωστόν, ένα σύστημα εισροών- εκροών, το οποίο όπως ξέρουμε περιγράφεται από ένα γραμμικό υπόδειγμα παραγωγής, το οποίο μπορεί να παρασταθεί αλγεβρικά-σχηματικά από την παρακάτω σχέση

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus [l_1, l_2, \dots, l_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού της τεχνικής παραγωγής είναι αυτός των H.D. Kurz και N.Salvadori. Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση μιας

μονοτομεακής οικονομίας, η οποία a la Ricardo, παράγει σίτο (corn)¹². Με άλλα λόγια το μοντέλο της παραγωγής έχει ως εξής:



Σύμφωνα με το σχήμα αυτό, οι εργάτες θερίζουν και σπέρνουν το σίτο, ενώ ο σίτος έχει τον σύνθετο ρόλο του μέσου παραγωγής, και του μισθιακού εμπορεύματος, το οποίο είναι απαραίτητο για την επιβίωση των εργατών. Αν θέλουμε τα παραπάνω να τα εμφανίσουμε σε μια περισσότερο σύντομη και μαθηματικοποιημένη εκδοχή, θα έχουν την μορφή:

$$a \oplus \ell \mapsto b \quad (1)$$

Σύμφωνα με την σχέση (1) α μονάδες σιταριού συνδυάζονται από κοινού με ℓ μονάδες ζωντανής εργασίας (Γ.Σ) και μετατρέπονται σε b μονάδες σίτου. Κατά συνέπεια το σύμβολο $\oplus$ παριστά την από κοινού μετατροπή του σιταριού και της ζωντανής εργασίας εκ νέου σε σίτο, ενώ το σύμβολο $\mapsto$ παριστά την διεργασία (ή όπως οι Kurz και Salvadori την χαρακτηρίζουν σαν ένα μαύρο κουτί¹³) κατά την οποία ο σίτος και η εργασία μετατρέπονται σε σίτο εκ νέου¹⁴.

Η σχέση (1) είναι δυνατόν να αναχθεί και στην μονάδα αν διαιρεθούν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με την ακαθάριστη εκροή, b. Συνεπώς:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{\ell}{b} \mapsto 1 \quad (2)$$

¹² H.D. Kurz και N.Salvadori, (1991) σελ 43

¹³ H.D. Kurz και N.Salvadori, (1991) σελ 43

¹⁴ Ωστόσο η χρήση του συμβόλου $\mapsto$ είναι γενική και ανά περίπτωση μπορεί να υποδηλώνει μια διαφορετική συνάρτηση παραγωγής. Λόγω της φύσης της παρούσας διατριβής αρκούμαστε να αναφέρουμε, ότι το σύμβολο $\mapsto$ αναφέρεται σε γραμμικές συναρτήσεις παραγωγής, a la Leontief-Sraffa-von Neumann

Την παραπάνω παρουσίαση μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε έναν κόσμο με παραπάνω του ενός παραγόμενου εμπορεύματος. Κατά συνέπεια την θέση της σχέσης (1) μπορεί να πάρει η:

$$A \oplus \ell \mapsto B \quad (3)$$

Σύμφωνα με την σχέση (3) όπου A η $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών, B η $n \times n$ των εκροών του συστήματος και ℓ , το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία. Ορίζοντας τις διαστάσεις του συστήματος σαν $a_{ij}(b_{ij})$ ορίζουμε την ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται (εξέρχεται) άμεσα από την διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j , και ℓ_i την ποσότητα της ζωντανής εργασίας που εισέρχεται στην παραγωγή του εμπορεύματος i . Κατά συνέπεια η σχέση (3) παίρνει την μορφή:

$$A_{ij} \oplus \ell_i \mapsto B_{ij} \quad (4)$$

Αν την παραπάνω σχέση θέλουμε να την αναγάγουμε στο μοναδιαίο επίπεδο, δεν έχουμε να κάνουμε τίποτε άλλο από το να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (4) με την αντίστροφη μήτρα της B, B^{-1} . Με άλλα λόγια από την (4) προκύπτει:

$$A_{ij} B_{ij}^{-1} \oplus \ell_i B_{ij}^{-1} \mapsto B_{ij} B_{ij}^{-1} \Leftrightarrow A_{ij}^* \oplus \ell_i^* \mapsto I, A_{ij}^* \equiv A_{ij} B_{ij}^{-1}, \ell_i^* \equiv \ell_i B_{ij}^{-1} \quad (5)$$

Ένας ομολογουμένως περιεκτικότερος ορισμός της τεχνικής και του συστήματος παραγωγής δίδεται από τον Γ. Σταμάτη¹⁵. Βασιζόμενοι στο τελευταίο μπορούμε να πούμε ότι μια τεχνική παραγωγής $[A, \ell]$ ορίζεται πλήρως από την μήτρα των εισροών σε εμπορεύματα (μέσων παραγωγής) $A, A \geq 0$, διαστάσεων $n \times n$, και το διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος, $\ell, \ell \geq 0$, διαστάσεων $1 \times n$.

Αντίστοιχα ένα σύστημα παραγωγής ορίζεται πλήρως από την τριπλέτα $[A, \ell, X]$, η οποία αποτελείται από την τεχνική παραγωγής $[A, \ell]$ που χρησιμοποιεί και το διάνυσμα του ακαθάριστου προϊόντος που παράγει.

¹⁵ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ17

Η σχέση τεχνικής και συστήματος παραγωγής αναλύεται περαιτέρω από τον Γ. Σταμάτη¹⁶ ορίζοντας εκ νέου τεχνικές και συστήματα παραγωγής. Κατά συνέπεια για τον Γ. Σταμάτη μια τεχνική παραγωγής αποτελείται από όλα εκείνα τα συστήματα παραγωγής τα οποία:

1. Παράγουν όλα τα δυνατά θετικά ακαθάριστα προϊόντα, σε οποιαδήποτε ποσότητα και αναλογία -των προς παραγωγή- εμπορευμάτων, και
2. Για κάθε εμπόρευμα έχουν τον ίδιο λόγο εισροών, προς την ακαθάριστη εκροή. Λόγω μάλιστα της γραμμικότητας της τεχνικής ο λόγος αυτός εισροών ακαθάριστου προϊόντος, είναι ανεξάρτητος από τα αντίστοιχα ακαθάριστα προϊόντα.

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες λέξεις με τον Γ. Σταμάτη¹⁷, μπορούμε να πούμε:

«Η τεχνική λοιπόν, είναι ότι απομένει από το σύνολο των παραπάνω συστημάτων, όταν αντιπαρέλθουμε κατ' αφαιρετικό τρόπον τα συγκεκριμένα ακαθάριστα προϊόντα που παράγουν αυτά τα συστήματα. Αυτό που απομένει προφανώς είναι οι λόγοι εισροών εκροών. Οι λόγοι αυτοί εκφράζονται από την αντίστοιχη A και το αντίστοιχο ℓ . Για αυτό και η τεχνική ορίζεται εν τέλει πλήρως από την A και το ℓ .»

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση των γραμμικών τεχνικών παραγωγής, όλα τα δυνατά συστήματα παραγωγής είναι αυτά που σε τελευταία ανάλυση συγκροτούν την τεχνική. Με άλλα λόγια είναι δυνατόν να υπάρξουν τόσα συστήματα παραγωγής, όσα και τα δυνάμενα να παραχθούν ακαθάριστα προϊόντα μιας δεδομένης τεχνικής παραγωγής.

¹⁶ Γ. Σταμάτης (1995) σελ42

¹⁷ Γ. Σταμάτης (1995) σελ43

1.2 Μέθοδος ή διαδικασία παραγωγής

Από την σχέση (4) μπορούμε να ορίσουμε την διαδικασία παραγωγής η οποία περιγράφεται από την τριπλέτα διανυσμάτων $[a_j, b_j, \ell_i]$ για τα οποία από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \oplus \ell_j \mapsto \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει, ότι στην διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j, εισέρχονται, άμεσα και από κοινού, τα εμπορεύματα 1 έως n και η ζωντανή εργασία. Κατά συνέπεια δύνανται να εξαχθούν από αυτήν τα εμπορεύματα από 1...έως και n.

Δανειζόμενοι τον ορισμό του Κ.Γόγολου μπορούμε να ορίσουμε την διαδικασία παραγωγής σαν:

«Λεκτικά τη διαδικασία παραγωγής θα μπορούσαμε να την ορίσουμε ως εξής: διαδικασία παραγωγής είναι μια «ενέργεια», η οποία προσδιορίζεται από τις τεχνικές συνθήκες παραγωγής και την εργασιακή δύναμη που κατέχει μια δεδομένη οικονομία και η οποία δίνει τη δυνατότητα στην οικονομία αυτή να μετατρέψει μια δέσμη εμπορευμάτων σε μια άλλη δέσμη εμπορευμάτων.»¹⁸

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η διαδικασία παραγωγής, είναι μια εσωτερική διεργασία, του συστήματος παραγωγής ή της τεχνικής παραγωγής γενικότερα, με την οποία μετατρέπεται ένα εμπόρευμα ή ένα καλάθι εμπορευμάτων σε συνδυασμό με την ζωντανή εργασία, σε ένα συγκεκριμένο εμπόρευμα (στην περίπτωση της απλής παραγωγής) ή σε ένα καλάθι εμπορευμάτων (στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής).

¹⁸ Βλ. Κ.Γόγολος (2000) σελ 4

1.2.1 Συστήματα (τεχνικές) απλής ή σύνθετης παραγωγής

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω από μια διαδικασία παραγωγής, είναι δυνατόν να εξέρχονται ένα ή περισσότερα εμπορεύματα (καλάθι εμπορευμάτων). Το τελευταίο είναι και αυτό που καθορίζει αν μία τεχνική (ή σύστημα) είναι απλής (single) ή σύνθετης (joint production) παραγωγής. Κατά συνέπεια :

Μια τεχνική απλής παραγωγής είναι εκείνη η τεχνική, από κάθε διαδικασία της οποίας εξέρχεται ένα μόνο είδος εμπορεύματος, το οποίο δεν παράγεται από καμία άλλη διαδικασία. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η μήτρα των εκροών έχει όλα της τα στοιχεία μηδενικά, εκτός από αυτά που βρίσκονται επί της κυρίας διαγωνίου. Οι τεχνικές απλής παραγωγής μπορούν εύκολα να αναχθούν το μοναδιαίο επίπεδο, αν διαιρέσουμε κάθε στοιχείο της εκάστοτε στήλης της μήτρας των τεχνικών συντελεστών και του διανύσματος της ζωντανής εργασίας με το άθροισμα όλων των στοιχείων της αντίστοιχης στήλης στην οποία βρίσκεται. Με άλλα λόγια¹⁹:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} C \oplus [l_1, l_2, \dots, l_n] C \rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} C, C \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_i^n b_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_i^n b_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sum_i^n b_{im}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Από την παραπάνω σχέση -και δεδομένου ότι στην περίπτωση της απλής παραγωγής η μήτρα των εκροών εισροών είναι διαγώνια- προκύπτει:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{\ell} \rightarrow I, \tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} C, \tilde{\ell} \equiv [l_1, l_2, \dots, l_n] C, I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

¹⁹ Είναι αυτονόητο ότι στην περίπτωση της απλής παραγωγής $\forall j \neq i, b_{ij} = 0$

Με τον παραπάνω τρόπο η δεδομένη τεχνική απλής παραγωγής μπορεί να αναχθεί στο μοναδιαίο επίπεδο. Με άλλα λόγια από κάθε διαδικασία παραγωγής εξέρχεται μία μόνο μονάδα του κάθε εμπορεύματος. Το τελευταίο είναι και ο λόγος για τον οποίο τα επίπεδα δραστηριότητας του συστήματος, συμπίπτουν με το ακαθάριστο προϊόν. Εφεξής στην περίπτωση της απλής παραγωγής την μήτρα $\tilde{A}$ θα την συμβολίζουμε με την μήτρα A , όπου κάθε στοιχείο της a_{ij} , παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος του είδους i , που εισέρχεται άμεσα στην παραγωγή μίας μονάδας του εμπορεύματος j . Αντίστοιχα το διάνυσμα $\tilde{\ell}$ θα το συμβολίζουμε με το διάνυσμα ℓ , όπου κάθε στοιχείο του ℓ_i , παριστά την ποσότητα της άμεσης και ομοιογενούς εργασίας (ή όπως την ονομάζει ο Γ. Σταμάτης, ζωντανή εργασία), που εισέρχεται άμεσα στην παραγωγή μίας μονάδας του εμπορεύματος i .

Από την άλλη πλευρά στις τεχνικές σύνθετης παραγωγής (joint production techniques) είναι δυνατόν από μία διαδικασία παραγωγής να εξέρχονται παραπάνω από ένα εμπορεύματα. Τα ίδια αυτά εμπορεύματα είναι δυνατόν να παράγονται από μια διαφορετική διαδικασία παραγωγής, σε συνδυασμό και με άλλα εμπορεύματα. Στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής δεν είναι δυνατόν ένα σύστημα παραγωγής να αναχθεί στο μοναδιαίο επίπεδο. Αντίθετα οι εισροές και εκροές μπορούν να αναχθούν σε μονάδες εργασίας. Με άλλα λόγια από την σχέση (1) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} L \oplus [\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n] L \rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} L, L \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell_2} & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Και κατά συνέπεια:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} L \oplus [\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n] L \rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} L, L \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell_2} & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\ell_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Εφεξής στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής την μήτρα $\tilde{A}$ θα την συμβολίζουμε με την μήτρα A , όπου κάθε στοιχείο της, a_{ij} , παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος του είδους i , που εισέρχεται άμεσα στην παραγωγή του εμπορεύματος j , ανα μονάδα ζωντανής εργασίας. Αντίστοιχα η την μήτρα B , όπου κάθε στοιχείο της, b_{ij} , παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος του είδους i , που εξέρχεται από την διαδικασία παραγωγή του εμπορεύματος j , ανά μονάδα ζωντανής εργασίας.

Στην παρούσα διατριβή θα γίνει λόγος για διασπώμενα και μη διασπώμενα συστήματα απλής ή σύνθετης παραγωγής.

Προτού αναφερθούμε σε διασπώμενες και μη διασπώμενες τεχνικές πρέπει πρώτα να διασαφηνιστούν οι όροι βασικό και μη βασικό εμπόρευμα. Βασικά εμπορεύματα είναι εκείνα τα εμπορεύματα, που εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων, συμπεριλαμβανομένου της δικής τους παραγωγής. Από την άλλη πλευρά μη βασικά είναι εκείνα τα εμπορεύματα, που δεν εισέρχονται άμεσα ή έστω έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων συμπεριλαμβανομένης και της δικής του παραγωγής²⁰.

Από τον ορισμό του Γ.Σταμάτη²¹ για τις διασπώμενες και μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής μπορούμε να αναφέρουμε:

Μια τεχνική απλής παραγωγής $[A, \ell]$ είναι διασπώμενη αν η μήτρα $A, A \geq 0$ είναι διασπώμενη και μη διασπώμενη αν η η μήτρα $A, A \geq 0$ είναι μη διασπώμενη. Μια διασπώμενη $n \times n$ μήτρα A , μπορεί να αναχθεί στην μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Στην περίπτωση αυτή η μήτρα A , διασπάται στις υπομήτρες A_{11} , A_{12} και A_{22} . Η μήτρα A_{11} διαστάσεων $k \times k$, $k < n$, παριστά τις εισροές σε βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται στην ίδια την δική τους παραγωγής. Η μήτρα A_{22} διαστάσεων $n-k \times n-k$ παριστά τις εισροές σε βασικά εμπορεύματα, που εισέρχονται στην παραγωγή μη

²⁰ Γ.Σταμάτης (1997) 89-115

²¹ Γ. Σταμάτης(1998) σελ. 89-113

βασικών εμπορευμάτων. Ενώ η A_{22} είναι η $n-k \times n-k$ μήτρα των εισροών σε μη βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται στην ίδια την δική τους παραγωγή. Επιπλέον για το διάνυσμα των εισροών σε εργασία διασπάται και αυτό σε ζωντανή εργασία που εισέρχεται στο βασικό και μη βασικό υποσύστημα. Με άλλα λόγια:

$\ell = [\ell_I, \ell_{II}]$, όπου ℓ_I το $1 \times k$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία στο βασικό υποσύστημα και ℓ_{II} το $1 \times n-k$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία στο βασικό υποσύστημα

Με τον τρόπο αυτό η τεχνική $[A, \ell]$, διασπάται σε δύο υπό-τεχνικές την $[A_I, \ell_I]$, που παράγει βασικά εμπορεύματα μόνο, και την $[A_{II}, \ell_{II}]$ που παράγει βασικά και μη βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων²². Βάσει των παραπάνω είμαστε σε θέση να ορίσουμε το βασικό και μη βασικό υποσύστημα. Καθ' αναλογία με τους προηγούμενους ορισμούς το (μη) βασικό υποσύστημα ορίζεται πλήρως από την υπο-τεχνική $[A_I, \ell_I]([A_{II}, \ell_{II}])$ και το διάνυσμα των επιπέδων δραστηριοτήτων του (μη) βασικού υποσυστήματος $x_I, x_I > 0$, διαστάσεων $k \times 1$ ($x_{II}, x_{II} > 0$, διαστάσεων $n-k \times 1$).

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε αντίθεση με το μη βασικό υποσύστημα το βασικό υποσύστημα είναι ανεξάρτητο, υπό την έννοια ότι μπορεί να υπάρξει και χωρίς την παρουσία του μη βασικού υποσυστήματος. Αντίθετα ένα μη βασικό υποσύστημα δεν μπορεί να υπάρξει χωρίς την παρουσία του βασικού υποσυστήματος καθώς δεν είναι σε θέση να παράξει από μόνο του τις αντικειμενικές και υποκειμενικές συνθήκες²³ της παραγωγής του²⁴.

Ένα ακόμα είδος εμπορευμάτων τα οποία θα μας απασχολήσουν (στα πλαίσια χαραζοφινών συστημάτων παραγωγής) είναι τα αναπαραγόμενα και μη εμπορεύματα²⁵. Προτού ορίσουμε τα εμπορεύματα αυτά, θα πρέπει να οριστεί η

²² Ισχύει με άλλα λόγια $A_I = \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, A_{II} = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$

²³ Για την έννοια των αντικειμενικών και υποκειμενικών συνθηκών παραγωγής βλ. Γ. Σταμάτης (1985) σελ 61-65

²⁴ Βλ. Γ. Σταμάτης (1984) σελ 523-524

²⁵ Βλ. Γ. Σταμάτης (1984) σελ 525-528 και Γ. Σταμάτης (1985) σελ 95-100

επαυξημένη κατά τα μισθιακά εμπορεύματα μήτρα των τεχνικών συντελεστών του συστήματος $\bar{A}$. Με άλλα λόγια αν $d, d \geq 0$ το $n \times 1$ διάνυσμα που παριστά το πραγματικό ωρομίσθιο, τότε προκύπτει:

$$\bar{A} \equiv A + d\ell, \bar{A} \geq 0 \quad (12)$$

Κάθε στοιχείο $\bar{a}_{ij}$ παριστά την ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται ως μέσο παραγωγής ή και ως μισθιακό εμπόρευμα στην διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος j . Στην περίπτωση της ύπαρξης της επαυξημένης κατά τα μισθιακά εμπορεύματα μήτρας των τεχνικών συντελεστών, η εργασία από πρωταρχική εισροή (primary input) μετατρέπεται σε ένα συντελεστή παραγωγής, ο οποίος (ανά)παράγεται εντός του συστήματος, και ως εκ τούτου αποτελεί ένα (ανα)παραγόμενο εμπόρευμα εντός του συστήματος.

Κατά συνέπεια σαν (μη) αναπαραγόμενα εμπορεύματα ορίζονται εκείνα τα εμπορεύματα που (δεν) εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην (ανα)παραγωγή της εργασιακής δύναμης. Ως κατεξοχήν αναπαραγόμενο εμπόρευμα είναι και η ίδια η ζωντανή εργασία²⁶.

Συχνά στα πλαίσια της εξέτασης γραμμικών συστημάτων παραγωγής, συχνά γίνεται λόγος για το παραγωγικόν ή το προσοδοφόρον μιας τεχνικής παραγωγής ή την βιωσιμότητα ενός συστήματος παραγωγής.

Αν το $Y, Y \geq 0$ αντιπροσωπεύει το $n \times 1$ διάνυσμα του καθαρού προϊόντος και το $U, U \geq 0$ αντιπροσωπεύει το $n \times 1$ διάνυσμα του υπερπροϊόντος για την σχέση των δύο αυτών μεγεθών ισχύει²⁷:

$$Y = U + d\ell X \quad (1)$$

²⁶ είναι φανερό ότι οι όροι βασικό και αναπαραγόμενο εμπόρευμα είναι συγγενείς. Ωστόσο δεν ταυτίζονται. Ενώ ένα αναπαραγόμενο εμπόρευμα είναι πάντοτε βασικό, καθώς εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων συμπεριλαμβανομένου και της δικής του παραγωγής (και τέτοιο φυσικά είναι η εργασία), από την άλλη πλευρά ένα βασικό εμπόρευμα δεν μπορεί να είναι πάντοτε αναπαραγόμενο. Για περισσότερα βλ. Γ.Σταμάτη (1994) 523-532, καθώς και Ch. Bidard (1991)

²⁷ Βλ. Γ.Σταμάτη (1998) σελ 96-97

, όπου το $n \times 1$ διάνυσμα $d\ell X$ παριστά τους πραγματικούς μισθούς (ή με άλλα λόγια την ποσότητα μισθιακών εμπορευμάτων που στοίχησε η παραγωγή του ακαθάριστου προϊόντος). Βάσει των παραπάνω ισχύει :

1.2.2 Η περίπτωση της απλής παραγωγής

1.2.2.1 Η περίπτωση μη διασπώμενων τεχνικών παραγωγής

Αρχικά για την παραγωγικότητα ή μη μιας τεχνικής παραγωγής:

Εξ ορισμού για το ακαθάριστο προϊόν ισχύει²⁸:

$$X = AX + Y \Leftrightarrow (I - A)X = Y \quad (2)$$

Η σχέση (2) είναι η μαθηματική διατύπωση για την βιωσιμότητα ενός συστήματος παραγωγής. Πιο συγκεκριμένα ένα σύστημα που χρησιμοποιεί την τεχνική $[A, \ell]$ καλείται βιώσιμο όταν δύναται να παράξει κάθε θετικό ή ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή ημιθετικό καθαρό προϊόν²⁹. Για να συμβαίνει το παραπάνω πρέπει να ισχύει, δεδομένου ότι $Y, Y \geq 0$:

$$x_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

Από την σχέση (2) προκύπτει η συνθήκη για την παραγωγικότητα των τεχνικών παραγωγής. Λεκτικά η συνθήκη για το παραγωγικόν μια τεχνικής έχει ως εξής μια τεχνική παραγωγής είναι παραγωγική αν δύναται να παράξει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή ημιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα θετικό αντίστοιχο ακαθάριστο προϊόν. Μαθηματικά ειπωμένο ισχύει:

$$X = (I - A)^{-1}Y \quad (4)$$

Ωστόσο για να ισχύει η σχέση (4) πρέπει να ισχύει:

$$(I - A)^{-1} \geq 0 \quad (5)$$

²⁸ Βλ. Γ.Σταμάτης (1998) σελ.92

²⁹ Μια λεπτομερέστερη ανάλυση για την βιωσιμότητα ή μη διασπώμενων ή μη τεχνικών μπορεί να βρεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στο Γ.Σταμάτης (1994) σελ 31-42

Από τα θεωρήματα Peron Frobenius, γνωρίζουμε ότι για να ισχύει η (5) πρέπει απαραίτητως να ισχύει:

$$\lambda_m^A < 1 \quad (6)$$

Με άλλα λόγια για να είναι μια τεχνική παραγωγής παραγωγική πρέπει και αρκεί η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A να είναι μικρότερη της μονάδας³⁰.

Αντίστοιχα για ένα σύστημα παραγωγής που χρησιμοποιεί την τεχνική $[A, \ell]$ καλείται προσοδοφόρο, όταν δύναται να παράξει κάθε θετικό ή ημιθετικό υπερπροϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν³¹. Για να συμβαίνει το παραπάνω πρέπει να ισχύει, δεδομένου ότι $U, U \geq 0$:

$$\begin{aligned} X &= AX + d\ell X + U \Leftrightarrow \\ (I - \bar{A})X &= U, \bar{A} = A + d\ell \Leftrightarrow \\ X &= (I - \bar{A})^{-1}U \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (7)$$

Όμως για να ισχύει η (7) πάλι σύμφωνα με τα θεωρήματα Peron Frobenius, πρέπει και αρκεί να ισχύει η:

$$\lambda_m^{\bar{A}} < 1 \quad (8)$$

Με άλλα λόγια για να είναι μια τεχνική παραγωγής προσοδοφόρα, πρέπει και αρκεί η μέγιστη ιδιοτιμή της κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσανυξημένης μήτρας των τεχνικών συντελεστών να είναι μικρότερη της μονάδας.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ένα σύστημα που χρησιμοποιεί μια παραγωγική τεχνική παραγωγής είναι πάντοτε βιώσιμο. Από την άλλη πλευρά ένα βιώσιμο σύστημα δεν χρησιμοποιεί απαραίτητα μια παραγωγική τεχνική παραγωγής.

Επιπλέον μια προσοδοφόρα τεχνική είναι πάντοτε παραγωγική, και κατ' επέκταση σε συνδυασμό με τα επίπεδα δραστηριότητας του συστήματος σχηματίζουν ένα, πάντοτε, βιώσιμο σύστημα παραγωγής.

³⁰Για μια λεπτομερέστερη απόδειξη βλ. Γ.Σταμάτης(1994) σελ18-24, και 45-58

³¹ Μια λεπτομερέστερη ανάλυση για την βιωσιμότητα ή μη διασπώμενων ή μη τεχνικών μπορεί να βρεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στο Γ.Σταμάτης (1994) σελ 30-42 και 62-66

1.2.2.2 Η περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών παραγωγής

Αρχικά για την παραγωγικότητα ή μη μιας διασπώμενης τεχνικής παραγωγής ισχύουν τα ακόλουθα:

Το ακαθάριστο προϊόν προκύπτει από την σχέση³²:

$$X = AX + Y \Leftrightarrow (I - A)X = Y \quad (9)$$

Η σχέση (9) είναι η μαθηματική διατύπωση για την βιωσιμότητα ενός συστήματος παραγωγής. Πιο συγκεκριμένα ένα σύστημα που χρησιμοποιεί την τεχνική $[A, \ell]$ καλείται βιώσιμο, όταν δύναται να παράξει κάθε θετικό ή ημιθετικό καθαρό ακαθάριστο προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή ημιθετικό καθαρό προϊόν³³. Για να συμβαίνει το παραπάνω πρέπει να ισχύει, δεδομένου ότι $Y, Y \geq 0$:

$$x_j - \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (10)$$

Από την σχέση (2) προκύπτει η συνθήκη για την παραγωγικότητα των τεχνικών παραγωγής. Λεκτικά η συνθήκη για το παραγωγικόν μια τεχνικής έχει ως εξής: μια τεχνική παραγωγής είναι παραγωγική αν δύναται να παράξει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή ημιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν. Μαθηματικά ειπωμένο ισχύει:

$$X = (I - A)^{-1}Y \quad (11)$$

Ωστόσο για να ισχύει η σχέση (4) πρέπει να ισχύει:

$$(I - A)^{-1} \geq 0 \quad (12)$$

Από τα θεωρήματα Peron Frobenius, γνωρίζουμε ότι για να ισχύει η (5) πρέπει απαραίτητως να ισχύει:

³² Βλ. Γ.Σταμάτης (1998) σελ.94

³³ Μια λεπτομερέστερη ανάλυση για την βιωσιμότητα ή μη διασπώμενων ή μη τεχνικών μπορεί να βρεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στο Γ.Σταμάτης (1994) σελ 30-42 και 62-66

$$\lambda_m^A < 1 \quad (13)$$

Με άλλα λόγια για να είναι μια τεχνική παραγωγής παραγωγική πρέπει και αρκεί η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A να είναι μικρότερη της μονάδας³⁴.

Αντίστοιχα ένα σύστημα παραγωγής που χρησιμοποιεί την τεχνική $[A, \ell]$ καλείται προσοδοφόρο, όταν δύναται να παράξει κάθε θετικό ή ημιθετικό υπερπροϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν³⁵. Για να συμβαίνει το παραπάνω πρέπει να ισχύει, δεδομένου ότι $U, U \geq 0$:

$$\begin{aligned} X &= AX + d\ell X + U \Leftrightarrow \\ (I - \bar{A})X &= U, \bar{A} = A + d\ell \Leftrightarrow \\ X &= (I - \bar{A})^{-1}U \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (14)$$

Όμως για να ισχύει η (7) πάλι σύμφωνα με τα θεωρήματα Peron Frobenius, πρέπει και αρκεί να ισχύει η:

$$\lambda_m^{\bar{A}} < 1 \quad (15)$$

Με άλλα λόγια για να είναι μια τεχνική παραγωγής προσοδοφόρα, πρέπει και αρκεί η μέγιστη ιδιοτιμή της κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένης μήτρας των τεχνικών συντελεστών να είναι μικρότερη της μονάδας.

1.2.3 Η περίπτωση της σύνθετης παραγωγής

Είδαμε παραπάνω, ότι από μία διαδικασία παραγωγής είναι δυνατόν να εξέρχονται παραπάνω από ένα εμπορεύματα ήτοι ένα καλάθι ή δέσμη εμπορευμάτων. Στα ακόλουθα θα παρουσιάσουμε πότε μια τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι παραγωγική, προσοδοφόρα ή το σύστημα που σχηματίζει από κοινού με τα επίπεδα δραστηριότητας είναι βιώσιμο, στην περίπτωση διασπώμενων και μη τεχνικών.

Επιπλέον μια τεχνική σύνθετης παραγωγής μπορεί να είναι διαχωρίσιμη ή μη. Μια τεχνική σύνθετης παραγωγής, διαστάσεων $n \times n$, είναι μη διαχωρίσιμη (all-engaging)

³⁴Για μια λεπτομερέστερη απόδειξη βλ. Γ.Σταμάτης (1994) σελ18-24, και 45-58

³⁵ Μια λεπτομερέστερη ανάλυση για το προσοδοφόρο ή μη διασπώμενων ή μη τεχνικών μπορεί να βρεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στο Γ.Σταμάτης (1994) σελ 24-30 και 58-62

όταν χρησιμοποιεί όλες τις διαδικασίες παραγωγής, για να παράξει τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα. Από την άλλη πλευρά είναι διαχωρίσιμη αν χρησιμοποιεί λιγότερες από τις n διαθέσιμες διαδικασίες για να παράξει τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα³⁶. Είναι με άλλα λόγια δυνατόν να έχουμε και μη τετράγωνές τεχνικές παραγωγής³⁷.

1.2.3.1 Μη διασπώμενες τεχνικές σύνθετης παραγωγής

Μια τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι μη διασπώμενη όταν η μήτρα $(B + A)$ είναι μη διασπώμενη. Κατά συνέπεια για το ακαθάριστο προϊόν μιας μη διασπώμενης τεχνικής σύνθετης παραγωγής, ισχύει:

$$Bx = Ax + Y \quad (16)$$

Εργαζόμενοι κατ' ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση της απλής παραγωγής μια τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι παραγωγική, όταν για αυτήν ισχύει:

$$x = (B - A)^{-1}Y \quad (17), \quad \text{πολλαπλασιάζοντας από}$$

αριστερά την (17) με την μήτρα B , προκύπτει:

$$Bx = B(B - A)^{-1}Y \Leftrightarrow X \equiv Bx$$

$$X = B(B - A)^{-1}Y \quad (18)$$

Κατά συνέπεια λεκτικά ειπωμένο, μία μη διασπώμενη τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι παραγωγική, όταν δύναται να παράγει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή έστω

³⁶ Ο όρος της διασπασιμότητας δεν πρέπει να συγχέεται με αυτόν της διαχωρισιμότητας, καθώς είναι απολύτως δυνατόν μία μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής να είναι διαχωρίσιμη

³⁷ Μια τεχνική απλής παραγωγής είναι τετράγωνη αν η μήτρα των τεχνικών συντελεστών είναι τετράγωνη (ή στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής η μήτρα $(B + A)$). Με άλλα λόγια όταν υπάρχουν μη τετράγωνες (ορθογώνιες) τεχνικές παραγωγής τότε είναι δυνατόν ο αριθμός των διαδικασιών παραγωγής που λειτουργούν να είναι μικρότερος από αυτόν των παραγόμενων εμπορευμάτων.

ημιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο αυστηρά θετικό ακαθάριστο προϊόν³⁸. Οι τεχνικές αυτές σύνθετης παραγωγής καλούνται και all-productive³⁹.

Ομοίως με την περίπτωση της απλής παραγωγής για την βιωσιμότητα ή μη ενός μη διασπώμενου συστήματος σύνθετης παραγωγής, μπορούμε να πούμε ότι ένα μη διασπώμενο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί την τεχνική $[B, A, \ell]$ είναι βιώσιμο, όταν δύναται να παράγει ένα οποιοδήποτε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο αυστηρά θετικό καθαρό προϊόν.

Όσο αφορά το πότε μια μη διασπώμενη τεχνική σύνθετης παραγωγής, μπορούμε να πούμε ότι είναι προσοδοφόρα όταν δύναται να παράξει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή ημιθετικό υπερπροϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ακαθάριστο προϊόν. Με άλλα λόγια και καθ' αντιστοιχία με την αντίστοιχη περίπτωση της απλής παραγωγής ισχύει:

$$U = Bx - Ax - d\ell x \quad (19)$$

Επιλύοντας την (19) ως προς X , προκύπτει :

$$X = B(B - \bar{A})^{-1}, X \equiv Bx, \bar{A} \equiv A + d\ell \quad (20)$$

1.2.3.2 Διασπώμενες τεχνικές σύνθετης παραγωγής

Μια τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι διασπώμενη όταν η μήτρα $(B + A)$ είναι διασπώμενη. Κατά συνέπεια για το ακαθάριστο προϊόν μιας μη διασπώμενης τεχνικής σύνθετης παραγωγής, ισχύει:

$$Bx = Ax + Y \quad (21)$$

³⁸ Είναι φανερό, ότι η συνθήκη για το παραγωγικό μιας μη διασπώμενης τεχνικής σύνθετης παραγωγής, μοιάζει αρκετά με την αντίστοιχη της απλής παραγωγής, καθώς την θέση της αντίστροφης του Leontief $[I - A]^{-1}$ παίρνει η $[B - A]^{-1}$. Στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής ωστόσο δεν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες- εν προκειμένω η ύπαρξη μιας μέγιστης ιδιοτιμής της μήτρας A , μικρότερη από την μονάδα- για την θετικότητα και την ύπαρξη της αντίστροφης μήτρας $[B - A]^{-1}$.

³⁹ Βλ. Γ.Σταμάτης (1996) σελ.157

Εργαζόμενοι κατ' ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση της απλής παραγωγής μια τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι παραγωγική, όταν για αυτήν ισχύει:

$$x = (B - A)^{-1}Y \quad (22), \quad \text{πολλαπλασιάζοντας από}$$

αριστερά την (22) με την μήτρα B , προκύπτει:

$$Bx = B(B - A)^{-1}Y \Leftrightarrow X \equiv Bx$$

$$X = B(B - A)^{-1}Y \quad (23)$$

Κατά συνέπεια λεκτικά ειπωμένο, μία μη διασπώμενη τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι παραγωγική, όταν δύναται να παράγει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή έστω ημιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν⁴⁰. Σε μαθηματικούς όρους αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής παραγωγική πρέπει η μήτρα $[B - A]^{-1} \geq 0$.

Ομοίως με την περίπτωση της απλής παραγωγής για την βιωσιμότητα ή μη ενός μη διασπώμενου συστήματος σύνθετης παραγωγής, μπορούμε να πούμε ότι ένα μη διασπώμενο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί την τεχνική $[B, A, \ell]$ είναι βιώσιμο, όταν δύναται να παράγει ένα οποιοδήποτε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή έστω ημιθετικό καθαρό προϊόν.

Μια μη διασπώμενη τεχνική σύνθετης παραγωγής είναι μη προσοδοφόρα όταν δύναται να παράξει κάθε εξωγενώς δεδομένο θετικό ή ημιθετικό υπερπροϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ή έστω ημιθετικό ακαθάριστο προϊόν. Με άλλα λόγια και καθ' αντιστοιχία με την αντίστοιχη περίπτωση της απλής παραγωγής ισχύει:

$$U = Bx - Ax - d\ell x \quad (24)$$

⁴⁰ Είναι φανερό, ότι η συνθήκη για το παραγωγικό μιας μη διασπώμενης τεχνικής σύνθετης παραγωγής, μοιάζει αρκετά με την αντίστοιχη της απλής παραγωγής, καθώς την θέση της αντίστροφης του Leontief $[I - A]^{-1}$ παίρνει η $[B - A]^{-1}$. Στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής ωστόσο δεν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες- εν προκειμένω η ύπαρξη μιας μέγιστης ιδιοτιμής της μήτρας A , μικρότερη από την μονάδα- για την θετικότητα και την ύπαρξη της αντίστροφης μήτρας $[B - A]^{-1}$.

Επιλύοντας την (4) ως προς X , προκύπτει :

$$X = B(B - \bar{A})^{-1}U, X \equiv Bx, \bar{A} \equiv A + d\ell \quad (25)$$

Σε μαθηματικούς όρους αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής προσοδοφόρα πρέπει η μήτρα $[B - \bar{A}]^{-1} \geq 0$.

Ωστόσο μία τεχνική σύνθετης παραγωγής μπορεί να είναι απλά διασπώμενη ή πολλαπλώς διασπώμενη. Απλά διασπώμενη είναι όταν διασπάται μία φορά σε δύο υποσυστήματα. Αντίθετα πολλαπλά διασπώμενη είναι μια τεχνική όταν μπορεί να διασπάται τουλάχιστον δύο φορές και τουλάχιστον σε τρία υποσυστήματα.

2 Ο ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξεταστεί πως προσδιορίζονται οι τιμές παραγωγής για δεδομένο ποσοστό κέρδους ή δεδομένο πραγματικό ωρομίσθιο, με την χρήση γραμμικών συστημάτων-τεχνικών παραγωγής.

2.1 Προϋποθέσεις

Έστω το σύστημα παραγωγής $[A, \ell, X]$, που χρησιμοποιεί την τεχνική $[A, \ell]$, όπου A^{41} η $n \times n$ μήτρα των εισροών σε μέσα παραγωγής ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος, ℓ το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος και X το $n \times 1$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος.

Για το προαναφερθέν σύστημα θα προσπαθήσουμε στα ακόλουθα να προσδιορίσουμε τις τιμές που συνεπάγεται. Για λόγους απλούστευσης προϋποθέτουμε τα ακόλουθα⁴²:

1. το υπό εξέτασιν σύστημα είναι ένα σύστημα απλής παραγωγής. Δηλαδή από κάθε μια διαδικασία παράγεται ένα διαφορετικό και μόνο απλό εμπόρευμα. Με άλλα λόγια δεν παράγεται κανένα σύνθετο εμπόρευμα, δηλαδή ένα εμπόρευμα το οποίο περιέχει περισσότερα του ενός εμπορεύματα.
2. Το υπό εξέτασιν σύστημα είναι γραμμικό και ως εκ τούτου παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας.
3. Υποθέτουμε, σε συνδυασμό με την πρώτη προϋπόθεση ότι ο αριθμός των διαδικασιών παραγωγής είναι ο ίδιος με αυτόν των εμπορευμάτων⁴³

⁴¹ Για την μήτρα A υποθέτουμε ότι καμία γραμμή και καμία στήλη της, δεν είναι γραμμικός συνδυασμός κάποιας άλλης, και συνεπώς $r(A)=n$. Με άλλα λόγια η A είναι μια μη ιδιάζουσα, θετική ή έστω ημιθετική, μήτρα για την οποία ως γνωστόν ισχύει $\det(A) \neq 0$.

⁴² Βλ. Γ. Σταμάτη (1995), σελ. 122, Π. Βουγιουκλάκη (1995) σελ. 18. Για τον αναγνώστη που επιθυμεί να εξετάσει περεταίρω το ζήτημα του προσδιορισμού των τιμών παραγωγής βλ. Abraham Frois/Berrebi (1979), Schefold B. (1976), (1985) καθώς και Kurz-Salvadori (1995) και Passinetti (1991)

4. Τα χρησιμοποιούμενα εμπορεύματα φθείρονται εξ' ολοκλήρου κατά την διάρκεια της περιόδου παραγωγής.
5. Η περίοδος παραγωγής είναι ταυτή για όλα τα εμπορεύματα.
6. Το εν λόγω σύστημα χρησιμοποιεί ως εισροές μόνο εμπορεύματα, τα οποία παράγει το ίδιο.
7. Για την παραγωγή κάθε εμπορεύματος χρησιμοποιείται στην διαδικασία παραγωγής του άμεσα ή έμμεσα μια ποσότητα ζωντανής εργασίας. Με άλλα λόγια καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι πλήρως αυτοματοποιημένη.
8. Για κάθε εμπόρευμα, συμπεριλαμβανομένου και της εργασιακής δύναμης-ζωντανής εργασίας, υπάρχει μία και μόνο ενιαία τιμή.
9. Επιπλέον το ποσοστό κέρδους είναι ενιαίο και ταυτό για όλα τα παραγόμενα εμπορεύματα.
10. Υποθέτουμε, ότι η εν λόγω τεχνική είναι παραγωγική. Ως γνωστό για να συμβαίνει αυτό πρέπει $[I-A]^{-1} \geq 0$, με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_{\max} < 1$ ⁴⁴.
11. Οι μισθοί πληρώνονται στο τέλος της περιόδου, σε αντίθεση με ότι ισχύει στον Marx.

Δεδομένου των παραπάνω θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- A. Το εν λόγω σύστημα χρησιμοποιεί μια μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής
- B. Χρησιμοποιεί μια διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής

2.2 Η περίπτωση της μη διασπώμενης τεχνικής απλής παραγωγής

Έστω ότι η μήτρα A είναι της μορφής, $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, επομένως $A > 0$.

⁴³ Με άλλα λόγια δεν υπάρχει δυνατότητα υποκατάστασης διαδικασιών και συνεπώς ζήτημα επιλογής τεχνικής.

⁴⁴ Για τις συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν το παραγωγικόν μιας τεχνικής, βλ. Γ.Σταμάτης (1994) σελ18-24, και 45-58 και παρούσα διατριβή §1.3

Βάσει των παραπάνω ο προσδιορισμός των τιμών παραγωγής γίνεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$p = pA(1+r) + w\ell \quad (1)$$

Το σύστημα αυτό αποτελείται από n εξισώσεις και από $n+2$ αγνώστους. Χαρακτηρίζεται κατά συνέπεια από δυο βαθμούς ελευθερίας. Για να εξαλειφθούν οι τελευταίοι γίνονται τα παρακάτω βήματα:

- Εισάγεται εξωγενώς μια εκ των μεταβλητών της κατανομής του εισοδήματος, μια δηλαδή εκ των w και r
- Εισάγεται μια εξίσωση τυποποίησης ή εξετάζονται οι σχετικές τιμές παραγωγής των εμπορευμάτων⁴⁵.

2.2.1.1 Εισάγεται εξωγενώς το ποσοστό κέρδους

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον προσδιορισμό των τιμών για τις εξής περιπτώσεις:

Για την περίπτωση που το ποσοστό κέρδους r , είναι

- Μέσα στο οικονομικά σημαντικό διάστημα των τιμών του ποσοστού κέρδους, $0 \leq r < R$
- Ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους $r=R$
- Ίσο με το μηδέν, $r=0$
- Και εκτός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος των τιμών του ποσοστού κέρδους $R < r$

2.2.1.2 Το ποσοστό κέρδους είναι μεταξύ $0 \leq r < R$

Έστω η σχέση (1)

$$p = pA(1+r) + w\ell$$

⁴⁵ Στην περίπτωση της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης, οι εξισώσεις του συστήματος είναι $n+1$ και οι άγνωστοι $n+1$. Ενώ στην περίπτωση των σχετικών τιμών, οι εξισώσεις είναι n και οι άγνωστοι μειώνονται σε n . Ως εκ τούτου και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα (1) έχει λύση.

, η οποία συνεπάγεται την ακόλουθη λύση⁴⁶:

$$p = w[I - A(1+r)]^{-1} \quad (2)$$

Από την (2) μπορούμε να εξάγουμε τις εξής περιπτώσεις για το p (εξετάζοντας μόνο τις οικονομικά σημαντικές λύσεις):

- Αν το w είναι θετικό, τότε και το διάνυσμα των τιμών παραγωγής είναι θετικό
- Αν το w είναι ίσο με το 0 τότε το διάνυσμα των τιμών παραγωγής, είναι και αυτό θετικό.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημα (1) αποτελείται από n εξισώσεις και $n+1$ αγνώστους⁴⁷. Σε κάθε ύψος του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το επαυξημένο κατά το ονομαστικό ωρομίσθιο διάνυσμα, των τιμών παραγωγής των n εμπορευμάτων $(p, w)^{48}$, το οποίο είναι:

- Είτε μονοσήμαντα προσδιορισμένο εξαιρέσει ενός βαθμωτού και θετικό, δηλαδή $(p, w) > 0$. Στην περίπτωση της μη τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου το w , $0 < w \leq w_{\max}$
- Είτε μηδενικό, δηλαδή $(p, w) = 0$, στην περίπτωση της τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου $w = 0$.

2.2.1.3 Το ποσοστό κέρδους είναι μεταξύ $r=R$

Στην περίπτωση που το $r=R$ τότε το $w=0$. Τότε η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$p = pA(1+R) \quad (3)$$

⁴⁶ Γνωρίζουμε ότι στο οικονομικά σημαντικό διάστημα τιμών του r , $0 \leq r \leq R$, η $[I - A(1+r)]$ είναι μια μη διασπώμενη μη ιδιάζουσα M -μήτρα, και από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη μιας μη διασπώμενης μη ιδιάζουσας M -μήτρας είναι θετική. Ως εκ τούτου: $[I - A(1+r)]^{-1} > 0$

Βλ. Π. Βουγιουκλάκη (1995) σελ 22-33

⁴⁷ Τις n τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και το ονομαστικό ωρομίσθιο w

⁴⁸ Συνεπώς είναι διαστάσεων $(n+1) \times 1$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση συνεπάγεται:

$$\frac{1}{1+R} p = pA \quad (4)$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τετριμμένης λύσης ($p=0$) έχουμε και άλλες n λύσεις που αντιστοιχούν σε n τιμές του R εκ των οποίων μόνο η μικρότερη από τις τιμές του R είναι η οικονομικά σημαντική⁴⁹.

Ακολουθεί η απόδειξη:

Από την σχέση (3) συνεπάγεται:

$$p\left[\frac{1}{1+R} I - A\right] = 0 \quad (5)$$

Υποθέτουμε ότι $p > 0$ και $p \neq 0$ ⁵⁰. Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι το p είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A . Επομένως το $\frac{1}{1+R} = \lambda^A \Leftrightarrow$

$$R = \frac{1 - \lambda^A}{\lambda^A} \quad (6)$$

Είναι φανερό, ότι μπορούν να υπάρξουν τόσες λύσεις για το R όσες και οι ιδιοτιμές της μήτρας A . Από τα θεωρήματα των Perron-Frobenius⁵¹, γνωρίζουμε, ότι σε μία μόνο από τις ιδιοτιμές μιας μήτρας, έστω της A , αντιστοιχεί ένα αυστηρά θετικό η έστω ημιθετικό διάνυσμα τιμών παραγωγής, στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A . Όμως η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A , όπως φαίνεται από την σχέση (a), συνεπάγεται ότι, για $\lambda_{\max}^A$ ισχύει: $\lambda^A = \lambda_{\max}^A \Rightarrow R^* = \min[R_1, R_2, R_3, \dots, R_n], R: p(R^*) \geq 0$

Από την (3) μπορούμε να εξάγουμε τις εξής περιπτώσεις για το p (εξετάζοντας μόνο τις οικονομικά σημαντικές λύσεις):

- Αν το p είναι θετικό, και κατά συνέπεια μιλάμε για μη μετρημένη λύση
- Αν το w είναι ίσο με το 0 τότε το διάνυσμα των τιμών παραγωγής, είναι και αυτό θετικό.

⁴⁹ Για την απόδειξη Βλ. Θ. Μαριόλης/Π. Βουγιουκλάκης (1991) σελ. 70-74

⁵⁰ Με τον τρόπο αυτό περιοριζόμαστε σε μη τετριμμένες λύσεις.

⁵¹ Επίσης L. Passinetti (1991) σελ 287

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημα (3) αποτελείται από n εξισώσεις και n αγνώστους⁵². Για την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το διάνυσμα των τιμών παραγωγής των n εμπορευμάτων (p)⁵³, το οποίο είναι:

- Είτε μονοσήμαντα προσδιορισμένο εξαιρέσει ενός βαθμωτού και θετικό, δηλαδή $p > 0$, την περίπτωση της μη τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου το $[\frac{1}{1+R} I - A] = 0$
- Είτε μηδενικό, δηλαδή $p=0$, στην περίπτωση της τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου $p=0$.

2.2.1.4 Το ποσοστό κέρδους είναι $r=0$

Στην περίπτωση που το $r=R$ τότε το $w=0$. Τότε η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$p = pA + w\ell \quad (7)$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση συνεπάγεται:

$$p[I - A] = w\ell \Rightarrow p = w\ell[I - A]^{-1} \quad (8)$$

Όμως το γινόμενο $\ell[I - A]^{-1} \equiv \omega$ (β), ταυτίζεται δηλαδή με τις εργασιακές αξίες των παραγόμενων εμπορευμάτων, όπου ω το $1 \times n$ διάνυσμα των εργασιακών αξιών⁵⁴.

Επομένως η σχέση (32) λόγω της (β) γίνεται:

$$p = w\omega \quad (9)$$

Η σχέση (9) αποτελείται από n εξισώσεις, που περιέχουν $n+1$ αγνώστους. Κατά την γνωστή τακτική παίρνουμε είτε σχετικές τιμές ή εισάγουμε εξωγενώς την τιμή ενός εμπορεύματος είτε εισάγουμε μια εξίσωση τυποποίησης.

⁵² Τις n τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων. Για την λύση του ομογενούς συστήματος (3) απαιτείται η εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης ή ο εξωγενής ορισμός της τιμής ενός εμπορεύματος.

⁵³ Συνεπώς είναι διαστάσεων $n \times 1$

⁵⁴ Βλ. Γ. Σταμάτη (1999) σελ.97

Βλέπουμε ότι εκτός της τετριμμένης λύσης p έχουμε και μια μη τετριμμένη λύση, που αντιστοιχεί σε μια τιμή $w > 0$ για το ονομαστικό ωρομίσθιο, που με την σειρά της συνεπάγεται ένα αυστηρά θετικό διάνυσμα των τιμών παραγωγής, αφού τόσο το w όσο και το ω είναι θετικά μεγέθη. Πιο αναλυτικά:

- Στην περίπτωση, που το $w=0$ τότε είναι και το $p=0$, δηλαδή αναφερόμαστε στην τετριμμένη λύση
- Στην περίπτωση, όπου $w > 0$ και εφόσον $\ell[I-A]^{-1} > 0$ τότε το p είναι ένα μονοσήμαντα προσδιορισμένο και θετικό διάνυσμα. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές είναι ανάλογες των αξιών. Το τελευταίο μάλιστα βρίσκεται σε συμφωνία με το Marx⁵⁵.
- Στην περίπτωση όπου το $w=1$ μιλάμε για labor commanded prices. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές παραγωγής ταυτίζονται με τις εργασιακές αξίες. Το τελευταίο μάλιστα βρίσκεται σε συμφωνία με τους νεοκλασικούς, σύμφωνα με τους οποίους οι τιμές των εμπορευμάτων ταυτίζονται με τις αξίες τους.

2.2.2 Εισάγεται εξωγενώς το ονομαστικό ωρομίσθιο

Ως γνωστόν το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ένα θετικό βαθμωτό και ίσο με $w=pd$, όπου p το ημιθετικό $(n \times 1)$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής και d το $(n \times 1)$ διάνυσμα των εμπορευμάτων από τα οποία αποτελείται το πραγματικό ημερομίσθιο. Παρακάτω διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

2.2.2.1 Τυποποίηση με $d=[d_b, 0]^T$

Αν οι τιμές παραγωγής τυποποιηθούν ως άνω, τότε:

για το υποσύστημα I ισχύει:

$$p_I = (p_I A_{11} + p_{II} A_{21})(1+r) + p_I d_I \ell_I \Rightarrow$$

$$p_I = p_I [A_{11}(1+r) + p_I d_I \ell_I] + p_{II} A_{21}(1+r) \Rightarrow$$

⁵⁵ Βλ. Γ.Σταμάτης (1997) σελ 73-78

$$p_I[I - C_I] = p_{II}A_{21}(1+r), C_I = A_{11}(1+r) + d_I\ell_I$$

$$p_I = p_{II}A_{21}(1+r)[I - C_I]^{-1} \quad (10)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι $p_I > 0$, πρέπει $p_{II} > 0$ και $[I - C_I] > 0$, με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_{\max}^{C_I} < 1$

Για το υποσύστημα II ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + p_I d_I \ell_{II} \Rightarrow$$

$$p_{II}[I - C_{II}] = p_I[A_{12}(1+r) + d_I \ell_{II}] \quad (11), C_{II} = A_{22}(1+r)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι $p_{II} > 0$, πρέπει $p_I > 0$ και $[I - C_{II}] > 0$, με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_{\max}^{C_{II}} < 1$.

2.2.2.2 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι μέγιστο

Στην περίπτωση αυτή το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με 0. Επομένως για το υποσύστημα I ισχύει:

$$p_I[I - \bar{A}_{11}] = p_{II}A_{21}, \bar{A}_{11} = A_{11} + d_I\ell_I \quad (12)$$

Για να είναι $p_I > 0$, πρέπει $p_{II} > 0$ και $[I - \bar{A}_{11}] > 0$, με άλλα λόγια πρέπει

$$\lambda_m^{\bar{A}} < 1 \quad (13)$$

Κατά συνέπεια για το υποσύστημα II ισχύει:

$$p_{II} = p_I[A_{12} + p_I d_I \ell_{II}][I - A_{22}]^{-1} \quad (14)$$

Για να είναι $p_{II} > 0$, πρέπει $p_I > 0$ αλλά και $[I - A_{22}]^{-1} > 0$, δηλαδή πρέπει

$$\lambda_{\max}^{A_{22}} < 1 \quad (15)$$

Στην περίπτωση που περιγράφεται παραπάνω για να προσδιοριστούν απόλυτες τιμές απαιτείται η εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης, ή αρκούμαστε στον υπολογισμό σχετικών τιμών.

2.2.2.3 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι ίσο με 0

Στην περίπτωση που το $r=R$ τότε το $pd=0$. Τότε η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$p = pA(1+R) \quad (16)$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση συνεπάγεται:

$$\frac{1}{1+R} p = pA$$

$$p[\frac{1}{1+R} I - A] = 0 \quad (17)$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τετριμμένης λύσης ($p=0$) έχουμε και άλλες n λύσεις που αντιστοιχούν σε n τιμές του R εκ των οποίων, μόνο η μικρότερη από αυτές, είναι η οικονομικά σημαντική.

Είναι φανερό, ότι μπορούν να υπάρξουν τόσες λύσεις για το R όσες και οι ιδιοτιμές της μήτρας A . Από τα θεωρήματα Perron-Frobenius, γνωρίζουμε, ότι σε μία μόνο από την ιδιοτιμές μιας μη ιδιάζουσας μήτρας, έστω της A , αντιστοιχεί ένα αυστηρά θετικό η έστω ημιθετικό διάνυσμα τιμών παραγωγής, αυτό που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A . Όμως η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A , όπως φαίνεται από την σχέση (a), συνεπάγεται ότι, για $\lambda_{\max}^A$ ισχύει:

$$\lambda^A = \lambda_{\max}^A \Rightarrow R^* = \min[R_1, R_2, R_3, \dots, R_n], R: p(R^*) \geq 0$$

Μπορούμε να εξάγουμε τις εξής περιπτώσεις για το p (εξετάζοντας μόνο τις οικονομικά σημαντικές λύσεις):

Αν το p είναι θετικό, και κατά συνέπεια μιλάμε για μη μετρημένη λύση

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημα (3) αποτελείται από n εξισώσεις και n αγνώστους⁵⁶. Για την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το διάνυσμα των τιμών παραγωγής των n εμπορευμάτων (p)⁵⁷, το οποίο είναι:

- Είτε μονοσήμαντα προσδιορισμένο εξαιρέσει ενός βαθμωτού και θετικό, δηλαδή $p > 0$, την περίπτωση της μη τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου το $[\frac{1}{1+R} I - A] = 0$
- Είτε μηδενικό, δηλαδή $p=0$, στην περίπτωση της τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου $p=0$.

2.2.2.4 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι μεταξύ $0 < d < d_{max}$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει για το υποσύστημα I:

$$p_I = (p_I A_{11} + p_{II} A_{21})(1+r) + p_I d_I \ell_I \Rightarrow$$

$$p_I = p_I [A_{11}(1+r) + p_I d_I \ell_I] + p_{II} A_{21}(1+r) \Rightarrow$$

$$p_I [I - C_I] = p_{II} A_{21}(1+r), C_I = A_{11}(1+r) + d_I \ell_I$$

$$p_I = p_{II} A_{21}(1+r)[I - C_I]^{-1} \quad (18)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι $p_I > 0$, πρέπει $p_{II} > 0$ και $[I - C_I] > 0$, με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_{\max}^{C_I} < 1$

Για το υποσύστημα II ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + p_I d_{II} \ell_{II} \Rightarrow$$

$$p_{II} [I - C_{II}] = p_I [A_{12}(1+r) + p_I d_{II} \ell_{II}] \quad (19), C_{II} = A_{22}(1+r)$$

⁵⁶ Τις n τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων. Για την λύση του ομογενούς συστήματος (3) απαιτείται η εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίηση ή ο εξωγενής ορισμός της τιμής ενός εμπορεύματος.

⁵⁷ Συνεπώς είναι διαστάσεων $n \times 1$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι $p_{II} > 0$, πρέπει $p_I > 0$ και $[I - C_{II}] > 0$, με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_{\max}^{C_{II}} < 1$.

Και σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $n+1$ αγνώστους, που προσδιορίζονται μέσω n εξισώσεων. Ο βαθμός ελευθερίας, που προκύπτει, εξαλείφεται, είτε με τον προσδιορισμό σχετικών τιμών, είτε με την εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης και κατά συνέπεια υπολογίζονται απόλυτες τιμές παραγωγής.

2.2.3 Τυποποίηση με A.2.2. $d=[dI, dII]T$

Για το υπό εξέταση σύστημα τιμών ισχύει:

$$p = pA(1+r) + pd\ell \quad (26)$$

$p[I - \bar{A}] = pAr$, $\bar{A} \equiv A + d\ell$, όπου $\bar{A}$ η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα επαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών

$$p = pA[I - \bar{A}]^{-1}r \Rightarrow$$

$$p[I - Cr] = 0, C \equiv A[I - \bar{A}]^{-1} \quad (27)$$

2.2.3.1 Τιμές παραγωγής για $r=R$ και $d=0$

$$p = pA(1+R)$$

Στην περίπτωση αυτή, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε $n+1$ αγνώστους μέσω n εξισώσεων. Ο βαθμός αυτός ελευθερίας απαλείφεται με τον προσδιορισμό σχετικών τιμών, η με τον προσδιορισμό απόλυτων τιμών μέσω της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης.

Από την παραπάνω σχέση και σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, ισχύει για το R και κατ' επέκταση για το p , ότι προκύπτουν n λύσεις για το εκ των οποίων μια μόνο

είναι η οικονομικά σημαντική, αυτή που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της $\bar{A}$,

$$\text{δηλαδή } \lambda_{\max}^{\bar{A}} = \frac{1}{1+R} \Leftrightarrow R = \frac{1-\lambda_{\max}^{\bar{A}}}{\lambda_{\max}^{\bar{A}}}$$

A.2.2.β. Τιμές παραγωγής για $d=d_{\max}$

$$p = p\bar{A} \quad (28)$$

Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να προσδιορίσουμε n αγνώστους μέσω n εξισώσεων.

Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$p[I - \bar{A}] = 0 \quad (29)$$

Εκτός της τετριμμένης λύσης $p=0$ υπάρχει και μια λύση για την οποία $\det[I - \bar{A}] = 0$, εφόσον βέβαια $\text{rank}[I - \bar{A}] = n-1$. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται οι τιμές και προκύπτει μια όμοια κατάσταση με την περίπτωση όπου σε μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής τίθεται εξωγενώς το ποσοστό κέρδους ίσο με το μηδέν.

2.2.3.2 Τιμές παραγωγής για $0 < d < d_{\max}$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$p[I - Cr] = 0 \quad (30)$$

Για μια ακόμα φορά, μέσω n εξισώσεων προσδιορίζονται $n+1$ άγνωστοι. Αυτό καθίσταται δυνατό, με τον υπολογισμό είτε σχετικών τιμών, είτε απόλυτων με την εισαγωγή μίας εξίσωσης τυποποίησης. Από την παραπάνω σχέση, είναι φανερό ότι για το p πλην της τετριμμένης λύσης $p=0$, προκύπτουν άλλες n λύσεις για το r εκ των οποίων μια είναι η οικονομικά σημαντική, αυτή που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας C . Με άλλα λόγια

$$\lambda_{\max}^C = \frac{1}{r} \quad (31)$$

2.3 Η περίπτωση της διασπώμενης τεχνικής απλής παραγωγής⁵⁸

Έστω ότι η μήτρα A είναι της μορφής: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, όπου A_{11} η $k \times k$ μήτρα των εισροών σε βασικά εμπορεύματα⁵⁹, που εισέρχονται άμεσα και έμμεσα στην παραγωγή βασικών εμπορευμάτων, A_{12} η $k \times (n-k)$ μήτρα των εισροών σε βασικά εμπορεύματα, τα οποία εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων, και τέλος η A_{22} η $(n-k) \times (n-k)$ μήτρα των εισροών σε μη βασικά εμπορεύματα, τα οποία εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων. Επιπλέον το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία $\ell, \ell = [\ell_I, \ell_{II}]$, όπου ℓ_I το $1 \times k$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία, στο βασικό υποσύστημα και ℓ_{II} το $1 \times (n-k)$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία, στο μη βασικό υποσύστημα. Κατά συνέπεια το σύστημα $[\ell, A, x]$ χωρίζεται σε δυο υποσυστήματα:

- Στο $\begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \ell_I, x_I$ το οποίο παράγει βασικά εμπορεύματα τα οποία εισέρχονται στην παραγωγή βασικών εμπορευμάτων, το οποίο καλείται βασικό υποσύστημα, και:
- Στο $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}, \ell_{II}, x_{II}$ το οποίο παράγει βασικά και μη βασικά εμπορεύματα, τα οποία εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων, και καλείται μη βασικό υποσύστημα.

Τέλος R_I και R_{II} τα μέγιστα ποσοστά κέρδους στο βασικό και μη βασικό υποσύστημα αντίστοιχα⁶⁰.

⁵⁸ Βλ. . Γ. Σταμάτη (1995) σελ 45

⁵⁹ Φυσικά $k < n$

⁶⁰ Η ύπαρξη διαφορετικών μέγιστων ποσοστών κέρδους στο βασικό και μη βασικό υποσύστημα, έχει μια ιδιαίτερη σημασία ως προς τον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής.

2.3.1 Οι τιμές παραγωγής για εξωγενώς δεδομένο ποσοστό κέρδους

Βάσει των παραπάνω για τις τιμές παραγωγής του βασικού και μη βασικού υποσυστήματος συνεπάγεται:

Για το βασικό υποσύστημα (I):

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + w\ell_I \quad (32)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + w\ell_{II} \quad (33)$$

Από την (26) συνεπάγεται:

$$p_I = w\ell_I [I - A_{11}(1+r)]^{-1} \quad (34)$$

Για να έχει λύση η (28) πρέπει η $[I - A_{11}(1+r)]^{-1} > 0$

Από την (27) αντίστοιχα συνεπάγεται: $p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + w\ell_{II}$ $[I - A_{22}(1+r)]^{-1}$ Για να έχει λύση η (27) πρέπει η $[I - A_{22}(1+r)]^{-1} > 0$.

2.3.1.1 Οι τιμές παραγωγής για $r=0$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11} + w\ell_I \quad (35)$$

$$p_I = w\ell_I [I - A_{11}]^{-1}$$

$$p_I = w\omega_1, \omega_1 \equiv \ell_I [I - A_{11}]^{-1} \quad (36)$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα των τιμών παραγωγής του βασικού υποσυστήματος είναι γραμμικώς εξαρτημένο με το διάνυσμα των εργασιακών αξιών

του βασικού υποσυστήματος. Με άλλα λόγια στην περίπτωση αυτή οι τιμές είναι ανάλογες των αξιών.

Για τις τιμές παραγωγής του μη βασικού υποσυστήματος ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + w \ell_{II}] [I - A_{22}]^{-1} \quad (37)$$

Για να είναι το p_{II} θετικό, πρέπει $p_I > 0$ και $[I - A_{22}]^{-1} > 0$, με άλλα λόγια πρέπει

$$\lambda_{\max}^{A_{22}} < 1 \quad (38).$$

2.3.1.2 Οι τιμές παραγωγής για $r=R_I=R_{II}$

Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των μη παραγόμενων από το υπό εξέταση υποσύστημα εμπορευμάτων τίθενται ίσες με μηδέν⁶¹. Επομένως

$$p_I = p_I A_{11}(1+R) \Leftrightarrow p_I [I - A_{11}(1+R)] = 0 \quad (39)$$

$$p_{II} = p_{II} A_{22}(1+R) \Leftrightarrow$$

$$p_{II} [I - A_{22}(1+R)] = 0 \quad (40)$$

Στην περίπτωση αυτή πλην της τετριμμένης περίπτωσης είναι για

$$R_I = \frac{1 - \lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}} = R_{II} \Leftrightarrow \lambda_m^{A_{11}} = \lambda_m^{A_{22}} = (1 + R_I) = (1 + R_{II}). \text{ Με άλλα λόγια}$$

$$\exists R_I = R_{II} = R = \min[R_1, R_2, \dots, R_n]: p(R) > 0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτουν η δυνατές λύσεις, από τις οποίες μία μόνο είναι σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius⁶², η οποία συνεπάγεται θετικές ή έστω ημιθετικές τιμές παραγωγής.

⁶¹ Βλ. Γ.Σταμάτης (1995) σελ. 215

⁶² Βλ. Επίσης L. Passinetti, (1991) σελ 287

Και σε αυτή την περίπτωση λόγω του βαθμού ελευθερίας που προκύπτει, είμαστε υποχρεωμένοι, είτε να προσδιορίσουμε σχετικές τιμές, είτε μέσω της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης να προσδιορίσουμε απόλυτες τιμές.

2.3.1.3 Οι τιμές παραγωγής για $R \geq R_I > R_{II}$

Στην περίπτωση αυτή για τις τιμές παραγωγής του βασικού υποσυστήματος ισχύει

$$p_I = p_I A_{11}(1+R_I) \Leftrightarrow p_I [I - A_{11}(1+R_I)] = 0 \quad (41)$$

Το σύστημα (10) δύναται να έχει δύο λύσεις την τετριμμένη και την μη τετριμμένη. Αναλυτικότερα, είναι δυνατόν:

- Να υπάρχει η τετριμμένη λύση δηλαδή $p_I = 0$
- Και η μη τετριμμένη που δίδεται από την λύση της :

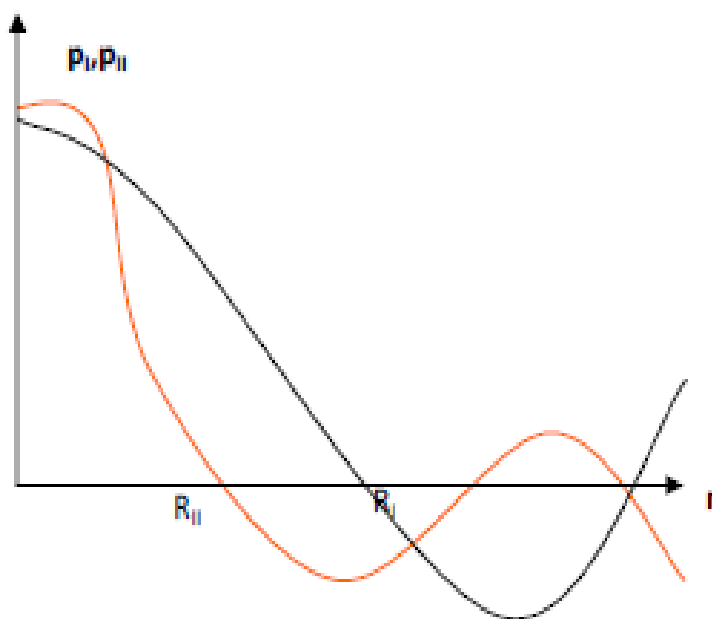
$$\det[I - A_{11}(1+R_I)] = 0 \quad (42)$$

Στην περίπτωση αυτή οι σχετικές τιμές είναι θετικές, βάσει πάλι του θεωρήματος του Frobenius, για το R_I που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{11} .

Όμως στην περίπτωση του μη βασικού υποσυστήματος τα πράγματα είναι διαφορετικά, όπως φαίνεται από την σχέση (12)

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+R_{II}) \quad (43)$$

Όμως το $R_{II} < R_I$. Στην περίπτωση αυτή το R_I αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή μικρότερη της $\lambda_m^{A_{22}}$ και ως εκ τούτου το p_{II} δεν μπορεί να είναι θετικό ή έστω ημιθετικό. Η παραπάνω περίπτωση είναι πιο διαφωτιστική αν παρουσιαστεί διαγραμματικά:



Στην περίπτωση αυτή οι αρνητικές τιμές στο μη βασικό υποσύστημα, δεν επηρεάζουν την λειτουργία του βασικού υποσυστήματος, αλλά στην ουσία καθιστούν την λειτουργία του μη βασικού υποσυστήματος οικονομικά επιζήμια. Με άλλα λόγια σύμφωνα και με το Π. Βουγιουκλάκης (1995) το σύστημα είναι ασυμβίβαστο⁶³.

Αν όμως επιλεγεί η τετριμμένη λύση δηλαδή $p_I = 0$ τότε δύναται να ισχύει:

$$p_{II} = [p_{II} A_{22}](1 + R_{II}) \Leftrightarrow$$

$$p_{II}[I - A_{22}(1 + R_{II})] = 0 \quad (44)$$

Όπου η σχέση (13) δύναται να έχει δύο λύσεις μια τετριμμένη και μια μη τετριμμένη. Με άλλα λόγια

Είτε:

⁶³ Μαθηματικά ειπωμένο ισχύει

$rank[[I - A_{22}(1 + R_{II})], p_I A_{11}(1 + R_I)]^T = n > rank[[I - A_{22}(1 + R_{II})] = n - 1$, πράγμα που με άλλα λόγια σημαίνει ότι δεν είναι δυνατή η ύπαρξη ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους ανάμεσα στα δυο υποσυστήματα, για την δεδομένη τεχνική παραγωγής αν $p_I > 0$. Για περισσότερα βλ. Π. Βουγιουκλάκη σελ 22-33 και 42,

- Η τετριμμένη λύση δηλαδή :

$$p_{II} = 0 \quad (45)$$

- Είτε η μη τετριμμένη που δίδεται από την λύση της, αν $p_{II} > 0$

$$\det[I - A_{22}(1 + R_{II})] = 0 \quad (46)$$

Στην περίπτωση αυτή πλην της τετριμμένης περίπτωσης είναι για

$$R_{II} = \frac{1 - \lambda_m^{A_{22}}}{\lambda_m^{A_{22}}} \Leftrightarrow \lambda_m^{A_{22}} = \frac{1}{(1 + R_{II})}. \text{ Με άλλα λόγια}$$

$$\exists R_{II} = \min[R_1, R_2, \dots, R_n]_{II} : p_{II}(R_{II}) > 0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, όπως είναι φανερό, από τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτουν n δυνατές λύσεις, από τις οποίες μία μόνο, είναι, σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius⁶⁴, αυτή που συνεπάγεται θετικές ή έστω ημιθετικές τιμές παραγωγής.

2.3.1.4 Οι τιμές παραγωγής για $R_I < R_{II} < r < +\infty$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11}(1 + R_I) \quad (47)$$

Όμως είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατή η ύπαρξη ενός θετικού ή έστω ημιθετικού διανύσματος τιμών των βασικών εμπορευμάτων για θετική ή μηδενική τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου (για $w \geq 0$). Στην συνέχεια διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- Το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι θετικό

Στην περίπτωση αυτή από την σχέση (41) προκύπτει η :

⁶⁴ Βλ. Επίσης L. Passinetti (1991)σελ.ίδα 287

$$p_I[I_I - A_{11}(1 + R_I)] = 0 \quad (48)$$

Ωστόσο από την σχέση (42) προκύπτει ότι για τιμές του ποσοστού κέρδους μεγαλύτερες από το οικονομικά σημαντικό μέγιστο ποσοστό κέρδους δεν μπορεί να υπάρξει ένα διάνυσμα τιμών παραγωγής βασικών εμπορευμάτων που να μην περιέχει έστω και μια αρνητική συνιστώσα⁶⁵. Με άλλα λόγια το σύστημα προσδιορισμού των τιμών παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο

- Το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με μηδέν

Και σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα τιμών παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων είναι ασυμβίβαστο. Με άλλα λόγια είναι αδύνατη η ύπαρξη ενός διανύσματος τιμών παραγωγής του βασικού υποσυστήματος, το οποίο να είναι θετικό ή έστω ημιθετικό.

Η μοναδική λύση η οποία μπορεί να υπάρξει και σε αυτήν την περίπτωση είναι η τετριμμένη ήτοι:

$$p_I = 0 \quad (49)$$

- Το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με μηδέν και το ποσοστό κέρδους αποτελεί ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{11}

Και σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα τιμών περιγράφεται από την λύση της σχέσης (41) δηλαδή από την σχέση

$$p_I[I_I - A_{11}(1 + R_I)] = 0$$

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε τις δύο λύσεις του συστήματος την τετριμμένη και την μη τετριμμένη

- Η μη τετριμμένη λύση

Πρόκειται για μια κατάσταση όμοια με την παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα δεν μπορεί να υπάρξει ένα θετικό ή έστω ημιθετικό διάνυσμα των τιμών παραγωγής του βασικού υποσυστήματος.

⁶⁵ Είναι μάλιστα ανεξάρτητο από το αν το R αποτελεί ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{11}

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το R_I^* αποτελεί μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{11} , με άλλα λόγια ισχύει:

$$(\lambda_m^{A_{11}})^* = \frac{1}{1+R_I^*} < \lambda_m^{A_{11}} = \frac{1}{1+R_I} \quad (50)$$

Δηλαδή το ποσοστό κέρδους συνδέεται με μια μικρότερη θετική ιδιοτιμή της μήτρας A_{11} από την μέγιστη, πράγμα που με την σειρά του συνεπάγεται ένα μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους από το μέγιστο δυνατό.

- Και η τετριμμένη λύση

$$p_I = 0 \quad (51)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

Από την σχέση (38) προκύπτει η :

$$p_{II} [I - A_{22}(1+r)] = 0$$

Ωστόσο, όπως εξηγήθηκε παραπάνω είναι αδύνατο να υπάρξει ένα θετικό ή ημιθετικό διάνυσμα τιμών για το βασικό υποσύστημα, όταν το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι θετικό ή ίσο με το μηδέν. Η μόνη οικονομικά σημαντική λύση είναι η τετριμμένη, για $w=0$, ή με άλλα λόγια :

$$p_I = 0$$

Και ταυτόχρονα η

$$w = 0$$

Παρακάτω λαμβάνονται οι εξής περιπτώσεις:

- το ποσοστό κέρδους $R_I^{A_{22}}$ αποτελεί ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{22}

Στην περίπτωση αυτή προκύπτει η σχέση:

$$p_{II} [I - A_{22}(1+r)] = 0$$

Και οι λύσεις που προκύπτουν είναι οι :

- Η μη τετριμμένη λύση

Όπως αποδείχθηκε το $R_i^{A_{22}}$ αποτελεί μια ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{11} , με άλλα λόγια ισχύει:

$$(\lambda_m^{A_{22}})^* = \frac{1}{1+R_i^*} < \lambda_m^{A_{22}} = \frac{1}{1+R_i}$$

Δηλαδή το ποσοστό κέρδους συνδέεται με μια μικρότερη θετική ιδιοτιμή της μήτρας A_{11} από την μέγιστη, πράγμα που με την σειρά του συνεπάγεται ένα μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους από το μέγιστο δυνατό. Το τελευταίο συνεπάγεται, ότι είναι αδύνατον να υπάρξει ένα αυστηρά θετικό ή τουλάχιστον ημιθετικό διάνυσμα τιμών παραγωγής για το μη βασικό υποσύστημα.

- Η τετριμμένη λύση

$$p_{II} = 0$$

- Περίπτωση όπου το $R_i^{A_{22}}$ δεν αποτελεί ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{22}

Και στην περίπτωση αυτή η κατάσταση είναι η ίδια με παραπάνω λόγια.

Η μόνη λύση του συστήματος :

$$p_{II}[I - A_{22}(1+r)] = 0$$

Είναι η τετριμμένη ή με άλλα λόγια η

$$p_{II} = 0 \quad (52)$$

2.3.1.5 Οι τιμές παραγωγής για $0 < r < R_I < R_{II}$

Βάσει των παραπάνω για τις τιμές παραγωγής του βασικού και μη βασικού υποσυστήματος συνεπάγεται:

Για το βασικό υποσύστημα (I):

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + w\ell_I$$

$$p_I = w\ell_I [I - A_{11}(1+r)]^{-1} \quad (53)$$

Για να έχει λύση η (1.α) πρέπει η $[I - A_{11}(1+r)]^{-1} > 0$, αφού $\ell_I, w > 0$.

Για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + w\ell_{II}$$

$$p_{II} = [p_I A_{12}(1+r) + w\ell_{II}] [I - A_{22}(1+r)]^{-1} \quad (54)$$

Για να έχει λύση η (2.α) πρέπει η $[I - A_{22}(1+r)]^{-1} > 0$. Με άλλα λόγια

$$\lambda_m^{A_{22}} < \frac{1}{1+r} \quad (55)$$

Στην περίπτωση που περιγράφουμε παραπάνω, μέσω η σχέσεων προσπαθούμε να προσδιορίσουμε $n+2$ αγνώστους. Αυτό καθίσταται δυνατόν με τον εξωγενή προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους και την εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης για τον υπολογισμό των απολύτων τιμών. Είναι πάντοτε δυνατόν βέβαια αντί της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης ο εναπομείναν βαθμός ελευθερίας να εξαλειφτεί με τον υπολογισμό σχετικών τιμών.

2.3.2 Εισάγεται εξωγενώς το ονομαστικό ωρομίσθιο

Ως γνωστόν το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ένα θετικό βαθμωτό και ίσο με $w=pr_d$, όπου p το ημιθετικό $(n \times 1)$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής⁶⁶ και d το $(n \times 1)$ διάνυσμα των εμπορευμάτων από τα οποία αποτελείται το πραγματικό ημερομίσθιο.

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

⁶⁶ Το p είναι ορισμένο σαν $p = [p_I, p_{II}]$, ενώ για το d , $d = \begin{bmatrix} d_I \\ d_{II} \end{bmatrix}$, όπου το παριστά τις εισροές

βασικών (μη βασικών εμπορευμάτων) ως μισθιακά εμπυρεύματα (δηλαδή από εμπορεύματα από τα οποία αποτελείται το πραγματικό ωρομίσθιο)

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + (p_I d_I + p_{II} d_{II}) \ell_I \quad (56)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{11} + p_{II} A_{22}](1+r) + (p_I d_I + p_{II} d_{II}) \ell_{II} \quad (57)$$

Παρακάτω διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

B.2.1. d=[d_I,0]^T

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + p_I d_I \ell_I \quad (58)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{11} + p_{II} A_{22}](1+r) + p_I d_I \ell_{II} \quad (59)$$

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I F = p_I + p_I F d_I \ell_I, F \equiv [A_{11}(1+r)]^{-1}$$

$$p_I [I - F(I - d_I \ell_I)] = 0$$

$$p_I [I - C] = 0, C \equiv F(I - d_I \ell_I) \quad (60)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II}$$

$$p_{II} [I - A_{22}(1+r)] = p_I A_{12}(1+r) + p_I d_I \ell_{II}$$

$$p_{II} [I - A_{22}(1+r)] = p_I [A_{12}(1+r) + d_I \ell_{II}]$$

$$p_{II} = p_I [A_{12}(1+r) + d_I \ell_{II}] [I - A_{22}(1+r)]^{-1} \quad (61)$$

2.3.2.1 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι μέγιστο

Κατά συνέπεια το $r=0$ και το $d = d_{\max} = \frac{Y}{\ell X}$. Έτσι για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I[I - A_{11}^{-1}(I - d_I \ell_I)] = 0$$

$$p_I[I - C] = 0, C \equiv A_{11}^{-1}(I - d_I \ell_I) \quad (62)$$

Στην περίπτωση αυτή για να υπάρχει λύση πλην της τετριμμένης ($p_I = 0$), πρέπει $\det[I - A_{11}^{-1}(I - d_I \ell_I)] = 0$. Για να υπάρξει το τελευταίο πρέπει $\text{rank}(C) = n-1$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να ισχύει $\lambda_m^C = 1$ και κατά συνέπεια για να υπάρξει ένα οικονομικά σημαντικό p , $p \neq 0$ πρέπει

$$\lambda_m^C > \lambda_m^{A_1} > 0 \quad (63)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{11} + p_{II} A_{22} + p_I d_I \ell_{II}$$

$$p_{II} = p_I [A_{11} + d_I \ell_{II}] [I - A_{22}]^{-1} \quad (64)$$

Για να υπάρξει λύση πρέπει $[I - A_{22}]^{-1} > 0$, δηλαδή με άλλα λόγια πρέπει να ισχύει για την $\lambda_m^{A_{22}}$,

$$0 < \lambda_m^{A_{22}} < 1 \quad (65)$$

2.3.2.2 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι ίσο με 0

Στην περίπτωση που το $r=R$ τότε το $pd=0$. Τότε η σχέση (1) παίρνει την μορφή:

$$p = pA(1+R) \quad (66)^{67}$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση συνεπάγεται:

$$\frac{1}{1+R} p = pA$$

$$p\left[\frac{1}{1+R} I - A\right] = 0 \quad (67)$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τετριμμένης λύσης ($p=0$) έχουμε και άλλες n λύσεις που αντιστοιχούν σε n τιμές του R εκ των οποίων μόνο η μικρότερη από τις τιμές του R είναι η οικονομικά σημαντική.

Είναι φανερό, ότι μπορούν να υπάρξουν τόσες λύσεις για το R όσες και οι ιδιοτιμές της μήτρας A . Από τα θεωρήματα των Perron-Frobenius, γνωρίζουμε, ότι σε μία μόνο από την ιδιοτιμές μιας μήτρας, έστω της A , αντιστοιχεί ένα αυστηρά θετικό η έστω ημιθετικό διάνυσμα τιμών παραγωγής, στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A .

⁶⁷ Η περίπτωση αυτή είναι ταυτόσημη με την περίπτωση που όπου $r=R$. Στην συνέχεια δείχνουμε γιατί το

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11}(1+R) \Rightarrow$$

$$p_I [I - A_{11}(1+R)] = 0$$

Για να έχει το παραπάνω σύστημα λύση πλην της τετριμμένης $p=0$, πρέπει $rank[I - A_{11}(1+R)] = n-1$ με άλλα πρέπει ή να υπολογίσουμε σχετικές τιμές ή να εισάγουμε μια εξίσωση τυποποίησης και να υπολογίσουμε απόλυτες τιμές. Κατά τα άλλα είναι σύμφωνα με το Θεώρημα του Frobenius, υπάρχουν n λύσεις στην παραπάνω σχέση, για R εκ των οποίων μια μόνο

είναι η οικονομικά σημαντική, αυτή που αντιστοιχεί για $\lambda_m^{A_{11}} = \frac{1}{1+R} \Rightarrow R = \frac{1 - \lambda_m^{A_{11}}}{\lambda_m^{A_{11}}}$

Ενώ για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+R) \Rightarrow$$

$$p_{II} = [p_I A_{12}(1+R)][I - A_{22}(1+R)]^{-1}$$

Για να υπάρξει λύση οικονομικά σημαντική πρέπει $[I - A_{22}(1+R)]^{-1} > 0$. Με άλλα λόγια πρέπει

$$\lambda_m^{A_{22}} < \frac{1}{1+R} \text{ ώστε να υπάρχει } [I - A_{22}(1+R)]^{-1} > 0.$$

Όμως η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A , όπως φαίνεται από την σχέση (a), συνεπάγεται ότι, για $\lambda_{\max}^A$ ισχύει:

$$\lambda^A = \lambda_{\max}^A \Rightarrow R^* = \min[R_1, R_2, R_3, \dots, R_n], R: p(R^*) \geq 0 \quad (68)$$

Μπορούμε να εξάγουμε τις εξής περιπτώσεις για το p (εξετάζοντας μόνο τις οικονομικά σημαντικές λύσεις):

Αν το p είναι θετικό, και κατά συνέπεια μιλάμε για μη μετρημένη λύση

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημα (3) αποτελείται από n εξισώσεις και n αγνώστους⁶⁸. Για την μέγιστη τιμή του ποσοστού κέρδους αντιστοιχεί το διάνυσμα των τιμών παραγωγής των n εμπορευμάτων (p)⁶⁹, το οποίο είναι:

- Είτε μονοσήμαντα προσδιορισμένο εξαιρέσει ενός βαθμωτού και θετικό, δηλαδή $p > 0$, την περίπτωση της μη τετριμμένης λύσης⁷⁰, στην περίπτωση δηλαδή όπου το $[\frac{1}{1+R} I - A] = 0$

⁶⁸ Τις n τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων. Για την λύση του ομογενούς συστήματος (3) απαιτείται η εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίηση ή ο εξωγενής ορισμός της τιμής ενός εμπορεύματος.

⁶⁹ Συνεπώς είναι διαστάσεων $n \times 1$

⁷⁰ Η περίπτωση που εξετάζεται είναι καθόλα όμοια με αυτήν της παραγράφου Β.1. Οι λύσεις που προκύπτουν για κάθε τιμή του ποσοστού κέρδους κάθε υποσυστήματος (βασικού ή μη) είναι διαζευκτικά για κάθε περίπτωση οι:

- Αν για το ποσοστό κέρδους ισχύει $r = R_I = R_{II}$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I [I_I - A_{11}(1 + R_I)] = 0$$

- Η τετριμμένη λύση $p_I = 0$
- Είτε η μη τετριμμένη λύση που δίδεται από την επίλυση της:
 $\det[I_I - A_{11}(1 + R_I)] = 0$, από την οποία από τα γνωστά θεωρήματα του Frobenius επιλέγεται εκείνη η τιμή του R_I η οποία αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας

$$F(\lambda_m^{A_{11}} = \frac{1}{1 + R_I} < 1). \text{ Ποιο συγκεκριμένα ισχύει:}$$

$$\exists R_I = R_I = R_{II} = \min[R_1, R_2, \dots, R_n] : p_I(R_I) > 0$$

Στην περίπτωση αυτή οι τιμές παραγωγής του βασικού υποσυστήματος είναι θετικές

Για το μη βασικό υποσύστημα η λύση δίνεται από την :

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+R_i)[I_{II} - A_{22}(1+R_i)]^{-1}$$

- a. Για $p_I = 0$ τότε ισχύει η τετριμμένη λύση δηλαδή

$$p_{II} = 0$$

- b. Ενώ για $p_I > 0$, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί για να είναι οι τιμές των μη βασικών εμπορευμάτων θετικές, πρέπει:

$$\det[I_{II} - A_{22}(1+R_i)] = 0 \text{ που με την σειρά του συνεπάγεται ότι:}$$

$$\lambda_m^{A_{22}} = \frac{1}{1+R_i} < 1. \text{ Το τελευταίο αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι}$$

τιμές του μη βασικού υποσυστήματος θετικές

- Αν για το ποσοστό κέρδους ισχύει : $R_I \geq \Gamma > R_{II}$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I[I - A_{11}(1+R_i)] = 0$$

Από την παραπάνω σχέση εξάγονται οι δύο πιθανές λύσεις:

- a. Η τετριμμένη λύση δηλαδή $p_I = 0$
- b. Ή η μη τετριμμένη, δηλαδή η $p_I < 0$. Η λύση αυτή προκύπτει από την λύση της σχέσης

$$: \det[I - A_{11}(1+R_i)] = 0. \text{ Είναι φανερό, ότι στην περίπτωση αυτή το } \frac{1}{(1+R_i)} \text{ αποτελεί}$$

την λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μήτρας A_{11} . Από τα θεωρήματα του Frobenius είναι γνωστό, ότι μόνο στην μέγιστη ιδιοτιμή μιας μη διασπώμενης μήτρας αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα. Κατά συνέπεια και στην περίπτωση του βασικού υποσυστήματος, έχουμε θετικές τιμές μόνο για R_i που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{11} . Με άλλα λόγια για το μικρότερο από τα μέγιστα ποσοστά κέρδους που προκύπτουν

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$p_{II} = p_I A_{12}(1+R_i)[I_{II} - A_{22}(1+R_i)]^{-1}$, όμως για θετικές τιμές το σύστημα τιμών του μη βασικού υποσυστήματος είναι ασυμβίβαστο. Ωστόσο αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι $p_I = 0$, τότε για το σύστημα τιμών του μη βασικού υποσυστήματος ισχύει η σχέση $p_{II}[I_{II} - A_{22}(1+R_i)] = 0$, από την οποία δύναται να προκύψουν οι ακόλουθες λύσεις:

- a. Η τετριμμένη δηλαδή η $p_{II} = 0$
- b. Ή η μη τετριμμένη δηλαδή η $p_{II} > 0$, αν και μόνο εάν $\det[I_{II} - A_{22}(1+R_i)] = 0$, από τις λύσεις της οποίας προκύπτει μόνο μια οικονομικά σημαντική αυτή που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{22} . Με άλλα λόγια πρέπει να ισχύει η

- Είτε μηδενικό, δηλαδή $p=0$, στην περίπτωση της τετριμμένης λύσης, στην περίπτωση δηλαδή όπου $p=0$.

2.3.2.3 Τιμές παραγωγής για $0 < d < d_{max}$

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα, όπως δείξαμε και παραπάνω:

$$p_I F = p_I + p_I F d_I \ell_I, F \equiv [A_{11}(1+r)]^{-1}$$

$$p_I [I - F(I - d_I \ell_I)] = 0$$

$$p_I [I - C] = 0, C \equiv F(I - d_I \ell_I) \quad (69)$$

Στην περίπτωση αυτή και πάλι σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, προκύπτουν n (ιδιο)διανύσματα p_I , εκ των οποίων για ένα μόνο προκύπτει $p_I > 0$, για αυτό που αντιστοιχεί στην $\lambda_m^C = 1$. Κατά συνέπεια

$$\lambda_m^C > \lambda_m^{A_1} > 0 \quad (70).$$

Από την άλλη μεριά για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{11}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II}$$

$$p_{II} = p_I [A_{11}(1+r) + d_I \ell_{II}] [I - A_{22}(1+r)]^{-1}$$

Για να υπάρξει λύση οικονομικά σημαντική πρέπει:

$$[I - A_{22}(1+r)]^{-1} > 0 \quad (71)$$

Με άλλα λόγια πρέπει να ισχύει η

$$\lambda_m^{A_{22}} = \frac{1}{1 + R_i} < 1$$

$$\lambda_m^{A_{22}} < \frac{1}{1+r} \quad (72)$$

ώστε να υπάρχει $[I - A_{22}(1+r)]^{-1} > 0$. Και σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε είτε σχετικές τιμές είτε εισάγουμε εξωγενώς μια εξίσωση τυποποίησης και ως εκ τούτου να υπολογίσουμε απόλυτες τιμές.

2.3.2.4 $d=[d_I, d_{II}]^T$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_{II}] \ell_I \quad (73)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{11} + p_{II} A_{22}](1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_{II}] \ell_{II} \quad (74)$$

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_{II}] \ell_I$$

Συνεπώς:

$$p_I = p_{II} d_{II} \ell_I [I - C_I]^{-1}, C_I = [A_{11}(1+r) + d_I \ell_I] \quad (75)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II} + p_{II} d_{II} \ell_{II}$$

$$p_{II} = p_I [A_{12}(1+r) + d_I \ell_{II}] [I - C_{II}]^{-1}, C_{II} = [A_{22}(1+r) + d_{II} \ell_{II}] \quad (76)$$

2.3.2.5 Το πραγματικό ωρομίσθιο είναι μέγιστο

Κατά συνέπεια το $r=0$ και το $d = d_{\max} = \frac{Y}{\ell X}$. Έτσι για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I [I - A_{11}^{-1}(I - d_I \ell_I)] = 0$$

$$p_I [I - C_I] = p_{II} d_{II} \ell_{II}, C_I \equiv (A_{11} + d_I \ell_I)$$

$$p_I = p_{II} d_{II} \ell_{II} [I - C_I]^{-1} \quad (77)$$

Στην περίπτωση αυτή για να υπάρχει λύση πρέπει ασφαλώς $p_{II} > 0$ και φυσικά $[I - C]^{-1}$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει $\lambda_m^{C_I} < 1$ και κατά συνέπεια για να υπάρξει ένα οικονομικά σημαντικό p_I , $p_I \neq 0$ πρέπει $\lambda_m^{C_I} > \lambda_m^{A_1} > 0$.

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$\begin{aligned} p_{II} &= p_I A_{12} + p_{II} A_{22} + p_I d_I \ell_{II} + p_{II} d_{II} \ell_{II} \\ p_{II} &= p_I [A_{12} + d_I \ell_{II}] [I - (A_{22} + d_{II} \ell_{II})]^{-1} \\ p_{II} &= p_I [A_{12} + d_I \ell_{II}] [I - \bar{A}_{22}]^{-1}, \bar{A}_{22} = (A_{22} + d_{II} \ell_{II}) \end{aligned} \quad (78)$$

Για να υπάρξει λύση πρέπει $[I - \bar{A}_{22}]^{-1} > 0$, δηλαδή με άλλα λόγια πρέπει

$$0 < \lambda_m^{\bar{A}_{22}} < 1 \quad (79)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση μέσω η σχέσεων προσπαθούμε να προσδιορίσουμε n+2 αγνώστους. Αυτό καθίσταται δυνατόν με τον εξωγενή προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους και την εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης για τον υπολογισμό των απολύτων τιμών. Είναι πάντα δυνατόν βέβαια αντί της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης ο εναπομείναν βαθμός ελευθερίας να εξαλείφεται με τον υπολογισμό σχετικών τιμών.

2.3.2.6 . Το ποσοστό κέρδους είναι μέγιστο

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11} (1 + R) \quad (80)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{11} + p_{II} A_{22}] (1 + R) \quad (81)$$

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I[I - A_{11}(1+R)] = 0 \quad (82)$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τετριμμένης λύσης ($p=0$) έχουμε και άλλες n λύσεις που αντιστοιχούν σε n τιμές του R εκ των οποίων μόνο η μικρότερη από τις τιμές του R είναι η οικονομικά σημαντική. Και η τιμή αυτή του R αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A_{11} . Με άλλα λόγια :

$$\frac{1}{1+R} = \lambda_m^A \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{1 - \lambda_m^A}{\lambda_m^A} \quad (83)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II} + p_{II} d_{II} \ell_{II}$$

$$p_{II} = p_I [A_{12}(1+R)][I - A_{22}(1+r)]^{-1} \quad (84)$$

Για να υπάρξει λύση οικονομικά σημαντική πρέπει $[I - A_{22}(1+R)]^{-1} > 0$. Με άλλα λόγια πρέπει $\lambda_m^{A_{22}} < \frac{1}{1+R}$ ώστε να υπάρχει $[I - A_{22}(1+R)]^{-1} > 0$.

Και σε αυτή την περίπτωση μέσω n σχέσεων προσπαθούμε να προσδιορίσουμε $n+2$ αγνώστους. Αυτό καθίσταται δυνατόν με τον εξωγενή προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους και την εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης για τον υπολογισμό των απολύτων τιμών. Είναι πάντα δυνατόν βέβαια αντί της εισαγωγής μιας εξίσωσης τυποποίησης ο εναπομείναν βαθμός ελευθερίας να εξαλείφεται με τον υπολογισμό σχετικών τιμών.

2.3.2.7 Τιμές παραγωγής για $0 < d < d_{max}$

Για το βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_{II}] \ell_I$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = [p_I A_{11} + p_{II} A_{22}](1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_{II}] \ell_{II}$$

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + [p_I d_I + p_{II} d_I] \ell_I.$$

Συνεπώς:

$$p_I = p_{II} d_{II} \ell_I [I - C_I]^{-1}, C_I = [A_{11}(1+r) + d_I \ell_I] \quad (85)$$

Για το μη βασικό υποσύστημα ισχύει:

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II} + p_{II} d_{II} \ell_{II}$$

$$p_{II} = p_I [A_{12}(1+r) + d_I \ell_{II}] [I - C_{II}]^{-1}, C_{II} = [A_{22}(1+r) + d_{II} \ell_{II}] \quad (86)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση για $p_{II} > 0$ πρέπει τόσο $p_I > 0$ όσο και η $[I - C_{II}]^{-1} > 0$, με άλλα λόγια η $\lambda_m^{C_{II}} < 1$.

Επομένως το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να λύσουμε τις σχέσεις (67) και (68) και να εισάγουμε μια εξίσωση τυποποίησης ώστε να υπολογίσουμε απόλυτες τιμές, ή απλά να υπολογίσουμε σχετικές τιμές χωρίς την επιπλέον εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης. Πιο συγκεκριμένα:

$$p_I = p_{II} d_{II} \ell_I [I - C_I]^{-1}, C_I = [A_{11}(1+r) + d_I \ell_I]$$

$$p_{II} = p_I A_{12}(1+r) + p_{II} A_{22}(1+r) + p_I d_I \ell_{II} + p_{II} d_{II} \ell_{II} \quad (87)$$

Για λόγους ευκολίας ορίζουμε:

$$\alpha \equiv d_{II} \ell_I \{I - [A_{11}(1+r) + d_I \ell_I]\}^{-1}$$

$$\beta \equiv [A_{12}(1+r) + p_I d_I \ell_{II}]$$

$$\gamma \equiv [A_{22}(1+r) p_{II} d_{II} \ell_{II}]$$

Κατά συνέπεια για το $p_{II} > 0$ προκύπτει

$$p_{II} = p_I \beta + p_{II} \gamma$$

$$p_{II} = p_{II}\alpha\beta + p_{II}\gamma$$

$$p_{II}[I - (\alpha\beta + \gamma)] = 0$$

$$p_{II}[I - \bar{A}] = 0 \quad (88), \text{ όπου } \bar{A} \equiv (\alpha\beta + \gamma)$$

3 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΙΜΙΑΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ- ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΩΡΟΜΙΣΘΙΟΥ, ΛΟΓΩ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξεταστεί εάν και κατα πόσον επιρρεάζονται διάφορα τιμιακά μεγέθη από την μεταβολή της τυποποίησης των εμπορευμάτων. Αυτό θα γίνει διαζευκτικά για την περίπτωση της μη διασπώμενης απλής παραγωγής και για την περίπτωση της διασπώμενης παραγωγής.

3.1 Μη Διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής⁷¹

Έστω το σύστημα $[A, \ell, x]$ το οποίο χρησιμοποιεί την μη διασπώμενη παραγωγική τεχνική απλής παραγωγής $[A, \ell]$, όπου $A, A \geq 0$ ή $A > 0$, η $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος. Με ℓ , συμβολίζεται το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία ανα μονάδα παραγόμενο εμπορεύματος. Το ότι η τεχνική παραγωγής είναι παραγωγική σημαίνει ότι το σύστημα είναι σε θέση να παράξει κάθε θετικό ή έστω ημιθετικό καθαρό προϊόν $Y, Y \geq 0$, όπου Y το $n \times 1$ διάνυσμα που παριστά το καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα αντίστοιχο αυστηρά θετικό ακαθάριστο προϊόν $X, X > 0$, όπου X το $n \times 1$ διάνυσμα του καθαρού προϊόντος και ταυτόχρονα στην περίπτωση της απλής παραγωγής, των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος.

Έστω τώρα τα $n \times 1$ μη γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα φ και ψ , $\varphi \neq \alpha\psi$, που παριστούν δύο διαφορετικά τυπικά εμπορεύματα⁷². Τα δυο αυτά τυπικά εμπορεύματα συνεπάγονται δυο διαφορετικές τυποποιήσεις των τιμών:

$$p(\varphi)\varphi = \beta, \beta > 0 \quad (89)$$

⁷¹ Βλ. Γ. Σταμάτη, (1995)

⁷² Τα δυο αυτά τυπικά εμπορεύματα αποτελούν καθαρά προϊόντος δυο υποσυστημάτων που χρησιμοποιούν την ίδια τεχνική $[A, \ell]$, με το δεδομένο σύστημα παραγωγής. Τα υποσυστήματα αυτά καλούνται τυπικά υποσυστήματα.

$$p(\psi)\psi = \gamma, \gamma > 0 \quad (90)$$

Αν $x(\varphi), x(\psi) \geq 0$, τότε το υπό εξέταση υποσύστημα, δεν παράγει όλα τα δυνάμενα να παραχθούν από την $[A, \ell]$ εμπορεύματα, αλλά περιέχει και εμπορεύματα σε μηδενικές ποσότητες. Αν τώρα $[I - A]^{-1}\varphi > 0$, τότε το υποσύστημα φ παράγει τα ίδια εμπορεύματα με την αρχική τεχνική $[A, \ell]$. Επομένως το τυπικό υποσύστημα διαφέρει με το δεδομένο σύστημα παραγωγής μόνο ως προς τα επίπεδα δραστηριότητας.

Στην περίπτωση που έχουμε $[I - A]^{-1}\varphi \geq 0$, διαγράφουμε από τα διανύσματα φ, ℓ , $p(\varphi)$ και την μήτρα A , τις συνιστώσες που στο διάνυσμα $[I - A]^{-1}\varphi$ είναι ίσες με μηδέν⁷³. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε τα $\bar{\varphi}, \bar{\ell}(\varphi), \bar{p}(\varphi), N(\varphi)$ ⁷⁴, όπου $N(\varphi)$ η $k \times k$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών του τυπικού υποσυστήματος, που παράγει το φ σαν καθαρό προϊόν.

Επομένως μιλάμε πλέον για το τυπικό υποσύστημα, που χρησιμοποιεί την τεχνική $[N(\varphi), \bar{\ell}(\varphi)]$ και παράγει το φ σαν καθαρό προϊόν για την οποία ισχύει:

$$\bar{p}(\varphi)\varphi = \beta, \beta > 0 \quad (91)$$

$$\bar{p}(\psi)\psi = \gamma, \gamma > 0 \quad (92)$$

Βάση των παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε την w-r σχέσεις για κάθε ένα από τα τυπικά υποσυστήματα. Αρχικά για το φ :

$$\begin{aligned} p &= pA(1+r) + w\ell \\ p &= w\ell[I - A(1+r)]^{-1} \end{aligned} \quad (93)$$

Και για $w=0$

$$\begin{aligned} p &= pA(1+R) + w\ell \\ p[I - A(1+R)] &= 0 \end{aligned}$$

⁷³ Εμπορεύματα δηλαδή που δεν παράγονται στο τυπικό υποσύστημα, που παράγει το φ σαν καθαρό προϊόν.

⁷⁴ Οι διαστάσεις των: $\bar{\varphi} \quad k \times 1, \bar{\ell} \quad 1 \times k, \bar{p}(\varphi) \quad 1 \times k, N(\varphi) \quad k \times k$

$$p[\frac{1}{(1+R)}I - A] = 0 \quad (94)$$

Για $\bar{p}(\varphi)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{p}(\varphi) &= \bar{p}(\varphi)N(\varphi)(1+r(\varphi)) + w(\varphi)\bar{\ell}(\varphi) \\ \bar{p}(\varphi) &= w(\varphi)\bar{\ell}(\varphi)[I - N(\varphi)(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \end{aligned} \quad (95)$$

Και για $w(\varphi)=0$ έχουμε $R(\varphi)_{\max}$

$$\begin{aligned} \bar{p}(\varphi) &= \bar{p}(\varphi)N(\varphi)(1+R(\varphi)_{\max}) \\ \bar{p}(\varphi)[I - N(\varphi)(1+R(\varphi)_{\max})] &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{p}(\varphi)[\frac{1}{(1+R(\varphi)_{\max})}I - N(\varphi)] = 0 \quad (96)$$

Και οι w-r

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= \frac{\bar{p}(\varphi)\bar{\varphi}}{\bar{\ell}[I - N(\varphi)(1+r(\varphi))]^{-1}\bar{\varphi}} \\ w(\varphi) &= \frac{\beta}{\bar{\ell}[I - N(\varphi)(1+r(\varphi))]^{-1}\bar{\varphi}} \dot{\eta} \\ w(\varphi) &= \frac{\bar{p}(\varphi)[I - N(\varphi)(1+r(\varphi))]\bar{\varphi}}{\bar{\ell}\bar{\varphi}} \end{aligned} \quad (97)$$

Καθώς επίσης και για $w(\varphi)_{\max}$ (δηλαδή για $r(\varphi)=0$):

$$\begin{aligned} w(\varphi)_{\max} &= \frac{\bar{p}(\varphi)[I - N(\varphi)]\bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi)\bar{\varphi}} \\ w(\varphi)_{\max} &= \frac{\bar{p}(\varphi)\bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi)[I - N(\varphi)]^{-1}\bar{\varphi}} \\ w(\varphi)_{\max} &= \frac{\beta}{\bar{\ell}(\varphi)[I - N(\varphi)]^{-1}\bar{\varphi}} = \frac{\beta}{\bar{\omega}(\varphi)\bar{\varphi}}, \bar{\omega}(\varphi) \equiv \bar{\ell}(\varphi)[I - N(\varphi)]^{-1} \end{aligned} \quad (98)$$

Όπου $\bar{\omega}(\varphi)$, το 1xk διάνυσμα των αξιών των, παραγόμενων από το τυπικό υποσύστημα, που παράγει το $\bar{\varphi}$ σαν καθαρό (ακαθάριστο) προϊόν, εμπορευμάτων.

Για $R(\varphi)_{\max}$ (δηλαδή για $w(\varphi)=0$) έχουμε:

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{\bar{p}(\varphi)[I - N(\varphi)]\bar{\varphi}}{\bar{p}(\varphi)N(\varphi)\bar{\varphi}} = \frac{\beta - \bar{p}(\varphi)N(\varphi)\bar{\varphi}}{\bar{p}(\varphi)N(\varphi)\bar{\varphi}} \quad (99)$$

Αντίστοιχα ισχύουν για την τυποποίηση με $\psi = \bar{\psi}$

Για $\bar{p}(\psi)$ ισχύει

$$\bar{p}(\psi) = w(\psi)\bar{\ell}(\psi)[I - N(\psi)(1 + r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (100)$$

Και για $w(\psi)=0$ έχουμε $R(\varphi)_{\max}$

$$\bar{p}(\psi)\left[\frac{1}{(1 + R(\psi)_{\max})}I - N(\psi)\right] = 0 \quad (101)$$

Και οι $w-r$

$$w(\psi) = \frac{\gamma}{\bar{\ell}[I - N(\psi)(1 + r(\psi))]^{-1}\bar{\psi}} \quad \text{ή}$$

$$w(\varphi) = \frac{\bar{p}(\psi)[I - N(\psi)(1 + r(\psi))]\bar{\psi}}{\bar{\ell}\bar{\psi}} \quad (102)$$

Καθώς επίσης και για $w(\varphi)_{\max}$ (δηλαδή για $r(\varphi)=0$):

$$w(\psi)_{\max} = \frac{\gamma}{\bar{\ell}(\psi)[I - N(\psi)]^{-1}\bar{\psi}} = \frac{\gamma}{\bar{\omega}(\psi)\bar{\psi}}, \bar{\omega}(\psi) \equiv \bar{\ell}(\psi)[I - N(\psi)]^{-1} \quad (103)$$

Όπου $\bar{\omega}(\psi)$, το διάνυσμα των αξιών των, παραγόμενων από το τυπικό υποσύστημα, που παράγει το $\bar{\psi}$ σαν καθαρό (ακαθάριστο) προϊόν, εμπορευμάτων.

Για $R(\psi)_{\max}$ (δηλαδή για $w(\varphi)=0$) έχουμε:

$$R(\psi)_{\max} = \frac{\bar{p}(\psi)[I - N(\psi)]\bar{\psi}}{\bar{p}(\psi)N(\psi)\bar{\psi}} = \frac{\gamma - \bar{p}(\psi)N(\psi)\bar{\psi}}{\bar{p}(\psi)N(\psi)\bar{\psi}} \quad (104)$$

3.2 Προσδιορισμός τιμών παραγωγής στα τυπικά Υποσυστήματα

Αρχικά εξετάζουμε το σύστημα τιμών, για το τυπικό υποσύστημα, που παράγει το $\bar{\varphi}$ σαν καθαρό (ακαθάριστο)⁷⁵ προϊόν προκύπτει:

Για $R(\varphi)_{\max}$:

$$\bar{p}(\varphi) \left[\frac{1}{(1 + R(\varphi)_{\max})} I - N(\varphi) \right] = 0 \quad (105)$$

Κατά τα γνωστά⁷⁶ ισχύει:

$$\text{rank} \left[\frac{1}{(1 + R(\varphi)_{\max})} I - N(\varphi) \right] = k - 1 \text{ και ως εκ τούτου ισχύει:}$$

$$\det \left[\frac{1}{1 + R(\varphi)_{\max}} I - N(\varphi) \right] = 0$$

$$\text{Όμως } \frac{1}{1 + R(\varphi)_{\max}} = \lambda^{N(\varphi)} \Rightarrow$$

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda^{N(\varphi)}}{\lambda^{N(\varphi)}} \quad (106)$$

Από τον ορισμό της ιδιοτιμής, βλέπουμε ότι το $\bar{p}(\varphi)$ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $N(\varphi)$.

$$\text{Επομένως } r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{N(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{N(\varphi)}} \quad (107)$$

⁷⁵ Το γιατί στην συγκεκριμένη περίπτωση καθαρό και ακαθάριστο προϊόν συμπίπτουν, βλ. Γ. Σταμάτη, (1995)σελ.ίδα 178

⁷⁶ Βλ. Γ. Σταμάτη (1995), σελ 122,

Βλ. επίσης H.D. Kurz & N. Salvatory, (1995) σελ 98,108

Βλ. Επίσης L. Passinetti,(1991) σελ 88

Επομένως στο οικονομικά σημαντικό διάνυσμα των τιμών του $r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) \leq R(\varphi)_{\max}$, οι τιμές παραγωγής των, παραγόμενων από το τυπικό υποσύστημα που παράγει το $\bar{\varphi}$, ως καθαρό προϊόν, εμπορευμάτων είναι θετικές:

1. Γιατί το διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία, $\bar{\ell}(\varphi)$, για το τυπικό υποσύστημα $\bar{\varphi}$, είναι θετικό⁷⁷, $\bar{\ell}(\varphi) > 0$
2. Η μήτρα $[I - N(\varphi)(1 + r(\varphi))]^{-1} > 0$, είναι θετική και κατά συνέπεια μη διασπώμενη
3. Από τα 1. και 2. και από τις σχέσεις (12) και (7) προκύπτει ότι:
 - a. $\bar{\varphi} > 0$, ότι το τυπικό υποσύστημα που παράγει το $\bar{\varphi}$, ως καθαρό(ακαθάριστο) προϊόν, είναι βιώσιμο(παραγωγικό).
 - b. Το ονομαστικό ωρομίσθιο $w(\varphi) > 0$, δηλαδή για κάθε ύψος του ποσοστού κέρδους (εντός βέβαια του οικονομικά σημαντικού πεδίου των τιμών του) είναι θετικό.

Η σχέση $R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{N(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{N(\varphi)}}$ έχει και ένα οικονομικό νόημα. Αφενός θέτει ένα

κατώτερο όριο για το $\frac{1}{1 + R(\varphi)_{\max}}$, και ένα ανώτερο όριο για το $R(\varphi)_{\max}$. Με άλλα

λόγια η $R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{N(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{N(\varphi)}}$ είναι η συνθήκη που εξασφαλίζει, ότι εντός βέβαια του

οικονομικά σημαντικού πεδίου των τιμών του $R(\varphi)$, με άλλα λόγια:

$$\forall r \in [0, R(\varphi)_{\max}] \exists \bar{p}(\varphi) > 0$$

Όταν μάλιστα η τεχνική $[A, \ell]$ είναι μια μη διασπώμενη παραγωγική τεχνική, όπου δηλαδή ισχύει: $[I - A]^{-1} > 0$ και $[I - A]^{-1} \bar{\varphi} > 0$, για κάθε $\bar{\varphi} > (\geq) 0$ (ή αντίστοιχα για $\bar{\varphi}$). Τότε το υπό εξέταση σύστημα παράγει όλα τα εμπορεύματα του δεδομένου συστήματος παραγωγής. Με άλλα λόγια:

$$\bar{\varphi} = \varphi \quad (108)$$

⁷⁷ Με άλλα λόγια καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι αυτοματοποιημένη

$$\bar{\ell}(\varphi) = \ell \quad (109)$$

$$\bar{p}(\varphi) = p \quad (110)$$

$$\bar{\omega}(\varphi) = \omega \quad (111)$$

Και αντίστοιχα για ψ

$$\bar{\psi} = \psi \quad (112)$$

$$\bar{\ell}(\psi) = \ell \quad (113)$$

$$\bar{p}(\psi) = p \quad (114)$$

$$\bar{\omega}(\psi) = \omega \quad (115)$$

Επομένως :

$$N(\varphi) = N(\psi) = A \quad (116)$$

$$\lambda_{\max}^{N(\varphi)} = \lambda_{\max}^{N(\psi)} = \lambda_{\max}^A \quad (117)$$

$$\bar{\omega}(\varphi) = \bar{\omega}(\psi) = \omega \quad (118)$$

$$R(\varphi)_{\max} = R(\psi)_{\max} = R_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^A}{\lambda_{\max}^A} \quad (119)$$

Ας δούμε τώρα ποια η σχέση μεταξύ $\bar{p}(\varphi)$ και $\bar{p}(\psi)$

$$\text{Για } r, \quad 0 \leq r \leq R_{\max} (= \frac{1 - \lambda_{\max}^A}{\lambda_{\max}^A})$$

$$\bar{p}(\varphi) = \alpha \bar{p}(\psi) \quad (120)$$

Επομένως $\alpha = \frac{\bar{p}(\varphi)}{\bar{p}(\psi)}$. Από τις σχέσεις $(\chi\chi)$ και $(\chi\chi)$ προκύπτει ότι:

$$\alpha = \frac{w(\varphi)}{w(\psi)} = \frac{\beta \ell [I - A(1+r)]^{-1} \psi}{\gamma \ell [I - A(1+r)]^{-1} \varphi} \quad (121)$$

Και για $r = r(\varphi) = r(\psi) = 0$

$$\alpha = \frac{w(\varphi)_{\max}}{w(\psi)_{\max}} = \frac{\beta\omega\psi}{\gamma\omega\varphi}$$

$$w(\varphi) = \alpha w(\psi) \quad (122)$$

Επομένως $(p(\varphi), w(\varphi)) = \alpha(p(\psi), w(\psi))$ (123), όπου α ο συντελεστής αναλογίας των τιμών των παραγόμενων και μη εμπορευμάτων.

Το συμπέρασμα που εξάγεται από τις παραπάνω σχέσεις είναι ότι με μεταβαλλόμενη τυποποίηση οι τιμές των εμπορευμάτων δεν μεταβάλλονται.

Κατά συνέπεια η w - r , που προκύπτει από κάθε τυποποίηση είναι η w - r του τυπικού υποσυστήματος, αλλά και του δεδομένου συστήματος παραγωγής, για τους εξής λόγους:

1. Το τυπικό υποσύστημα και το δεδομένο σύστημα παραγωγής, χρησιμοποιούν την ίδια γραμμική τεχνική
2. Στο τυπικό, αλλά και στο δεδομένο σύστημα παραγωγής, ισχύουν το ίδιο ονομαστικό ωρομίσθιο και το ίδιο ποσοστό κέρδους⁷⁸.
3. Η τιμή κάθε εμπορεύματος είναι η ίδια στο τυπικό υποσύστημα και στο δεδομένο σύστημα παραγωγής, για τους δύο παραπάνω λόγους⁷⁹.

Ας επαναλάβουμε κάποια πράγματα για την w - r . Έστω το γνωστό μας σύστημα τιμών⁸⁰:

$$p = pA(1+r) + w\ell \Leftrightarrow$$

$$p[I - A] = pAr + w\ell \Leftrightarrow \text{πολλαπλασιάζουμε και δυο μέλη με } \varphi$$

$$p[I - A]\varphi = pA\varphi r + w\ell\varphi \Leftrightarrow$$

$$w = \frac{p[I - A]\varphi}{\ell\varphi} + \frac{pA\varphi}{\ell\varphi} r \Leftrightarrow$$

$$w = \pi_\ell + K_\varphi r, \pi_\ell \equiv \frac{p[I - A]\varphi}{\ell\varphi}, K_\varphi \equiv \frac{pA\varphi}{\ell\varphi}$$

⁷⁸ Τα $R(\varphi)_{\max}$ και $w(\varphi)_{\max}$ είναι αντίστοιχα το μέγιστο ποσοστό κέρδους και το ονομαστικό ωρομίσθιο, ενός συστήματος που παράγει το $\bar{\varphi}$ σαν καθαρό και σαν ακαθάριστο προϊόν. Το παραπάνω «παράδοξο» εξηγείται στο: Γ. Σταμάτη(1995) , σελίδα 177-178

⁷⁹ Με άλλα λόγια ισχύει το Non Substitution- Theorem

⁸⁰ βλ. Γ. Σταμάτη(1995) , σελίδα 348-349

Όπου π_i η μέση τιμιακή παραγωγικότητα εργασίας στο τυπικό υποσύστημα φ και K_φ η ένταση κεφαλαίου στο τυπικό υποσύστημα φ .

Όπως αποδείχτηκε, για μη διασπώμενα συστήματα παραγωγής απλής παραγωγής για δεδομένο ποσοστό κέρδους, $r, 0 \leq r \leq R_{\max}$ και για μεταβαλλόμενο τυπικό εμπόρευμα, οι τιμές παραγωγής, μένουν αμετάβλητες.

Όμως για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο, $w, 0 \leq w \leq \min\{w(\varphi)_{\max}, w(\psi)_{\max}\}$ οι σχετικές τιμές μεταβάλλονται με μεταβαλλόμενο τυπικό εμπόρευμα. Και αυτό γιατί σε δεδομένα ονομαστικά ωρομίσθια, $w(\varphi), w(\psi)$ αντιστοιχούν διαφορετικά $r, r(\varphi), r(\psi)$ αντίστοιχα.

Τέλος τα μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής συμπίπτουν με τα αντίστοιχα τυπικά τους υποσυστήματα, με εξαίρεση τα επιμέρους επίπεδα δραστηριότητας τους. Με άλλα λόγια παράγουν τα ίδια εμπορεύματα, σε διαφορετικές, όμως ποσότητες και αναλογίες. Πράγμα το οποίο σημαίνει, ότι η w - r που προκύπτει από κάθε τυποποίηση δίνει πάντα το ίδιο μέγιστο ποσοστό κέρδους. Κατά συνέπεια οι σχετικές τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση των τιμών.

3.2.1 Σχετικές τιμές για δεδομένο πραγματικό ωρομίσθιο

Παρακάτω θεωρούμε, ότι δεδομένο είναι το πραγματικό ωρομίσθιο d , όπου d , ένα $n \times 1$ διάνυσμα που παριστά το καλάθι εμπορευμάτων, από το οποίο αποτελείται το πραγματικό ωρομίσθιο⁸¹.

Έστω ότι:

$$0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X} \quad ^{82}$$

⁸¹ Βλ. Γ. Σταμάτη, (1998), σελίδα 96

⁸² Ως γνωστόν το καθαρό προϊόν αποτελείται από το υπερπροϊόν U , όπου U , ένα $n \times 1$ διάνυσμα και τους συνολικούς πραγματικούς μισθούς του συστήματος, δηλαδή από το $n \times 1$ διάνυσμα, $d \ell X$. Επομένως για το μέγιστο πραγματικό ωρομίσθιο ισχύει:

Στην περίπτωση αυτή, οι μισθοί δεν προκαταβάλλονται, αλλά πληρώνονται στο τέλος της περιόδου:

$$\begin{aligned}w &= pd \\p &= pA(1+r) + pd\ell(1+r) \Leftrightarrow \\p &= p(A+d\ell)(1+r) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$p[I - C(1+r)] = 0, C \equiv A[I - d\ell]^{-1} \quad (124)$$

$$[I - d\ell]^{-1} \geq 0$$

$$\text{Δηλαδή, } \lambda_{\max}^A \leq \lambda_{\max}^C \leq 1 \quad (125)$$

Ισχύει:

$$\text{rank}\left[\frac{1}{(1+r)}I - C\right] = n-1 \quad (126)$$

Και επομένως:

$$\det\left[\frac{1}{(1+r)}I - C\right] = 0$$

$$\frac{1}{(1+r)} = \lambda_{\max}^C \quad (127)$$

Σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα του Frobenius⁸³, υπάρχει μόνο μια ιδιοτιμή, η μέγιστη, για την οποία ισχύει ένα μόνο αυστηρά θετικό ή έστω ημιθετικό ιδιοδιάνυσμα. Επομένως η στην μέγιστη ιδιοτιμή της C, αντιστοιχεί ένα θετικό ή ημιθετικό διάνυσμα τιμών p. Επομένως στην μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{\max}^C$ και συνεπώς στην

$Y = U + d\ell X$, αν $U=0$, τότε:

$$Y = d_{\max}\ell X \Leftrightarrow \frac{Y}{\ell X} = d_{\max}$$

, με άλλα λόγια όλο το καθαρό προϊόν ξοδεύεται για την πληρωμή των πραγματικών μισθών

⁸³ Βλ. L. Passinetti (1991), σελ. 285

μέγιστη τιμή για το $\frac{1}{(1+r)}$ και την μικρότερη για r , αντιστοιχεί ένα θετικό διάνυσμα τιμών p ⁸⁴.

Δηλαδή:

$$p^* > 0, r = \frac{1 - \lambda_{\max}^c}{\lambda_{\max}^c} \geq 0$$

$$w^* = pd$$

Για την τυποποίηση με φ έχουμε:

$$\bar{p}(\varphi) \left[\frac{1}{1+r} I - C(\varphi) \right] = 0, C(\varphi) = N(\varphi) [I - \bar{d} \bar{\ell}(\varphi)]^{-1} \quad (128)$$

Ομοίως ισχύει:

$$\text{rank} \left[\frac{1}{(1+r(\varphi))} I - C(\varphi) \right] = n-1$$

$$\det \left[\frac{1}{(1+r(\varphi))} I - C(\varphi) \right] = 0 \quad (129)$$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε n λύσεις για το $r(\varphi)$ και συνεπώς για n λύσεις για το $\bar{p}(\varphi)$, από τις οποίες, μόνο μια είναι για $0 \leq d < \frac{Y}{\ell X}$ θετική, ή για $d = \frac{Y}{\ell X}$ μη αρνητική. Για την τελευταία αυτή λύση ισχύει:

$$\bar{p}(\varphi) = \bar{p}(\varphi)^* > 0$$

$$r(\varphi) = r(\varphi)^* = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{C(\varphi)}} \quad (130)$$

$$w(\varphi)^* = \bar{p}(\varphi)^* d \quad (131)$$

⁸⁴ Βλ. Γ. Σταμάτη, (1995), σελ 122,

Βλ. επίσης H.D. Kurz & N. Salvatory (1995), σελ 98, 108

Βλ. Επίσης L. Passinetti, (1991) σελίδα 88

Για d , $0 < d \leq \frac{Y}{\ell X}$, η λύση για το r συμπίπτει, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων και για $d=0$, όσον αφορά το ποσοστό κέρδους και τις σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων με την οικονομικά σημαντική λύση, που προκύπτει από την (XX, 49) πριν την τυποποίηση των τιμών.

Για $d=0$

$$r(\varphi) = r(\varphi)^* = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{C(\varphi)}} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{N(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{N(\varphi)}} = \frac{1 - \lambda_{\max}^A}{\lambda_{\max}^A} \quad (132)$$

Και

$$w(\varphi)^* = \bar{p}(\varphi)^* d = 0 \quad (133)$$

Για $d = \frac{Y}{\ell X}$

$$r(\varphi) = r(\varphi)^* = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{C(\varphi)}} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$w(\varphi)^* = w(\varphi)_{\max}^* = \bar{p}(\varphi)^* \frac{Y}{\ell X} = \frac{\bar{p}(\varphi)^* [I - N(\varphi)]^{-1} \bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi) \bar{\varphi}} = \frac{\bar{p}(\varphi) [I - A] \bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi) \bar{\varphi}} \quad (134)$$

Και για d , $0 < d < \frac{Y}{\ell X}$ παίρνουμε:

$$(0 <) r(\varphi)^* = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{C(\varphi)}} (< \frac{1 - \lambda_{\max}^{N(\varphi)}}{\lambda_{\max}^{N(\varphi)}} = \frac{1 - \lambda_{\max}^A}{\lambda_{\max}^A}) \quad (135)$$

Και

$$(0 <) w(\varphi)^* < \bar{p}(\varphi)^* \frac{Y}{\ell X} = \frac{\bar{p}(\varphi)^* [I - N(\varphi)] \bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi) \bar{\varphi}} = \frac{\bar{p}(\varphi) [I - A] \bar{\varphi}}{\bar{\ell}(\varphi) \bar{\varphi}} \quad (136)$$

Τα ίδια ισχύουν και για την τυποποίηση με $\psi = \bar{\psi}$

Είναι πλέον φανερό, ότι οι δύο τυποποιήσεις των τιμών δίνουν, για κάθε d , $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X}$, το ίδιο ποσοστό κέρδους και τις ίδιες τιμές των παραγόμενων και μη παραγόμενων εμπορευμάτων. Το τελευταίο ισχύει, λόγω του ότι η A και συνεπώς η C είναι μη διασπώμενες.

Επομένως ισχύει:

$$N(\varphi) = N(\psi) = A_{(137)}$$

$$\bar{\ell}(\varphi) = \bar{\ell}(\psi) = \ell_{(138)}$$

$$\overline{d\ell}(\varphi) = \overline{d\ell}(\psi) = d\ell_{(139)}$$

$$C(\varphi) = C(\psi) = C_{(140)}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi_{(141)}$$

$$\bar{\psi} = \psi_{(142)}$$

$$\bar{p}(\varphi) = p(\varphi)_{(143)}$$

$$\bar{p}(\psi) = p(\psi)_{(144)}$$

Επειδή τόσο το $\bar{p}(\varphi)$ και το $\bar{p}(\psi)$ είναι αριστερά ιδιοδιανύσματα της C

$$r(\varphi) = r(\psi) = r(= \frac{1 - \lambda_{\max}^C}{\lambda_{\max}^C})_{(145)}$$

Επομένως:

$$\bar{p}(\varphi) = \theta \bar{p}(\psi), \theta > 0_{(146)}$$

Το θ δεν είναι τίποτε άλλο από ένα βαθμωτό, με άλλα λόγια από έναν συντελεστή αναλογίας, μεταξύ $\bar{p}(\varphi)$ και $\bar{p}(\psi)$. Από την σχέση 0,57 προκύπτει:

$$(r(\varphi)) \frac{\bar{p}(\varphi)(I - C)\varphi}{\bar{p}(\varphi)C\varphi} = \frac{\bar{p}(\psi)(I - C)\psi}{\bar{p}(\psi)C\psi} (= r(\psi)) \Leftrightarrow$$

$$\theta \bar{p}(\psi)\gamma C\varphi = \bar{p}(\psi)\beta C\psi \Leftrightarrow$$

$$\theta \bar{p}(\psi) \gamma C \varphi - \bar{p}(\psi) \beta C \psi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{p}(\psi) C [\theta \gamma \varphi - \beta \psi] = 0 \quad (147)$$

Η τελευταία αυτή σχέση ισχύει για κάθε d.

Για κάθε d, $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X}$, παίρνουμε:

$$w(\varphi) = \bar{p}(\varphi) d \quad (148)$$

$$w(\psi) = \bar{p}(\psi) d \quad (149)$$

Και λόγω της (58)

$$w(\varphi) = \theta \bar{p}(\psi) d \quad (150)$$

$$w(\psi) = \bar{p}(\psi) d \quad (151)$$

Επομένως:

$$w(\varphi) = \theta w(\psi) \quad (152)$$

Επομένως για d, $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X}$, ισχύει:

$(\bar{p}(\varphi), w(\varphi)) = \theta (\bar{p}(\psi), w(\psi))$ (153), με άλλα λόγια οι σχετικές τιμές παραμένουν οι ίδιες μετά την μεταβολή της τυποποίησης (του τυπικού εμπορεύματος).

Για d=0 ισχύει:

1. ότι οι σχετικές τιμές παραμένουν ίδιες με την μεταβολή της τυποποίησης:

$$\bar{p}(\varphi) = \theta \bar{p}(\psi)$$

2. Τα ονομαστικά ωρομίσθια παραμένουν ίδια για όλες τις τυποποιήσεις και ίσα με μηδέν. Με άλλα λόγια:

$$w(\varphi) = w(\psi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{p}(\varphi) d = \bar{p}(\psi) d = 0 \quad (154)$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι με μεταβαλλόμενη τυποποίηση, σε μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής, οι σχετικές τιμές παραμένουν οι ίδιες, αδιάφορο αν οι μισθοί πληρώνονται ως ονομαστικοί ή πραγματικοί μισθοί στο τέλος της περιόδου⁸⁵.

3.2.2 Διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής⁸⁶

Παρακάτω εξετάζεται η περίπτωση, όπου το υπό εξέταση σύστημα είναι διασπώμενο. Με άλλα λόγια, παράγει τόσο βασικά, όσο και μη βασικά εμπορεύματα. Στο παρόν κείμενο θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις, μια με την A να παράγει βασικά και μη βασικά εμπορεύματα, με την εισροή μόνο βασικών εμπορευμάτων και μια A να παράγει βασικά και μη βασικά εμπορεύματα, με την εισροή μόνο βασικών εμπορευμάτων (στην παραγωγή βασικών εμπορευμάτων) και βασικών και μη βασικών στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων⁸⁷.

1^η περίπτωση

Έστω η μήτρα A , $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{11}, A_{12} \geq 0$

Επιπλέον ισχύει:

$$(0 \leq) \lambda_{\max}^A < 1 \quad (1)$$

$$\ell > 0 \quad (2)$$

$$X, Y > 0 \quad (3)$$

Όπου A , η $n \times n$ μήτρα των εισροών σε εμπορεύματα ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος, με A_{11} την $k \times k$ μήτρα των εισροών σε βασικά εμπορεύματα, ανά μονάδα

⁸⁵ βλ. Γ. Σταμάτη, (1995), σελ 191

⁸⁶ βλ. Γ. Σταμάτη, (1995), σελ 192

⁸⁷ Για διασπώμενες τεχνικές βλ. Γ. Σταμάτη (1995), σελ 45

παραγόμενου βασικού εμπορεύματος και A_{12} την $(n-k) \times (n-k)$ μήτρα των εισροών⁸⁸ σε βασικά εμπορεύματα, ανά μονάδα παραγόμενου μη βασικού εμπορεύματος.

3.2.2.1 Σχετικές τιμές με δεδομένο ποσοστό κέρδους.

Αρχικά γίνεται η υπόθεση, ότι οι μισθοί καταβάλλονται στο τέλος της περιόδου παραγωγής.

Ακολουθώντας την δομή του άρθρου του Γ. Σταμάτη «Η εξάρτηση των σχετικών τιμών από την τυποποίηση τους Μέρος 2^ο: Τυποποίηση και σχετικές τιμές σε διασπώμενα συστήματα παραγωγής», θα υποθέσουμε για μια ακόμα φορά την τυποποίηση με δύο τυπικά εμπορεύματα, το φ και το ψ . Το φ αποτελείται μόνο από βασικά εμπορεύματα και το ψ από μη βασικά εμπορεύματα (για λόγους απλούστευσης μόνο από μη βασικά εμπορεύματα). Είναι αυτονόητο ότι τα φ και ψ δεν είναι ούτε ίσα ούτε γραμμικώς εξαρτημένα ($\varphi \neq \alpha\psi, \alpha > 0$).

Για τις τιμές ισχύει

$$p = [p_I, p_{II}] \quad (4)$$

Καθώς και :

$$\ell = [\ell_I, \ell_{II}] \quad (5)$$

Οι υποδείκτες I και II υποδηλώνουν το βασικό και το μη βασικό υποσύστημα αντίστοιχα. Για τις τιμές επομένως ισχύει:

$$[p_I, p_{II}] = [p_I, p_{II}] \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1+r) + w[\ell_I, \ell_{II}] \quad (6)$$

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα συστήματα τιμών παραγωγής:

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

⁸⁸ Φυσικά $k < n$

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + w \ell_I \quad (7)$$

Και για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = p_{II} A_{12}(1+r) + w \ell_{II} \quad (8)$$

Καθ' όμοιο τρόπο με το προηγούμενο κεφάλαιο τυποποιούμε τις τιμές παραγωγής, ως εξής:

$$\bar{p}(\varphi)\bar{\varphi} = \beta, \beta > 0 \quad (9)$$

$$\bar{p}(\psi)\bar{\psi} = \gamma, \gamma > 0 \quad (10)$$

Για τις τιμές παραγωγής του τυπικού υποσυστήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{p}_I(\varphi) &= \bar{p}_I(\varphi)A_{11}(1+r(\varphi)) + w(\varphi)\bar{\ell}_I(\varphi) \\ \bar{p}_I(\varphi) &= w(\varphi)\bar{\ell}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \end{aligned} \quad (11)$$

Και για $R(\varphi)_{\max}$, δηλαδή για $w(\varphi)=0$, έχουμε:

$$\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))]\bar{\varphi} = 0, r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} \quad (12)$$

Για τις παραγόμενες w-r, από την (11), έχουμε:

$$w(\varphi) = \frac{\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))]\bar{\varphi}}{\bar{\ell}_I\bar{\varphi}} \quad (13)$$

$$w(\varphi) = \frac{\bar{p}_I(\varphi)\bar{\varphi}(=\beta)}{\bar{\ell}_I[I - A_{11}(1+r(\varphi))]^{-1}\bar{\varphi}} \quad (14)$$

Αντίστοιχα το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με:

$$w(\varphi)_{\max} = \frac{\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))]\bar{\varphi}}{\bar{\ell}_I\bar{\varphi}} \quad (15)$$

$$w(\varphi)_{\max} = \frac{\bar{p}_I(\varphi)\bar{\varphi}(=\beta)}{\bar{\ell}_I[I - A_{11}(1+r(\varphi))]^{-1}\bar{\varphi}} \quad (16)$$

Ενώ για $w(\varphi)=0$, δηλαδή για $r(\varphi) = R(\varphi)_{\max}$ έχουμε:

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}]\bar{\varphi}}{\bar{p}_I A_{11} \bar{\varphi}} \quad (17)$$

Το υποσύστημα που εξετάζουμε είναι ένα βασικό υποσύστημα, και ως εκ τούτου είναι μη διασπώμενο. Επομένως ισχύει για αυτό, ότι είδαμε προηγουμένως στην περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής. Με άλλα λόγια:

$$\bar{p}_I(\varphi) = p_I(\varphi) \quad (18) \text{ για } r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) \leq R(\varphi)_{\max}$$

Και:

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}} \quad (19)$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι προσδιορίζονται μονοσήμαντα οι απόλυτες τιμές των παραγόμενων από το τυπικό υποσύστημα, που παράγει το $\bar{\varphi}$ σαν καθαρό (ακαθάριστο) προϊόν-εμπορευμάτων, για δεδομένο $r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) \leq \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}}$. Επίσης προσδιορίζεται μονοσήμαντα το ονομαστικό ωρομίσθιο το οποίο για $R(\varphi)_{\max}$ είναι ίσο με μηδέν.

Έχοντας λοιπόν προσδιορίσει μονοσήμαντα, τα r, w , και $\bar{p}_I(\varphi)$, μπορούν να προσδιοριστούν και οι τιμές των, παραγόμενων από το μη βασικό υποσύστημα, εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια είναι δυνατόν να προσδιοριστεί, το $\bar{p}_{II}(\varphi)$, το οποίο

είναι για $r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) \leq \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}}$, θετικό ($\bar{p}_{II}(\varphi) > 0$).

Με άλλα λόγια:

$$\bar{p}(\varphi) = [\bar{p}_I(\varphi), \bar{p}_{II}(\varphi)] > 0 \quad (20)$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το τυπικό υποσύστημα, που εξετάζουμε, συμπίπτει, εξαιρέσει των επιπέδων δραστηριοτήτων των επιμέρους τομέων, με το δεδομένο σύστημα παραγωγής.

Επομένως για το p_{II} ισχύει:

$$p_{II} = [p_{II}A_{22} + p_I A_{12}](1+r) + w\ell \quad (21)$$

Για $w=0$ και συνεπώς $R_I = R(\varphi)_{\max} = r(\varphi)$ ισχύει:

$$p_{II} = p_{II}A_{22}(1+R_I) \quad (22)$$

Όμοια αποτελέσματα προκύπτουν για την τυποποίηση με:

$$p(\psi)\psi = \gamma, \gamma > 0$$

$$\bar{p}(\psi)\psi = \gamma \quad (23)$$

$$p_{II}(\psi)\psi = \gamma, \gamma > 0 \quad (24)$$

Το αντίστοιχο τυπικό υποσύστημα παράγει όλα τα βασικά και μη βασικά εμπορεύματα, του δεδομένου συστήματος παραγωγής.

Για τυποποίηση με $\bar{p}_I(\psi)$

$$\begin{aligned} \bar{p}_I(\psi) &= \bar{p}_I(\psi)A_{11}(1+r(\psi)) + w(\psi)\bar{\ell}_I(\psi) \\ \bar{p}_I(\psi) &= w(\psi)\bar{\ell}_I(\psi)[I - A_{11}(1+r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \end{aligned} \quad (25)$$

Και για $R(\psi)_{\max}$, δηλαδή για $w(\psi)=0$, έχουμε:

$$\bar{p}_I(\psi)[I - A_{11}(1+r(\psi))] = 0, r(\psi) = R(\psi)_{\max} \quad (26)$$

Για $\bar{p}_{II}(\psi)$

$$\bar{p}_{II}(\psi) = [\bar{p}_{II}(\psi)A_{22} + \bar{p}_I A_{12}](1+r) + w\ell_{II} \quad 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (27)$$

Και για $R(\psi)_{\max} = r(\psi)$

$$\bar{p}_{II} = \bar{p}_{II}A_{22}(1+R(\psi)_{\max}) \quad (28)$$

Προκύπτει η $w-r$:

$$w(\psi) = \frac{\bar{p}_{II}(\psi)\bar{\psi}}{\{\ell_I[I - (1+r(\psi)A_{11})^{-1}(1+r(\psi))A_{12} + \ell_{II}]\bar{\psi}\}} \quad (29)$$

$$w(\psi) = \frac{\bar{p}_{II}(\psi)\bar{\psi} - \bar{p}_I(\psi)A_{12}\bar{\psi}}{\ell_{II}\bar{\psi}} \quad (30)$$

$$w(\psi) = \frac{\bar{p}_{II}(\psi)\bar{\psi} - \bar{p}_I(\psi)A_{12}\bar{\psi}}{\{\ell_I[I - A_{11}]^{-1} + \ell_{II}\}\bar{\psi}} \quad (31)$$

Είναι φανερό ότι:

$$\bar{p}(\psi) = [\bar{p}_I(\psi), \bar{p}_{II}(\psi)] > 0 \quad (32)$$

Έγινε φανερό, ότι τα δύο τυπικά υποσυστήματα φ και ψ παρουσιάζουν τις ίδιες ιδιότητες. Μπορούμε, ακολουθώντας πάντα την λογική του εν λόγω κειμένου⁸⁹, να βρούμε τον συντελεστή αναλογίας μεταξύ των τιμών του βασικού υποσυστήματος για κάθε μια από τις τυποποιήσεις με φ ή ψ .

$$\bar{p}_I(\varphi) = \frac{w(\varphi)}{w(\psi)} \bar{p}_I(\psi) = \alpha \bar{p}_I(\psi) \quad (33)$$

$$\alpha = \frac{\beta\{\ell_I[I - A_{11}(1+r)]^{-1}(1+r)A_{12} + \ell_{II}\}\bar{\psi}}{\gamma\ell_I[I - A_{11}(1+r)]^{-1}\bar{\varphi}} \quad (34)$$

$$(\bar{p}_I(\varphi), w(\varphi)) = \alpha(\bar{p}_I(\psi), w(\psi)) \quad (35), 0 \leq r \leq R_{\max}$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \alpha[\bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r) + w(\psi)\ell_{II}] \quad (36)$$

$$\bar{p}_{II}(\psi) = \bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r) + w(\psi)\ell_{II} \quad (37)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \alpha \bar{p}_{II}(\psi) \quad (38)$$

⁸⁹ Βλ. Γ.Σταμάτης (1995) σελ. 175

Επομένως για κάθε r , $0 \leq r \leq R_{\max}$, οι σχετικές τιμές των παραγόμενων και μη παραγόμενων εμπορευμάτων του δεδομένου συστήματος παραγωγής, δεν μεταβάλλονται με την τυποποίηση.

Έστω τώρα ότι

$$r(\varphi) = r(\psi) = R_{\max} = r$$

$$\bar{p}_I(\varphi) = \delta \bar{p}_I(\psi), \delta > 0 \quad (39)$$

Τότε:

$$\bar{p}_I(\varphi) = p_I(\varphi) \quad (40)$$

$$\bar{p}_I(\psi) = p_I(\psi) \quad (41) \text{ και } \bar{p}_{II}(\psi) = p_{II}(\psi) \quad (42)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \delta p_I(\psi)(1 + R(\psi)_{\max})A_{12} \quad (43)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \delta \bar{p}_{II}(\psi) \quad (44)$$

Επομένως:

$$(\bar{p}_I(\varphi), \bar{p}_{II}(\varphi)) = \delta(\bar{p}_I(\psi), \bar{p}_{II}(\psi)) \quad (45)$$

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{p(\varphi)\varphi - p(\varphi)A\varphi}{p(\varphi)A\varphi} = \frac{\beta - p(\varphi)A\varphi}{p(\varphi)A\varphi} \quad (46)$$

Για τυποποίηση με $p(\psi)=\psi$

$$R(\psi)_{\max} = \frac{p(\psi)\psi - p(\psi)A\psi}{p(\psi)A\psi} = \frac{\gamma - p(\psi)A\psi}{p(\psi)A\psi} \quad (47)$$

$$\gamma p(\varphi)A\varphi = \beta p(\psi)A\psi \quad (48)$$

$$\delta p(\psi)\gamma A\varphi = \beta p(\psi)A\psi \quad (49)$$

$$p(\psi) [\delta\gamma\varphi - \beta\psi] = 0 \quad (50)$$

$$\delta p(\varphi)\gamma A\varphi = \beta p(\varphi)A\psi$$

$$p(\varphi)[\delta\gamma\varphi-\beta\psi]=0(51)$$

Επομένως για $r = R_{\max}$ δεν μεταβάλλονται οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων με την τυποποίηση.

Συνοψίζοντας, στο παραπάνω διασπώμενο σύστημα παραγωγής, ισχύει ότι και στα μη διασπώμενα συστήματα παραγωγής. Οι σχετικές τιμές δεν μεταβάλλονται με την τυποποίηση⁹⁰.

3.2.3 Οι σχετικές τιμές για δεδομένο πραγματικό ωρομίσθιο και μεταβαλλόμενη τυποποίηση

Αν στο παραπάνω διασπώμενο σύστημα, είναι δεδομένο το πραγματικό ωρομίσθιο, d :

τότε: $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell_X}$, τότε εξάγονται οι εξής περιπτώσεις:

3.2.3.1 Το πραγματικό ωρομίσθιο αποτελείται μόνο από βασικά εμπορεύματα

Έστω ότι:

$$d = (d_I, 0)^T \text{ και}$$

$$d\ell = \begin{bmatrix} d_I \ell_I & d_I \ell_{II} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τις τιμές παραγωγής των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων του δεδομένου συστήματος παραγωγής ισχύει:

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + p_I d_I \ell_I (52)$$

⁹⁰ βλ. Γ. Σταμάτη, (1995) σελ. 178

$$p_I[(1+r)^{-1}I - C_I] = 0, C_I \equiv A_{11}(I - d_I \ell_I)^{-1} \quad (53)$$

Και για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = p_{II} A_{12}(1+r) + p_I d_I \ell_{II} \quad (54)$$

Είναι φανερό ότι:

$$\lambda_{\max}^{A_{11}} \leq \lambda_{\max}^{C_I} \leq 1 \quad (55)$$

Ενώ για $d=0$

$$\lambda_{\max}^{C_I} = 1 \quad (56)$$

$$\text{Για } d_{\max} = \frac{Y}{\ell_X} :$$

Για $d_I = \frac{Y}{\ell_X}$, τότε το δεδομένο σύστημα παραγωγής παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα και κανένα μη βασικό. Το δεδομένο σύστημα παραγωγής, είναι επομένως μη διασπώμενο και κατά συνέπεια ισχύει, ό, τι ελέγχθηκε (όσον αφορά τις σχετικές τιμές) στην περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων παραγωγής⁹¹.

Για $d=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_I = p_I A_{11}(1+r) \\ p_{II} = p_I A_{12}(1+r) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} p_I [I - A_{11}(1+r)] = 0 \\ p_{II} = p_I A_{12}(1+r) \end{array}, \text{ όπου } r = R_{\max} \quad (57)$$

Για d , $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell_X}$, οι τιμές παραγωγής για τα βασικά και μη βασικά εμπορεύματα, προσδιορίζονται από τις σχέσεις (52), (53). Βάσει αυτών των σχέσεων ισχύει:

$$\forall d_I : \lambda_{\max}^{C_I} < 1 \exists r_i = r^* = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C_I}}{\lambda_{\max}^{C_I}} : p^*(r) > 0, i = 1, 2, 3, \dots, k. \text{ Με άλλα λόγια από τις}$$

σχέσεις (52), (53) προκύπτουν k λύσεις για το r και συνεπώς k λύσεις για το $p(r)$, εκ των οποίων μόνο μια είναι οικονομικά σημαντική, αυτή που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A .

⁹¹ Βλ. Γ.Σταμάτης(1995), Παρούσα διατριβή Κ. Γόγολος(2000), Π.Βουγιουκλάκης (1996)

Μπορεί να αποδεικτεί, ότι όποια και αν είναι η τυποποίηση, οι σχετικές τιμές μένουν αμετάβλητες⁹².

$$d_I p_I(\varphi) = d_I \Theta p_I(\psi) \Leftrightarrow w(\varphi) = \Theta w(\psi) \quad (58)$$

Με άλλα λόγια:

$$(p(\varphi), w(\varphi)) = \Theta(p(\psi), w(\psi)), \Theta > 0 \quad (59)$$

Καθώς και:

$$p(\varphi)A[\Theta\gamma\varphi - \beta\psi] = 0 \quad (60)$$

3.2.3.2 Όλα τα μη βασικά εμπορεύματα είναι μισθιακά

Όλα τα μισθιακά εμπορεύματα είναι μισθιακά, το d δηλαδή περιέχει όλα τα μη βασικά εμπορεύματα, ή μόνον αυτά. Στην περίπτωση αυτή, όλα τα προϊόντα είναι αναπαραγωγικά και για $d \neq 0$ το δεδομένο σύστημα είναι μη διασπώμενο, γιατί και η C είναι μη διασπώμενη. Όπως αποδείχτηκε παραπάνω στην περίπτωση των μη διασπώμενων μητρών, οι σχετικές τιμές παραγωγής δεν μεταβάλλονται με μεταβαλλόμενη τυποποίηση.

3.2.3.3 Το πραγματικό ωρομίσθιο αποτελείται από όλα τα εμπορεύματα που παράγει το δεδομένο σύστημα παραγωγής

Στην περίπτωση αυτή, όλα τα εμπορεύματα είναι μισθιακά, και κατά συνέπεια αναπαραγωγικά⁹³. Για $d \neq 0$ το σύστημα είναι μη διασπώμενο, γιατί και η C είναι μη διασπώμενη και επομένως ισχύει ότι ελέγχθηκε στην παραπάνω περίπτωση.

⁹² βλ. Γ. Σταμάτη, (1995) , σελίδα 204-205

3.2.3.4 Το πραγματικό ωρομίσθιο αποτελείται i) από ένα ή όλα τα βασικά εμπορεύματα και από ένα ή μερικά (αλλά όχι όλα) τα μη βασικά εμπορεύματα που παράγει το δεδομένο σύστημα παραγωγής ή ii) από ένα ή περισσότερα (αλλά όχι όλα) τα μη βασικά εμπορεύματα.

Τότε είναι:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & B & D \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} A_{11} & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, [B, D] = A_{12}, \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{A}_{12}$$

Η μήτρα B αποτελεί τις ενδιάμεσες εισροές των διαδικασιών παραγωγής, που παράγουν μη βασικά εμπορεύματα, που περιέχουν περιέχονται στο πραγματικό ωρομίσθιο.

Η μήτρα D αποτελεί τις ενδιάμεσες εισροές των διαδικασιών παραγωγής, που παράγουν μη βασικά εμπορεύματα, που δεν περιέχονται στο πραγματικό ωρομίσθιο.

Οι υποδείκτες α , μ υποδηλώνουν αναπαραγωγικό και μη αναπαραγωγικό υποσύστημα αντίστοιχα. Επομένως για τις τιμές παραγωγής ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a = p_a \bar{A}_{11}(1+r) + p_a d_a \ell_a \\ p_\mu = p_a \bar{A}_{12}(1+r) + p_a d_a \ell_\mu \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} p_a [I(1+r)^{-1} - C_a] = 0 \\ p_\mu = p_a [\bar{A}_{12}(1+r) + d_a \ell_\mu] \end{array}, C_a \equiv \bar{A}_{11}(I - d_a \ell_a)^{-1} \quad (61)$$

$$\text{Και } \lambda_{\max}^{\bar{A}_{11}} = \lambda_{\max}^{A_{11}} \leq \lambda_{\max}^{C_a} \leq 1$$

Όταν το $d=0$ και συνεπώς το ποσοστό κέρδους είναι μέγιστο, τότε $C_a = \bar{A}_{11} = A_{11}$, $\lambda_{\max}^{\bar{A}_{11}} = \lambda_{\max}^{A_{11}} = \lambda_{\max}^{C_a}$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα διασπάται σε βασικό και μη βασικό υποσύστημα και ισχύει ότι και στις παραπάνω περιπτώσεις. Δηλαδή οι σχετικές τιμές παραγωγής, είναι ανεξάρτητες από την μεταβολή της τυποποίησης.

⁹³ βλ. Γ. Σταμάτη (1995), σελ523-525

Όταν τώρα είναι: $d_I = \frac{Y}{\ell X}$ και συνεπώς

$D=0, A = \bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} A_{11} & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\lambda_{\max}^{C_a} = 1$, στην περίπτωση 2, όταν το πραγματικό

ωρομίσθιο είναι μέγιστο και τέλος για d , $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X}$, ισχύει ότι και στην περίπτωση

1 για d , $0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell X}$

3.2.3.4.1 Οι σχετικές τιμές σε διασπώμενα συστήματα με μη βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων.

Το σύστημα παραγωγής που περιγράφουμε, πλην των βασικών και μη βασικών εμπορευμάτων, παράγει και μη βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται άμεση ή έμμεσα στην παραγωγή όλων των μη βασικών εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια η A είναι της μορφής⁹⁴:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Τόσο η A_{11} όσο και η A_{22} ⁹⁵ είναι μη διασπώμενες.

Τα μη βασικά εμπορεύματα, μπορούν να εισέρχονται σε τέτοιες αναλογίες στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων ώστε:

$\lambda_{\max}^{A_{11}} > \lambda_{\max}^{A_{22}}$ και συνεπώς $R_{II} > R_I$ (62) είτε:

⁹⁴ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ 207

⁹⁵ Οι διαστάσεις της A_{22} είναι $(n-k) \times (n-K)$

$\lambda_{\max}^{A_{11}} < \lambda_{\max}^{A_{22}}$ και συνεπώς $R_{II} < R_I$ (63), όπου $R_{I,II}$ το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού και του μη βασικού υποσυστήματος αντίστοιχα και για τα οποία ισχύει:

$$R_I = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}} \quad \text{και} \quad (64)$$

$$R_{II} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{22}}}{\lambda_{\max}^{A_{22}}}, \quad (65)$$

3.2.3.4.2 οι σχετικές τιμές για δεδομένο ποσοστό κέρδους και μεταβαλλόμενη τυποποίηση

Εάν οι μισθοί πληρώνονται στο τέλος της περιόδου, τότε ισχύει:

$$p = pA(1+r) + w\ell \quad (66)$$

$$[p_I, p_{II}] = [p_I, p_{II}] \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1+r) + w[\ell_I, \ell_{II}] \quad (67)$$

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα συστήματα τιμών παραγωγής⁹⁶:

Αρχικά για το βασικό υποσύστημα:

$$p_I = p_I A_{11}(1+r) + w\ell_I, 0 \leq r \leq R_{\max} \quad (68)$$

Και για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II} = [p_I A_{12} + p_{II} A_{22}](1+r) + w\ell_{II}, 0 \leq r \leq R_{\max} \quad (69)$$

Από τις σχέσεις (70) και (71) παίρνουμε αντίστοιχα:

$$p_I [I - A_{11}(1+r)] = 0, r = R_{\max} \quad (70)$$

⁹⁶ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ. 208

$$p_I = w\ell[I - A_{11}(1+r)]^{-1}, 0 \leq r < R_{\max} \quad (1,72 \alpha)$$

και

$$p_I[I - A_{11}(1+r)] = 0, r = R_{\max} \quad (71)$$

$$p_I = w\ell[I - A_{11}(1+r)]^{-1}, 0 \leq r < R_{\max} \quad (1,72 \alpha)$$

Περίπτωση 1^η : $R_{II} > R_I$

Τυποποιούμε με $\bar{p}(\varphi) = p(\varphi) = p$

$$\bar{p}_I(\varphi) = w(\varphi)\ell[I - A_{11}(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \quad (72)$$

$$\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))] = 0, r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} \quad (73)$$

Έστω ότι ισχύει:

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}} = R_I \quad (74)$$

, τότε ισχύει $\bar{p}_I(\varphi) > 0$ για το οικονομικά σημαντικό διάστημα τιμών του $r(\varphi)$.

Για το p_{II} ισχύει:

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = [\bar{p}_I(\varphi)A_{12}(1+r(\varphi)) + w(\varphi)\ell_{II}[I - A_{12}(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \quad (75)$$

Καθώς και:

$$\bar{p}_{II}(\varphi)[I - A_{12}(1+r(\varphi))] = \bar{p}_I(\varphi)A_{12}(1+r(\varphi)), r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} \quad (76)$$

Έστω ότι ισχύει η (76) από τις (64),(77),(78) ισχύει:

$$\bar{p}(\varphi) = (\bar{p}_I(\varphi), \bar{p}_{II}(\varphi)) > 0, 0 \leq r(\varphi) \leq R(\varphi)_{\max}, \quad (77)$$

Έστω πάλι ότι ισχύει η (64) αν οι τιμές παραγωγής τυποποιηθούν με την (10) ισχύει:

$$\bar{p}_I(\psi) = w(\psi)\ell[I - A_{11}(1+r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (78)$$

$$\bar{p}_I(\psi)[I - A_{11}(1+r(\psi))] = 0, r(\psi) = R(\psi)_{\max} \quad (79)$$

, τότε για το οικονομικά σημαντικό διάστημα τιμών του $r(\varphi)$ ισχύει $\bar{p}_I(\varphi) > 0$.

Για το p_{II} ισχύει:

$$\bar{p}_{II}(\psi) = [\bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r(\psi)) + w(\psi)\ell_{II}][I - A_{12}(1+r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (80)$$

Καθώς και:

$$\bar{p}_{II}(\psi)[I - A_{12}(1+r(\psi))] = \bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r(\psi)), r(\psi) = R(\psi)_{\max} \quad (81)$$

Έστω ότι ισχύει η (76) από τις σχέσεις (64), (1,80), (81), (82), (83) ισχύει:

$$\bar{p}(\psi) = (\bar{p}_I(\psi), \bar{p}_{II}(\psi)) > 0, 0 \leq r(\psi) \leq R(\psi)_{\max}, \quad (82)$$

Είναι φανερό, ότι στην περίπτωση όπου ισχύει η (64) οι σχετικές τιμές παραγωγής, παραμένουν αμετάβλητες και για τις δύο ποιο πάνω τυποποιήσεις, εντός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος του ποσοστού κέρδους⁹⁷.

Η σύγκριση των (75) και (80) δίνει για δεδομένο $r(\varphi)$, $0 \leq r(\varphi) \leq R(\varphi)_{\max}$

$$\bar{p}_I(\varphi) = \frac{w(\varphi)}{w(\psi)} \bar{p}_I(\psi) = \alpha \bar{p}_I(\psi) \quad (83)$$

Για το $w(\varphi)$ προκύπτει από την (74):

$$w(\varphi) = \frac{\bar{p}_I(\varphi)\varphi(=\beta)}{\ell_{I1}[I - A_{11}(1+r)]^{-1}\bar{\varphi}} \quad (84)$$

Και για το $w(\psi)$, από τις (74) και (82)

$$w(\psi) = \frac{\bar{p}_{II}(\psi)\bar{\psi}(=\gamma)}{\{\ell_{II}[I - A_{11}(1+r)]^{-1}(1+r)A_{12} + \ell_{II}\}[I - A_{22}(1+r)]^{-1}\bar{\psi}} \quad (85)$$

Ενώ από τις (86) και (87) προκύπτει:

⁹⁷ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ. 210

$$\frac{w(\varphi)}{w(\psi)} = \alpha = \frac{\beta\{\ell_I[I - A_{11}(1+r)]^{-1}(1+r)A_{12} + \ell_{II}\}[I - A_{22}(1+r)]^{-1}\bar{\psi}}{\gamma\{\ell_I[I - (1+r)A_{11}]^{-1}\bar{\varphi}\}} \quad (86)$$

Από τις (77) και (82) προκύπτει:

$$p_{II}(\varphi) = \frac{w(\varphi)}{w(\psi)} \bar{p}_{II}(\psi) = \alpha \bar{p}_{II}(\psi) \quad (87)$$

Επομένως

$$(p(\varphi), w(\varphi)) = \alpha(p(\psi), w(\psi)) \quad (88)$$

Συνεπώς εντός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος του ποσοστού κέρδους, οι σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων, είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση.

Όταν τώρα το ποσοστό κέρδους είναι και για τις δυο τυποποιήσεις μέγιστο, τα διανύσματα $p(\varphi)$ και $p(\psi)$ είναι αριστερά ιδιοδιανύσματα της μήτρας A_{11} , η οποία είναι θετική και ως εκ τούτου τα αριστερά της ιδιοδιανύσματα είναι θετικά. Τα διανύσματα $p(\varphi)$ και $p(\psi)$ είναι μεταξύ τους γραμμικά εξαρτημένα:

$$\bar{p}_I(\varphi) = \delta \bar{p}_I(\psi), \delta > 0 \quad (89)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \delta \bar{p}_{II}(\psi)(1+r)A_{12}[I - (1+r)A_{22}]^{-1} \quad (90)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = \delta \bar{p}_{II}(\psi), \delta > 0 \quad (91)$$

Συνεπώς

$$(p_I(\varphi), p_{II}(\varphi)) = \delta(p_I(\psi), p_{II}(\psi)) = p(\varphi) = \delta p(\psi) \quad (92)$$

Με άλλα λόγια οι σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση⁹⁸.

Ας προσδιορίσουμε το δ .

⁹⁸ Η ανεξαρτησία των σχετικών τιμών στην περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής, από την τυποποίηση των τιμών, έχει ιδιαίτερη σημασία όπως θα δούμε και στην συνέχεια της παρούσας διατριβής, για την επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής

$$R(\varphi)_{\max} = \frac{p(\varphi)\varphi - p(\varphi)A\varphi}{p(\varphi)A\varphi} = \frac{\beta - p(\varphi)A\varphi}{p(\varphi)A\varphi} \quad (93)$$

Και

$$R(\psi)_{\max} = \frac{p(\psi)\psi - p(\psi)A\psi}{p(\psi)A\psi} = \frac{\gamma - p(\psi)A\psi}{p(\psi)A\psi} \quad (94)$$

Για $r = R(\varphi)_{\max} = R(\psi)_{\max}$ (95) έχουμε:

$$\gamma p(\varphi)A\varphi = \beta p(\psi)A\psi \Rightarrow$$

$$p(\varphi)A(\delta\gamma\varphi - \beta\psi) = 0 \quad (96)$$

Η την $\delta\gamma p(\psi)A\varphi = \beta p(\psi)A\psi \Rightarrow$

$$p(\psi)A(\delta\gamma\varphi - \beta\psi) = 0 \quad (97)$$

Μπορούμε να πούμε, ότι σε διασπώμενα συστήματα παραγωγής, όταν ισχύει η $R_{II} > R_I$, οι σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων, δεν μεταβάλλονται με την μεταβολή της τυποποίησης.

Περίπτωση 2.

Τυποποιούμε τις τιμές με τις (9) και (10) και προκύπτουν οι ακόλουθες, όμοιες με παραπάνω, σχέσεις για τις τιμές παραγωγής:

Για τυποποίηση με (9)

$$\bar{p}_I(\varphi) = w(\varphi)\ell[I - A_{11}(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \quad (98)$$

$$\bar{p}_I(\varphi)[I - A_{11}(1+r(\varphi))] = 0, r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} \quad (99)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) = [\bar{p}_I(\varphi)A_{12}(1+r(\varphi)) + w(\varphi)\ell_{II}][I - A_{22}(1+r(\varphi))]^{-1}, 0 \leq r(\varphi) < R(\varphi)_{\max} \quad (100)$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi)[I - A_{22}(1+r(\varphi))] = \bar{p}_I(\varphi)A_{12}(1+r(\varphi)), r(\varphi) = R(\varphi)_{\max} \quad (101)$$

Για τυποποίηση με (10)

$$\bar{p}_I(\psi) = w(\psi)\ell[I - A_{11}(1+r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (102)$$

$$\bar{p}_I(\psi)[I - A_{11}(1+r(\psi))] = 0, r(\psi) = R(\psi)_{\max} \quad (103)$$

Καθώς και

$$\bar{p}_{II}(\psi) = [\bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r(\psi)) + w(\psi)\ell_{II}][I - A_{12}(1+r(\psi))]^{-1}, 0 \leq r(\psi) < R(\psi)_{\max} \quad (104)$$

$$\bar{p}_{II}(\psi)[I - A_{12}(1+r(\psi))] = \bar{p}_I(\psi)A_{12}(1+r(\psi)), r(\psi) = R(\psi)_{\max} \quad (105)$$

Έστω ότι κατά την τυποποίηση με (9) υποθέσουμε ότι ισχύει:

$$r(\varphi) = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{22}}}{\lambda_{\max}^{A_{22}}} = (R_{II}) \text{ τότε}$$

$$\forall r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) < R_{II} < R_I \Rightarrow p(\varphi) = [p_I(\varphi), p_{II}(\varphi)] > 0$$

$$\forall r(\varphi), 0 \leq r(\varphi) = R_{II} (< R_I) \Rightarrow p(\varphi) = [p_I(\varphi), p_{II}(\varphi)] = 0 \quad ^{99}$$

$$\forall r(\varphi), R_{II} \leq r(\varphi) < R_I \Rightarrow p(\varphi) = [p_I(\varphi), p_{II}(\varphi)] < 0$$

Επομένως για $r(\varphi)$ που τείνει αυξανόμενο(μειούμενο) στο R_{II} , οι τιμές με την σειρά τους τείνουν στο $+\infty(-\infty)$ αντίστοιχα.

Αν τώρα γίνει η υπόθεση ότι ισχύει:

$$r(\psi) = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{22}}}{\lambda_{\max}^{A_{22}}} = (R_{II}) \text{ τότε}$$

Και γίνει η υπόθεση με την (10)

$$\forall r(\psi), 0 \leq r(\psi) < R_{II} < R_I \Rightarrow p(\psi) = [p_I(\psi), p_{II}(\psi)] > 0$$

$$\forall r(\psi), 0 \leq r(\psi) = R_{II} (< R_I) \Rightarrow p_I(\psi) = 0, p_{II}(\psi) > 0$$

⁹⁹ Οι τιμές δεν είναι προσδιορισμένες

$$\forall r(\psi), R_{II} \leq r(\psi) < R_I \Rightarrow p_I(\psi) > 0, p_{II}(\psi) < 0$$

Στην συνέχεια εξετάζεται αν και τα πόσον οι σχετικές τιμές μεταβάλλονται με μεταβαλλόμενη τυποποίηση.

- Για $r(=r(\varphi)=r(\psi)), 0 \leq r \leq R_{II}$, ισχύει ότι και στην πρώτη περίπτωση, οι σχετικές τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση.
- Για $r(=r(\varphi)=r(\psi)), = R_{II}$

Αρχικά γίνεται η τυποποίηση με (9)

$$w(\varphi) > 0$$

$$p_I(\varphi) > 0$$

$p_{II}(\varphi) = 0$, με άλλα λόγια δεν είναι προσδιορισμένες οι τιμές για το μη βασικό υποσύστημα.

Για τυποποίηση με (10)

$$w(\psi) = 0$$

$$p_I(\psi) = 0$$

$$p_{II}(\psi) > 0$$

Είναι φανερό, ότι σε αυτήν την περίπτωση οι σχετικές τιμές μεταβάλλονται με την τυποποίηση, αφού δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ $p_I(\varphi), p_{II}(\varphi)$ και $p_I(\psi), p_{II}(\psi)$ για $r(=r(\varphi)=r(\psi)), = R_{II}$ ¹⁰⁰

- Για $r, R_{II} < r < R_I$

Για τυποποίηση με την (1)

$$w(\varphi) > 0$$

$$p_I(\varphi) > 0$$

¹⁰⁰ Για την απόδειξη βλ. Γ. Σταμάτη, (1995), σελίδα 215

$$p_{II}(\varphi) < 0$$

Για τυποποίηση με την (2)

$$w(\psi) < 0$$

$$p_I(\psi) < 0$$

$$p_{II}(\psi) > 0$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε αρνητική αναλογία μεταξύ των απολύτων τιμών των παραγόμενων και μη εμπορευμάτων από τα δύο τυπικά υποσυστήματα:

$$[p(\varphi), w(\varphi)] = -\alpha[p(\psi), w(\psi)]$$

- Για $r=R_I$

Για τυποποίηση με την (1)

$$w(\varphi) = 0$$

$$p_I(\varphi) > 0$$

$$p_{II}(\varphi) < 0$$

Για τυποποίηση με την (2)

$$w(\psi) < 0$$

$$p_I(\psi) < 0$$

$$p_{II}(\psi) > 0$$

Και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει αρνητική αναλογία μεταξύ των απολύτων τιμών των παραγόμενων και μη εμπορευμάτων από τα δύο τυπικά υποσυστήματα¹⁰¹.

¹⁰¹ Βλ.Γ.Σταμάτης (1995) σελ.218

3.3 Οι σχετικές τιμές σε διασπώμενα συστήματα για δεδομένο πραγματικό ωρομίσθιο και μεταβαλλόμενη τυποποίηση.

Έστω ότι

$$[p_I, p_{II}] = [p_I, p_{II}] \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} (1+r) + [p_I, p_{II}] \begin{pmatrix} d_I \ell_I & d_I \ell_{II} \\ d_I \ell_{II} & d_{II} \ell_{II} \end{pmatrix} \quad (106)$$

Στην περίπτωση αυτή για μια ακόμα φορά εξάγονται οι εξής περιπτώσεις:

A) το d αποτελείται και από μη βασικά εμπορεύματα. Τότε, επειδή A_{11} και A_{22} είναι μη διασπώμενες¹⁰². Στην περίπτωση αυτή, ισχύει ότι ελέγχθηκε παραπάνω για τα μη διασπώμενα συστήματα με δεδομένο d και μεταβαλλόμενη τυποποίηση. Με άλλα λόγια και σε αυτήν την περίπτωση οι σχετικές τιμές δεν μεταβάλλονται με την τυποποίηση¹⁰³.

Για $d=0$ και συνεπώς $C=A$, η A και κατά συνέπεια η C είναι μη διασπώμενες. Τότε έχουμε:

$$p_I [I - A_{11}(1+r)] = 0 \quad (107)$$

Και

$$p_{II} = [p_I A_{12}(1+r)] [I - (1+r)A_{22}]^{-1} \quad (108)$$

Βλέπουμε ότι η περίπτωση αυτή είναι η ίδια με την περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων, όταν το ποσοστό κέρδους είναι μέγιστο, όταν δηλαδή οι σχετικές τιμές δεν μεταβάλλονται με την τυποποίηση.

B) Για $d=0$, $C=A$ και σε αυτήν την περίπτωση οι σχετικές τιμές δεν μεταβάλλονται με μεταβαλλόμενη τυποποίηση.

¹⁰² Για $d \neq 0$ η $(d\ell + A)$ και συνεπώς η C είναι μη διασπώμενες

¹⁰³ Βλ.Γ.Σταμάτης (1995) σελ.219

Γ) Για $d_{\max} = \frac{Y}{\ell_X}$ δεν παράγονται καθόλου μη μισθιακά εμπορεύματα. Και σε αυτήν την περίπτωση η C είναι μη διασπώμενη και ως εκ τούτου οι σχετικές τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση.

Δ) Για $d, 0 \leq d \leq \frac{Y}{\ell_X}$ η C είναι μη διασπώμενη. Επομένως για τις τιμές παραγωγής ισχύει για $d_{II} = 0$

$$p_I[I(1+r)^{-1} - C_{11}] = 0 \quad (109)$$

$$C_{11} \equiv A_{11}[I - d_I \ell_I]^{-1}$$

Και

$$p_{II} = p_I[d_I \ell_{II} + A_{12}(1+r)[I - (1+r)A_{22}]^{-1} \quad (110)$$

Από τις (111) και (112), ότι όταν:

$\lambda_{\max}^{C_{11}} > \lambda_{\max}^{A_{22}}$ και συνεπώς $r < R_{II}$, οι σχετικές τιμές παραγωγής $p = (p_I, p_{II})$ είναι για $r = \frac{1 - \lambda_{\max}^{C_{11}}}{\lambda_{\max}^{C_{11}}}$, ανεξάρτητες από την μεταβολή της τυποποίησης.

Αντίθετα όταν $\lambda_{\max}^{C_{11}} < \lambda_{\max}^{A_{22}}$ και συνεπώς $r > R_{II}$, οι σχετικές τιμές παραγωγής μεταβάλλονται με την τυποποίηση¹⁰⁴.

Ε) Για $d, 0 \leq d \leq d_{(r < R_{II})}$, οι σχετικές τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση.

Ισχύει με άλλα λόγια ότι και στα μη διασπώμενα συστήματα παραγωγής

ΣΤ)) Για $d, 0 \leq d \leq d_{(r = R_{II})}$,

Για τυποποίηση με την (1)

$$\bar{p}_I(\varphi) > 0$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi) \text{ μη προσδιορισμένο}$$

¹⁰⁴ Γιατί συμβαίνει αυτό, βλ. Γ. Σταμάτη σελ.221-223

$$w(\varphi) = \bar{p}_I(\varphi)d$$

$$r(\varphi) = R_{II}$$

Για τυποποίηση με την (2)

$$\bar{p}_I(\psi) = 0$$

$$\bar{p}_{II}(\varphi)(= p_{II}(\psi)) > 0 \text{ μη προσδιορισμένο}$$

$$w(\varphi) = \bar{p}_I(\varphi)d = 0$$

$$r(\varphi) = R_{II}$$

Και στην περίπτωση αυτή οι σχετικές τιμές παραγωγής, δεν είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση¹⁰⁵.

Z)) Για $d, d_{(r=R_{II})} \leq d \leq d_{(r=R_I)}$,

Για τυποποίηση με την (1)

$$w(\varphi) > 0$$

$$\bar{p}_I(\varphi) > 0$$

$$p_{II}(\varphi) < 0$$

$$R_{II} < r(\varphi) < R_I$$

Για τυποποίηση με την (2)

$$w(\psi) = 0$$

$$p_I(\psi) = 0$$

$$p_{II}(\psi) > 0$$

$$r(\psi) = R_{II}$$

¹⁰⁵ Βλ. βλ. Γ. Σταμάτη,(1995) , σελίδα 224

Και σε αυτήν την περίπτωση οι σχετικές τιμές παραγωγής μεταβάλλονται με την τυποποίηση.

Η) Τέλος για $d, d = d_{r=R_l}$, δηλαδή για $d_{\max} = \frac{Y}{\ell_X}$, όλα τα παραγόμενα εμπορεύματα είναι αναπαραγωγικά και κατά συνέπεια το σύστημα είναι μη διασπώμενο. Συνεπώς οι σχετικές τιμές παραγωγής, είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση.

3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παραπάνω κείμενο, εξετάστηκε το αν και κατά πόσον οι σχετικές τιμές μεταβάλλονται με μεταβαλλόμενη τυποποίηση, σε συστήματα απλής παραγωγής

Στο πρώτο κομμάτι στα έγινε η παραδοχή για την ύπαρξη ενός μη διασπώμενου συστήματος παραγωγής. Στην συνέχεια έγινε η υπόθεση της ύπαρξης δύο τυπικών υποσυστημάτων σε αυτό. Έγινε φανερό, ότι με δύο τυχαίες τυποποιήσεις, στα μη διασπώμενα συστήματα, οι τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων παραμένουν αμετάβλητες, είτε το πραγματικό ωρομίσθιο είναι δεδομένο είτε όχι. Τα διανύσματα τιμών που προέκυψαν από τις δύο τυποποιήσεις ήταν σε κάθε περίπτωση μεταξύ τους ομόσημα (θετικά) και γραμμικώς εξαρτημένα. Και τα δύο τυπικά υποσυστήματα συνεπίπτανε εξαιρέσει των επιπέδων δραστηριότητας με το δεδομένο σύστημα παραγωγής.

Κατά συνέπεια η μεταβολή της τυποποίησης σε μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής, είναι ταυτόσημη με μια απλή μεταβολή στα επίπεδα δραστηριότητας του δεδομένου συστήματος παραγωγής.

Η κατάσταση στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής είναι διαφορετική. Στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής, δεν υπάρχει κανένας λόγος τα μέγιστα ποσοστά κέρδους των δύο υποσυστημάτων (βασικού και μη βασικού) να είναι ίσα.

Αρχικά εξετάστηκε η περίπτωση, όπου μόνο βασικά εμπορεύματα εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει, ότι και στα μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής. Οι σχετικές τιμές των εμπορευμάτων, δεν μεταβάλλονται με την μεταβολή της τυποποίησης.

Στην συνέχεια εξετάστηκε η περίπτωση, όπου και μη βασικά εμπορεύματα εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων. Αρχικά γίνεται η υπόθεση, ότι το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος είναι μεγαλύτερο από αυτό του βασικού. Στην περίπτωση αυτή, εντός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος τιμών οι σχετικές τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση. Αντίθετα στην περίπτωση, όπου το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού υποσυστήματος είναι μεγαλύτερο από αυτό του μη βασικού, οι τιμές δεν είναι ανεξάρτητες από την μεταβολή της τυποποίησης και μάλιστα μεταβάλλονται με αυτήν. Αυτό συμβαίνει γιατί στην περίπτωση αυτή, το μέγιστο γενικό ποσοστό κέρδους είναι εκτός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών του ποσοστού κέρδους, για το μη βασικό υποσύστημα. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει μια αντιστοιχία των τιμών των δύο τυπικών υποσυστημάτων¹⁰⁶, αλλά μια αρνητική αναλογία.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στην περίπτωση, όπου το πραγματικό ωρομίσθιο είναι δεδομένο. Όταν το ποσοστό κέρδους είναι εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών του r , τότε οι τιμές είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση. Όταν το ποσοστό κέρδους και ποιο συγκεκριμένα το αντιστοιχούν σε αυτό πραγματικό ωρομίσθιο, είναι εκτός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος τιμών, τότε οι τιμές μεταβάλλονται με την τυποποίηση. Μοναδική διαφορά σε σχέση με τα διασπώμενα συστήματα, όπου δεδομένο είναι το ποσοστό κέρδους, είναι ότι όταν το πραγματικό ωρομίσθιο του συστήματος αντιστοιχεί στο πραγματικό ωρομίσθιο που ισχύει για το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού υποσυστήματος ($d, d = d_{r=R_f}$). Τότε όλα τα παραγόμενα εμπορεύματα είναι αναπαραγωγικά, και ως εκ τούτου το σύστημα που τα παράγει, είναι μη διασπώμενο.

Εν κατακλείδι, ο λόγος που στα διασπώμενα συστήματα παραγωγής, οι τιμές μεταβάλλονται με την τυποποίηση, είναι ότι και στα δύο τυπικά υποσυστήματα

¹⁰⁶ Αλλά αντίθετα, παρουσιάζεται αρνητική αναλογία στις σχετικές τιμές παραγωγής ανάμεσα στο υποσύστημα που παράγει το ϕ σαν καθαρό προϊόν και σε αυτό που παράγει το ψ σαν καθαρό προϊόν.

καλείται να ισχύσει ένα ποσοστό κέρδους, το οποίο είναι εκτός του οικονομικά σημαντικού διαστήματος του r και για το οποίο οι τιμές πρέπει να είναι θετικές, πράγμα το οποίο είναι από μόνο του αντιφατικό.

4 Η w-r σχέση

Όπως είδαμε παραπάνω και όπως θα δούμε και στην συνέχεια θα γίνεται συχνά αναφορά στην σχέση ονομαστικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους γνωστή και ως w-r σχέση. Η σχέση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς σε αυτήν βασίζεται και το w-r κριτήριο όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Η σχέση w-r σε νεοκλασικούς οικονομολόγους όπως ο P.Samuelson, συχνά αναφέρεται και ως Price-Factor Frontier. Η w-r σχέση όπως άλλωστε και το σύστημα τιμών παραγωγής εκφράζουν καταστάσεις ισορροπίας μεταξύ της αγοράς κεφαλαίου και αυτού της εργασίας¹⁰⁷.

Η w-r σχέση είναι προϊόν τυποποίησης και μεταβάλλεται με την τυποποίηση των τιμών, όπως θα δούμε στην συνέχεια, και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον στην παρούσα εργασία γίνεται λόγος για w-r σχέση τυπικών υποσυστημάτων και ουχί για w-r σχέση δεδομένων τεχνικών παραγωγής¹⁰⁸.

Μια οικονομία, αποφασίζοντας ορθολογικά, επιλέγει σημεία πάνω στην w-r καμπύλη, καθώς σε αντίθετη περίπτωση αυτό θα καθιστούσε μια τέτοια απόφαση μη ορθολογική. Τα σημεία πάνω στην w-r καμπύλη είναι σημεία ισορροπίας και κατά συνέπεια τεχνολογικά optimum.

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει στο πώς εξάγεται η w-r σχέση, ποιο είναι το σχήμα, η κλίση της και πότε αυτή επηρεάζεται από μία μεταβολή στην τυποποίηση των τιμών.

¹⁰⁷ Αν και στην παρούσα εργασία, ορθώς κατά την γνώμη μας, δεν γίνεται λόγος για αγορά κεφαλαίου αλλά για εισροές σε εμπορεύματα για την παραγωγή εμπορευμάτων. Αναφερόμαστε δηλαδή σε μια οικονομία *a la Sraffa*.

¹⁰⁸ Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται λόγος για την περίπτωση της απλής παραγωγής. Στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής οι σχέσεις θα είχαν την ίδια μορφή και την ίδια συμπεριφορά, στα well-behaved διαστήματά τους. Για περισσότερα βλ.Γ. Σταμάτης (1996) σελ 151-204 καθώς και B. Schefold (1978a) σελ 29-53.

4.1 Πώς εξάγεται η w-r σχέση

Εκκινώντας από το γνωστό σύστημα τιμών, και κάτω από τις γνωστές προϋποθέσεις, προκύπτει για τις τιμές παραγωγής:

$$p = pA(1+r) + w\ell \quad (111)$$

Για να προσδιοριστούν πλήρως οι τιμές, όπως είδαμε και προηγουμένως, πρέπει να εισαχθεί μία εξίσωση τυποποίησης¹⁰⁹ :

$$py = b, b > 0 \quad (112)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (1) με y από δεξιά, προκύπτει:

$py = pAy(1+r) + w\ell y$, και από εκεί για το ονομαστικό ωρομίσθιο:

$$w = \frac{p[I-A]y}{\ell y} - \frac{pAy}{\ell y}r = \pi_{\varepsilon,y} - K_y r, \quad \pi_{\varepsilon,y} \equiv \frac{p[I-A]y}{\ell y}, K_y \equiv \frac{pAy}{\ell y} \quad (113)$$

Σαν $\pi_{\varepsilon,y}$, ορίζεται η σταθερή παραγωγικότητα της εργασίας, εκφρασμένη σε όρους τιμών παραγωγής. Ταυτόχρονα αποτελεί όμως και το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο της τεχνικής (τυπικού υποσυστήματος).

Από την άλλη πλευρά σαν K_y , ορίζεται η ένταση κεφαλαίου του (τυπικού υπο-) συστήματος εκφρασμένο και αυτό σε όρους τιμών παραγωγής. Το K_y αποτελεί ταυτόχρονα και το μέσο κέρδος ανά μονάδα ζωντανής εργασίας¹¹⁰.

4.2 Η κλίση της w-r καμπύλης

Η κλίση της w-r καμπύλης μπορεί να βρεθεί εύκολα αν παραγωγίσουμε την σχέση (3) ως προς το ποσοστό κέρδους και από την οποία προκύπτει:

¹⁰⁹ Στην παρούσα φάση δεν μας ενδιαφέρει ποιο το είδος της τυποποίησης. Ωστόσο στην συνέχεια θα εξεταστούν οι μεταβολές που επιφέρει μία αλλαγή από το ένα τυπικό εμπόρευμα στο άλλο.

¹¹⁰ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ 254

$$\frac{dw}{dr} = \frac{d\pi_{\varepsilon,y}}{dr} - \frac{dK_y}{dr}r - K_y \quad (114)$$

,ωστόσο $\frac{d\pi_{\varepsilon,y}}{dr} = 0$ ¹¹¹. Κατά συνέπεια:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{dK_y}{dr}r - K_y \quad (115)$$

Με την σειρά του το μέγεθος $\frac{dK_y}{dr}$ είναι ίσο με¹¹², όπως προκύπτει από την σχέση (3):

$$\frac{dK_y}{dr} = (pA + \frac{dw}{dr}\ell)[I - A(1+r)]^{-1} \frac{A[I - A]^{-1}y}{\ell[I - A]^{-1}y} \quad (116)$$

4.3 Το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο

Όσον αφορά το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο αυτό είναι, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (1) και (2) ίσο με:

$$w_{\max} = \frac{py}{\ell[I - A]^{-1}y} = \frac{b}{\omega y}, \omega \equiv \ell[I - A]^{-1} \quad (117)$$

Από την σχέση (7) προκύπτει ότι το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο, εκτός από την σταθερή παραγωγικότητα της εργασίας, είναι ίση και με τον λόγο της τιμής του τυπικού εμπορεύματος, προς την αξία του.

¹¹¹ Οι λόγοι για τους οποίους το μέγεθος $\frac{d\pi_{\varepsilon,y}}{dr} = 0$, είναι οι εξής βλ. Γ.Σταμάτης (1995) σελ 255

¹¹² Επιπλέον για βλ. κ Γ.Σταμάτη (1996) σελ 262-263.

Ένα ακόμα πράγμα το οποίο πρέπει να αναφερθεί, είναι το εάν και κατά πόσον το πρόσημο της τιμακής έντασης κεφαλαίου είναι θετικό ή όχι. Όπως φαίνεται και πάλι στο Γ.Σταμάτης (1996) σελ, 284-285 το μέγεθος αυτό είναι θετικό εξ' ορισμού, και ίσο με:

$$K_y = \frac{pA[I - A]^{-1}y}{\ell[I - A]^{-1}y} > 0, \forall w, 0 \leq w \leq w_{\max}, r, 0 \leq r \leq R_{\max}$$

Από την σχέση (7) είναι φανερό, ότι το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο εξαρτάται αφενός από την τυποποίηση των τιμών, και αφετέρου από το ίδιο το τυπικό εμπόρευμα, με το οποίο έχουν τυποποιηθεί οι τιμές παραγωγής. Κατά συνέπεια το μέγεθος αυτό είναι και ανεξάρτητο από το ποσοστό κέρδους¹¹³.

4.4 Το μέγιστο ποσοστό κέρδους

Παραπάνω, στο κεφάλαιο όπου προσδιορίζονται οι τιμές, είδαμε ότι το μέγιστο ποσοστό είναι εκείνο το ποσοστό κέρδους που προκύπτει όταν θέσουμε το ονομαστικό ωρομίσθιο ίσο με το μηδέν, στην περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων προκύπτει αν θέσουμε το ονομαστικό ωρομίσθιο καθώς και τις ποσότητες των εισροών από άλλα υποσυστήματα ίσα με το μηδέν.

Για την περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, προκύπτει από την σχέση (1):

$$p[I - A(1 + R)] = 0 \quad (118)$$

Όπου από το γνωστό θεώρημα του Frobenius προκύπτουν η δυνατές λύσεις για το σύστημα (9). Από τις η αυτές λύσεις επιλέγεται η μικρότερη από αυτές, και η οποία είναι ίση με:

$$R = \frac{1 - \lambda_{\max}^A}{\lambda_{\max}^A} \quad (119)$$

Από την άλλη πλευρά στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής είναι δυνατόν να προκύπτουν δύο διαφορετικά ποσοστά κέρδους για το βασικό και το μη βασικό υποσύστημα. Κατά συνέπεια η σχέση (1) έχει την μορφή της:

¹¹³Είδαμε παραπάνω, ότι οι τιμές παραγωγής εξαρτώνται τόσο από την τυποποίηση των τιμών, όσο και από τις μεταβλητές της κατανομής του εισοδήματος (όπως βέβαια είναι). Τονίζουμε ότι δεν υπάρχει κάποια αντίφαση, καθώς με την εξίσωση τυποποίησης αυθαίρετα τίθεται η τιμή ενός καλαθιού εμπορευμάτων, ίση με μία θετική σταθερά.

$$[p_I, p_{II}] = [p_I, p_{II}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} (1 + R_i), (i) = I, II \quad (120)$$

Κατά συνέπεια για την σχέση (9) δύναται να ισχύει βάσει της (10) είτε η:

$$R_I = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{11}}}{\lambda_{\max}^{A_{11}}} \quad (121)$$

Είτε η :

$$R_{II} = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{22}}}{\lambda_{\max}^{A_{22}}} \quad (122)$$

Κατά συνέπεια είναι δυνατόν να ισχύουν διαζευκτικά :

$$R_I < R_{II} \quad (123)$$

$$R_I = R_{II} \quad (124)$$

$$R_I > R_{II} \quad (125)$$

Για τα αποτελέσματα που μπορεί να έχει η ισχύ μίας από τις σχέσεις (13) έως (15) μπορεί ο αναγνώστης να προστρέξει στα σχετικά κεφάλαια (2) και (3). Αυτό που έχει σημασία στο παρόν κεφάλαιο είναι να αναφέρουμε ότι το μέγιστο ποσοστό στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων παραγωγή μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

Είδαμε λοιπόν ότι είναι τόσο το μέγιστο ποσοστό κέρδους, όσο και το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο εξαρτώνται από το τυπικό εμπόρευμα και κατ' επέκταση από την τυποποίηση των τιμών. Κατά συνέπεια οδηγούμαστε στο συμπέρασμα αφού τα δύο άκρα της w-r καμπύλης μεταβάλλονται με την τυποποίηση, τότε είναι απολύτως δυνατή η μετατόπιση της w-r καμπύλης με μεταβαλλόμενο τυπικό εμπόρευμα.

4.5 Το σχήμα της w-r καμπύλης

Παραπάνω είδαμε ότι διαφορίζοντας την σχέση (3) μπορούμε να βρούμε την κλίση της w-r καμπύλης. Αν όμως διαφορίσουμε μία ακόμα φορά την σχέση (4) ως προς το

ποσοστό κέρδους, τότε είμαστε σε θέση να βρούμε και το σχήμα της. Κατά συνέπεια για την δεύτερη παράγωγο του ονομαστικού ωρομισθίου ισχύει:

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{d^2K_q}{dr^2} - 2\frac{dK_q}{dr} \quad (126)$$

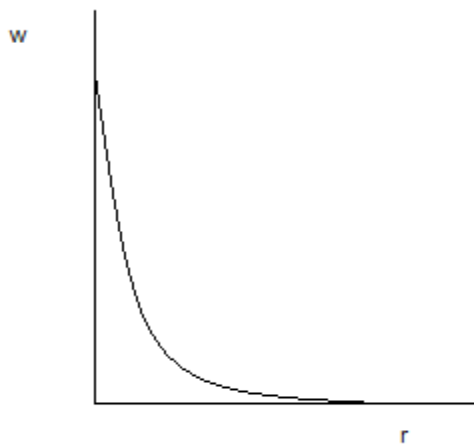
Ωστόσο δύναται να ισχύει από την (16):

$$\frac{d^2w}{dr^2} < 0 \quad (127)$$

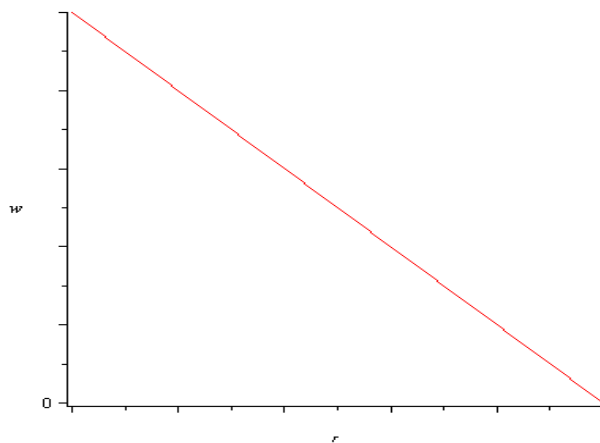
$$\frac{d^2w}{dr^2} = 0 \quad (128)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} > 0 \quad (129)$$

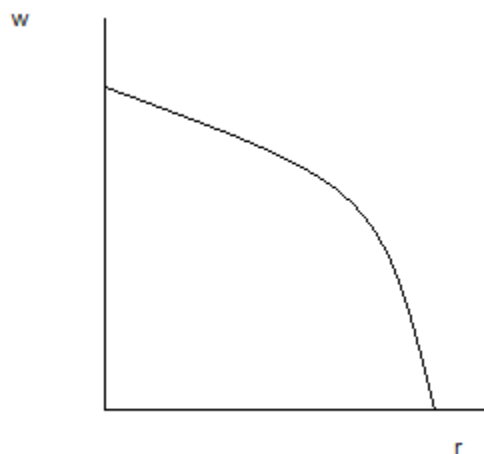
Κατά συνέπεια στην περίπτωση που ισχύει η (17) τότε η w-r καμπύλη είναι κοίλη. Δηλαδή είναι της μορφής:



Αν ισχύει αντίθετα η σχέση (18) τότε η w-r είναι γραμμική και της μορφής:



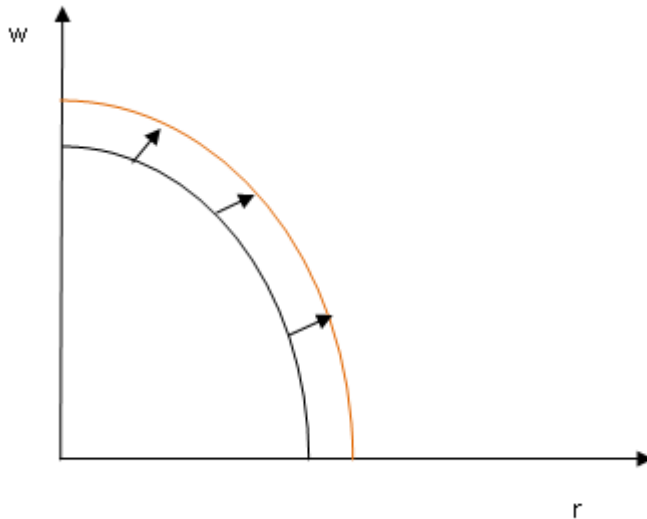
Ενώ αν τέλος ισχύει η (19) τότε η $w-r$ είναι κυρτή και της μορφής:



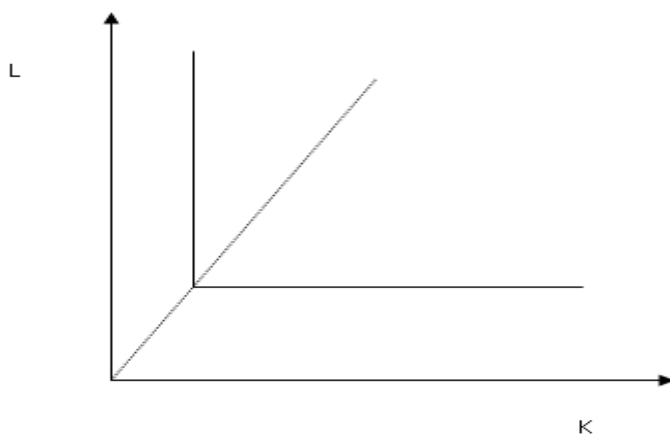
4.6 Τεχνολογική εξέλιξη και υποκατάσταση τεχνικών

Ένα ζήτημα που τίθεται σχετικά με την $w-r$ σχέση, είναι ποια η συνέπεια της εισόδου επιπλέον διαθέσιμων διαδικασιών παραγωγής, ή με άλλα λόγια κάποιας τεχνολογική εξέλιξης.

Σύμφωνα με τον P.Samuelson η τεχνολογική εξέλιξη έχει σαν αποτέλεσμα την μετατόπιση της $w-r$ σχέσης προς τα «βορειοανατολικά». Με άλλα λόγια αυτό που συμβαίνει φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Όμως η τεχνολογική εξέλιξη επηρεάζει και την συνάρτηση παραγωγής όπως είναι φυσικό. Όπως ορθά εντοπίζει ο J. Stiglitz¹¹⁴ η τεχνολογική εξέλιξη έχει ως αποτέλεσμα την μετατροπή της γνωστής συνάρτησης του Leontief στην οποία δεν υπάρχει υποκατάσταση μεταξύ των συντελεστών παραγωγής και η οποία έχει σχήμα L δηλαδή:



Η παραπάνω σχέση περιγράφει μια τεχνολογία όμοια με αυτή του Leontief¹¹⁵, στην οποία όπως φαίνεται και από το σχήμα κάθε σημείο της καμπύλης εκτός από το σημείο που εισέρχεται η διακεκομμένη γραμμή θα αποτελούσε ένα μη άριστο παραγωγικά σημείο.

Αν τώρα υποτεθεί ότι υπάρχει μια πλήρης υποκατάσταση μεταξύ των συντελεστών παραγωγής η συνάρτηση παραγωγής θα είναι της μορφής:

¹¹⁴ Βλ. Anthony B. Atkinson and Joseph E. Stiglitz (1969) σελ. 576

¹¹⁵ Βλ. H. Varian (1992) τόμος Α

4.7 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω μπορούμε να συνοψίσουμε τα εξής:

1. Η σχέση μεταξύ ποσοστού κέρδους και ονομαστικού ωρομισθίου περιγράφεται από την $w-r$ σχέση. Πρόκειται για μια κατ' εξοχήν σχέση κατανομής του εισοδήματος. Παρότι αποτέλεσε ουσιαστικά, όπλο των νεοοικονομικών στην διένεξη των Cambridge, ωστόσο για αυτήν κάνει λόγο και ο P.Samuelson¹¹⁶ το (1962).
2. Η $w-r$ σχέση αποτελεί μια σχέση ισορροπίας της αγοράς εργασίας με την αγορά παραγωγής εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια η $w-r$ παριστά καταστάσεις ισορροπίας (steady states) μεταξύ ποσοστού κέρδους και ονομαστικού ωρομισθίου.
3. Η $w-r$ σχέση είναι αποτέλεσμα της τυποποίησης του συστήματος τιμών με ένα τυπικό εμπόρευμα. Ως εκ τούτου η $w-r$ σχέση δεν αποτελεί την σχέση ποσοστού κέρδους και ονομαστικού ωρομισθίου για μια δεδομένη τεχνική αλλά για ένα δεδομένο σύστημα παραγωγής¹¹⁷.
4. Η $w-r$ σχέση περιγράφεται διαγραμματικά από την $w-r$ καμπύλη. Η $w-r$ καμπύλη έχει πάντοτε αρνητική κλίση, η οποία δίδεται από την πρώτη παράγωγο της σχέσης (3).
5. Η $w-r$ καμπύλη μπορεί να είναι είτε κυρτή, είτε κοίλη, είτε γραμμική, όταν η δεύτερη παράγωγος της σχέσης (3) είναι αρνητική, θετική, ή μηδενική αντίστοιχα.

¹¹⁶ Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι ειπώθηκε από τον Samuelson το 1962. Ο τελευταίος την ονομάζει Factor-Price Frontier (FPF). Και σε αυτήν την περίπτωση την περιγράφει σαν σχέση ισορροπίας μεταξύ ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους.

Για τον Samuelson κάθε οικονομία έχει το δικό της FPF. Στην περίπτωση όπου δύο οικονομίες έχουν το ίδιο FPF, τότε είναι πρακτικώς ίδιες (σελ 196). Επιπλέον κάθε τεχνολογική πρόοδος θα είχε σαν αποτέλεσμα την μετατόπιση του FPF προς τα δεξιά, καθώς στην περίπτωση αυτή, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, θα δύναται να συνεπάγεται ένα μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους.

¹¹⁷ Το τελευταίο αποτέλεσε μια αφορμή ενός επιμέρους διαλόγου μεταξύ μιας μερίδας οικονομολόγων. Από το Κ.Γόγολος (2000) μπορούμε να συνοψίσουμε στα εξής - αν και στην συνέχεια θα αναφερθούμε και εμείς εκτενώς-:

Οι Etreygers (1994) και Kurz/Gehkre (1994) αναφερόμενοι στο Γ.Σταμάτης (1993) αποφαινόμενοι, ότι το βασικό συμπέρασμα του τελευταίου-ότι δηλαδή ο όρος κατάταξη τεχνικών δεν έχει κάποιο ιδιαίτερο νόημα, καθώς επί της ουσίας πρόκειται για κατάταξη τυπικών υποσυστημάτων- είναι εσφαλμένο.

6. Τα σημεία κάτω από την $w-r$ καμπύλη δεν επιλέγονται, καθώς δεν είναι τα μέγιστα δυνατά για δεδομένο ποσοστό κέρδους ή ονομαστικού ωρομισθίου. Ενώ αντίθετα τα σημεία πάνω από την $w-r$ καμπύλη δεν επιλέγονται ως τεχνολογικά ανέφικτα.
7. Από το Γ.Σταμάτης (1996α)¹¹⁸ ξέρουμε ότι τόσο η θέση, όσο και το σχήμα μιας $w-r$ καμπύλης εξαρτάται από την τυποποίηση.

¹¹⁸ Στο παραπάνω άρθρο ο Γ.Σταμάτης δείχνει περιπτώσεις που τόσο το σχήμα όσο και θέση $w-r$ καμπυλών μιας δεδομένης τεχνικής, μεταβάλλεται με την τυποποίηση. Το τελευταίο αποδεικνύει και το γεγονός ότι η $w-r$ καμπύλη δεν αντιπροσωπεύει την σχέση ονομαστικού ωρομισθίου- ποσοστού κέρδους της δεδομένης τεχνικής αλλά του δεδομένου τυπικού υποσυστήματος.

5 Τυπικά εμπορεύματα

Παραπάνω είδαμε, ότι για να προσδιοριστούν οι τιμές, αλλά και για να εξαχθεί η σχέση ονομαστικού ωρομισθίου- ποσοστού κέρδους (ήτοι $w-r$) είναι απαραίτητο προηγουμένως να τυποποιηθούν οι τιμές. Είδαμε παραπάνω ότι η τυποποίηση των τιμών είναι δυνατόν να επηρεάσει, τόσο την κλίση όσο και το σχήμα μιας $w-r$ καμπύλης.

Η τυποποίηση λαμβάνει χώρα με την εισαγωγή μίας εξίσωσης τυποποίησης, με την οποία η τιμή του τυπικού εμπορεύματος τίθεται ίση με μια σταθερά. Στην παρούσα διατριβή θα παρουσιαστούν επιγραμματικά (καθώς στην βιβλιογραφία έχει γίνει εκτενέστατη αναφορά) τα πλέον γνωστά τυπικά εμπορεύματα, τα οποία είναι:

1. Το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa
2. Το τυπικό εμπόρευμα του Miayao
3. Το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη
4. Το τυπικό εμπόρευμα των Μαριόλη-Βουγιουκλάκη

5.1 Το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa

Ένα από τα πιο γνωστά τυπικά εμπορεύματα, χωρίς αμφιβολία είναι αυτό του Sraffa. Σύμφωνα με την τυποποίηση *a la Sraffa*, το σύστημα του οποίου οι τιμές τυποποιούνται καλείται πρότυπο σύστημα.

Σύμφωνα με την τυποποίηση *a la Sraffa*, το τυπικό εμπόρευμα αποτελεί το καθαρό προϊόν ενός συστήματος παραγωγής το οποίο :

1. Χρησιμοποιεί την ίδια γραμμική τεχνική, έστω την $[A, \ell]$ με το δεδομένο σύστημα παραγωγής
2. Παράγει όλα τα εμπορεύματα του δεδομένου συστήματος παραγωγής στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, και όλα τα βασικά εμπορεύματα στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής.
3. Και είναι τέτοιο ώστε το ακαθάριστο προϊόν του τυπικού υποσυστήματος, το καθαρό προϊόν του και τα μέσα παραγωγής του να έχουν την ίδια σύνθεση.

Χρησιμοποιώντας τον σύνθη συμβολισμό που απαντάται στην σχετική βιβλιογραφία, σαν $q, q \geq 0$, ορίζεται το 1^ο διάνυσμα του ακαθάριστου προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος¹¹⁹. Κατά συνέπεια και λόγω της συνθήκης 1. ισχύει:

$$\ell q \equiv \ell X \quad (130)$$

Με άλλα λόγια η συνολική ποσότητα εργασιακής δύναμης που χρησιμοποιεί το δεδομένο σύστημα παραγωγής είναι εξωγενώς δεδομένο και ίσο με την μονάδα.

Από την δεύτερη συνθήκη προκύπτει η σχέση:

$$q = Aq(1 + R) \quad (131)$$

Είναι φανερό, ότι από την (2) προκύπτει ότι το q αποτελεί το δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A , το οποίο συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A , για την οποία ισχύει:

$$\lambda_{\max}^A = \frac{1}{1 + R} \quad (132)$$

Από την σχέση (2) για το καθαρό προϊόν του τυπικού υποσυστήματος προκύπτει και λόγω της κοινής σύνθεσης εισροών-εκροών:

$$q - Aq = AqR \quad (133)$$

Από την σχέση (4) είναι φανερό, ότι ακαθάριστο προϊόν ($Aq(1 + R)$), καθαρό προϊόν (AqR) και μέσα παραγωγής (Aq) έχουν την ίδια σύνθεση.

Από την σχέση (1) φαίνεται επίσης ότι σύμφωνα με την τυποποίηση του Sraffa, τίθεται η τιμή του καθαρού προϊόντος του συστήματος ίση με την ποσότητα ζωντανής εργασίας που χρησιμοποιεί το τυπικό υποσύστημα. Για την ποσότητα ζωντανής εργασίας ο Sraffa υποθέτει ότι:

¹¹⁹ Όπως ορθά αναφέρει στην διατριβή της η Ζ. Στεφανοπούλου (2006) σελ 129:

«Το Πρότυπο Εμπόρευμα, το οποίο προκύπτει από το Πρότυπο σύστημα, αποτελείται από θετικές μόνον ποσότητες βασικών εμπορευμάτων, που συμμετέχουν ως εισροές αλλά και ως εκροές, τόσο στο Πρότυπο Σύστημα όσο και στο πραγματικό σύστημα. Ως μέτρο για τον προσδιορισμό των τιμών του Προτύπου Συστήματος και του Προτύπου Εμπορεύματος, χρησιμοποιείται το Πρότυπο Εθνικό Εισόδημα του οποίου η τιμή εξισώνεται με τη μονάδα.»

$$\ell q \equiv \ell X = 1 \quad (134)$$

Κατά συνέπεια από τις σχέσεις (1)-(5) προκύπτει:

$$pAqR = \ell q = \ell X = 1 \quad (135)$$

Από την σχέση (6) και από το σύστημα τιμών προκύπτει για την w-r σχέση¹²⁰:

$$w = 1 - \frac{r}{R} \quad (136)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε, ότι τίποτε δεν θα άλλαζε επί της ουσίας αν υποθέταμε την ύπαρξη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής. Η περίπτωση αυτή περιγράφεται στο Γ. Σταμάτης (1995) σελ. 295-297.

Είναι λοιπόν φανερό, ότι με την σραφαϊανή τυποποίηση, κατασκευάζεται ένα τυπικό υποσύστημα το οποίο χρησιμοποιεί την ίδια τεχνική με το δεδομένο σύστημα παραγωγής. Οι εισροές σε μέσα παραγωγής έχουν την ίδια σύνθεση με το καθαρό και το ακαθάριστο προϊόν (και τα δύο τελευταία έχουν κατά συνέπεια την ίδια σύνθεση). Η τυποποίηση με το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa συνεπάγεται μία γραμμική w-r καμπύλη η οποία όπως φαίνεται και από την σχέση (7) έχει αρνητική κλίση και ίση με $-\frac{1}{R}$, η οποία ταυτόχρονα αποτελεί και την τιμιακή ένταση κεφαλαίου του τυπικού (ή πρότυπου κατά Sraffa) υποσυστήματος¹²¹. Τέλος η σταθερή παραγωγικότητα της εργασίας και ταυτόχρονα το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με την μονάδα¹²².

¹²⁰ Για μια πλήρη απόδειξη βλ. και Γ. Σταμάτης (1995) σελ 296-297

¹²¹ Βλ. και B. Schefold (2009) σελ 11

¹²² Επιπλέον για τους Kurz και Salvadori (H.D, Kurz and N.Salvadori (1995) σελ.117-118)

το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Για κάθε r εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου των τιμών, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων είναι αυστηρά θετικές και μεταβάλλονται με την μεταβολή του r. Κατά συνέπεια με μαθηματικούς όρους:

$$\forall r, 0 \leq r \leq R:$$

$$p_I(r) > 0$$

$$\frac{dp}{dr} \neq 0$$

5.2 Το τυπικό εμπόρευμα του Míaγo

Ένα ακόμα γνωστό στην βιβλιογραφία, τυπικό εμπόρευμα, είναι αυτό του T. Míaγo. Παρότι σε γενικές γραμμές μοιάζει αρκετά σε αυτό του Srafa, εντούτοις εμφανίζει αρκετές διαφορές.

Το τυπικό εμπόρευμα του Srafa, όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο στηρίζεται στην φύση του ως αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας των τεχνικών συντελεστών –ήτοι της A- το οποίο μάλιστα συνδέεται με την μέγιστη ιδιοτιμή της.

Το τυπικό εμπόρευμα του Míaγo υποδεικνύει από την άλλη πλευρά, ότι δεν είναι το μόνο τυπικό εμπόρευμα, αυτό του Sraffa, το οποίο συνεπάγεται μια γραμμική σχέση ονομαστικού ωρομισθίου, ποσοστού κέρδους. Με άλλα λόγια ο Míaγo προσπαθεί να βρεί και άλλα εμπορεύματα τα οποία συνεπάγονται μια w-r. Επιπλέον εξετάζει κάτω από ποιές προϋποθέσεις το τελευταίο δύναται να οριστεί¹²³.

-
2. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους (R) προκύπτει όταν το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσο με 0, και για την τιμή αυτή του ποσοστού κέρδους οι τιμές είναι αυστηρά θετικές, δηλαδή¹²²:

$$R = \min[R_1, R_2, \dots, R_n] : p(R) \geq 0$$

3. Το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa περιέχει τουλάχιστον ένα βασικό εμπόρευμα
4. Στην περίπτωση όπου σαν τυπικό εμπόρευμα επιλέγει αυτό του Sraffa τότε για την σχέση ονομαστικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους ισχύει:

$$w = \frac{R - r}{R}$$

5. Τα μη βασικά εμπορεύματα δεν παίζουν κανένα ρόλο στην επιλογή του τυπικού εμπορεύματος.

¹²³ Έτσι ψάχνει ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται προκειμένου να υπάρχουν τα εμπορεύματα αυτά.

Στην συνέχεια ορίζονται οι μήτρες K και J.

Ορίζει σαν J, την $n+1 \times n$ μήτρα:

$$J \equiv \begin{pmatrix} \ell \\ \ell A \\ \vdots \\ \ell A^n \end{pmatrix} = A^i \ell, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Και την $n \times n$ μήτρα K, την οποία ο Míaγo την ονομάζει Labour profile Matrix

Όπως προαναφέραμε το τυπικό εμπόρευμα του Μiαγο, ορίζεται στην μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής. Κατα συνέπεια εκκινώντας από το γνωστό σύστημα τιμών, προκύπτει:

$$p = pA(1+r) + w\ell \quad (137)$$

Εάν εισάγουμε σαν τυπικό εμπόρευμα το διάνυσμα-καλάθι εμπορευμάτων:

$$b = q + \varepsilon u, \varepsilon > 0 \quad (138)$$

$$K \equiv \begin{pmatrix} \ell \\ \ell A \\ \vdots \\ \ell A^{n-1} \end{pmatrix} = A^i \ell, i = 0, 1, \dots, n-1$$

Οι J και K είναι τέτοιες ώστε:

$$Jz = 0 \Leftrightarrow Kz = 0$$

Στην συνέχεια ο Μiαγο ορίζει το βασικό τυπικό εμπόρευμα, $x^h = q + \varepsilon z^h \geq 0$, όπου q το δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A^{123} και $\varepsilon, \varepsilon > 0$, και z^h , ένα από τα m-1 γραμμικώς ανεξάρτητα και ορθογώνια στην μήτρα K διανύσματα. Τα διανύσματα αυτά x^h (h=1,2,3,...,m) αποτελούν ένα από τα m δυνάμενα τυπικά εμπορεύματα του Μiαγο.

Για τον Μiαγο η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη m τέτοιων βασικών τυπικών εμπορευμάτων είναι η

$$rank(K) = n - m + 1, \forall m = 1, 2, \dots, n$$

Με άλλα λόγια η K να έχει μια τουλάχιστον γραμμικώς ανεξάρτητη γραμμή ή στήλη.

Εξάγει και τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν και μόνο εάν $rank(K) = n$, τότε το πρότυπο εμπόρευμα του Sraffa είναι το μοναδικό γενικό τυπικό εμπόρευμα
- Εάν και μόνο εάν $rank(K) = 1$, τότε υπάρχουν n βασικά τυπικά εμπορεύματα. Με άλλα λόγια κάθε ημιθετικό καλάθι εμπορευμάτων, αποτελεί στην περίπτωση αυτή ένα γενικό τυπικό εμπόρευμα.

Στην συνέχεια ο Μiαγο εξετάζει μια ακόμα ιδιότητα του διανύσματος z. Την ιδιότητα που έχει να κινείται ανεξάρτητα από τις τιμές. Δηλαδή:

$$pz = 0, \forall r \in [0, R)$$

Με αναγκαία και ικανή συνθήκη την:

$$rank(K) = n - k$$

, όπου με b συμβολίζουμε το τυπικό εμπόρευμα του Μίαγο, q το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa, και u ένα διάνυσμα η παραγωγή του οποίου απαιτεί μηδενικές ποσότητες εισροών σε ζωντανή εργασία.

Από τις σχέσεις (8) και (9) προκύπτει:

$$p[I - A(1+r)]b = w\ell b \quad (139)$$

Από την σχέση (10) προκύπτει:

$$p\left\{\frac{r}{R_{\max}}[I - A(1+r)] + \left(1 - \frac{r}{R_{\max}}\right)[I - A]\right\}b = w\ell b \Leftrightarrow$$

$$\frac{r}{R_{\max}}p[I - A(1+R_{\max})]b + \left(1 - \frac{r}{R_{\max}}\right)p[I - A]b = w\ell b \quad (140)$$

Κατά συνέπεια για να είναι η w - r σχέση γραμμική πρέπει να ισχύει:

$$p[I - A(1+R_{\max})]b = 0 \quad (141)$$

Το τυπικό εμπόρευμα του Μίαγο όπως είδαμε περιέχει και το καλάθι εμπορευμάτων u , το οποίο όμως έχει μια πολύ σημαντική ιδιότητα. Το διάνυσμα u , είναι κάθετο σε αυτό των τιμών παραγωγής. Κατά συνέπεια ισχύει:

$$p(r)u = 0 \quad (142)$$

Θέτοντας εξωγενώς όπως στην περίπτωση του τυπικού εμπορεύματος του Sraffa, την τιμή του καθαρού προϊόντος, ίση με την ποσότητα ζωντανής εργασίας, που στοίχησε η παραγωγή του μη βασικού εμπορεύματος και την τελευταία ίση με την μονάδα, προκύπτει:

$$p[I - A]b = \ell b = 1 \quad (143)$$

Δεδομένων όλων των παραπάνω, όπως βλέπουμε και στο Γόγολος (2000) καθώς και στο G. Stamatīs (1995) καταλήγουμε σε μια γραμμική w - r η οποία μάλιστα ισούται λόγω των σχέσεων σχέσεις (10) έως (14) προκύπτει:

Το τυπικό εμπόρευμα του Miao συνοψίζοντας είναι το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa (q) επαυξημένο κατά ένα διάνυσμα u το οποίο είναι ορθογώνιο στα διανύσματα $p(r)$ και ℓ . Σέ ένα μη διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής, όπου οι τιμές τυποποιούνται με το τυπικό εμπόρευμα του Miao, η τιμή των μέσων παραγωγής και το κόστος του σε μισθούς είναι ίσα με μηδέν.

Το πρότυπο σύστημα που παριστά το u , χρησιμοποιεί μια ποσότητα ζωντανής εργασίας¹²⁴ ίση με το μηδέν καθώς και αρνητικές ποσότητες εμπορευμάτων. Το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μάλιστα είναι ένα από τα μέγιστα ποσοστά κέρδους του πρότυπου συστήματος του Sraffa.

5.3 Το πρότυπο εμπόρευμα του Βασιλάκη

Το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη μπορούμε να πούμε, ότι μοιάζει αρκετά με αυτό του Sraffa.

Ωστόσο όπως γνωρίζουμε τόσο από την παρούσα εργασία, όσο και από την βιβλιογραφία¹²⁵, το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa βρίσκει πεδίο εφαρμογής στις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής. Απεναντίας ο Σ.Βασιλάκης¹²⁶ εισήγαγε ένα τυπικό εμπόρευμα το οποίο απαντάται σε διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής.

Ορίζονται οι παρακάτω προϋποθέσεις

1. Ισχύει για τα μέγιστα ποσοστά κέρδους:

$$R_I > R_{II} \Leftrightarrow \lambda_m^{A_{11}} < \lambda_m^{A_{22}} \quad (144)$$

2. Το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη, εκτός από βασικά εμπορεύματα περιέχει και μη βασικά εμπορεύματα τα οποία εισέρχονται στην ίδια την δική τους παραγωγή
3. Το πρότυπο εμπόρευμα του Βασιλάκη παράγεται από ένα τυπικό υποσύστημα που χρησιμοποιεί την ίδια τεχνική με το δεδομένο σύστημα παραγωγής, και

¹²⁴ Για περισσότερα βλ. Γ, Σταμάτη (1995) σελ 397

¹²⁵ Γ.Σταμάτης(1994)σελ289-295, Ζ. Στεφανοπούλου (2006),Κ. Γόγολος(2000)

¹²⁶ Βλ. Σ. Βασιλάκης (1983) σελ,289

μάλιστα τα μέσα παραγωγής του έχουν την ίδια σύνθεση με το καθαρό προϊόν του εν λόγω συστήματος, που σε τελευταία ανάλυση δεν είναι άλλο από πρότυπο εμπόρευμα του Βασιλάκη. Κατά συνέπεια δεν περιέχει εμπορεύματα τα οποία δεν εισέρχονται στην ίδια την δική τους παραγωγή (ανεξαρτήτου δε αν είναι βασικά ή μη βασικά).

4. Είναι φανερό λοιπόν ότι το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη μοιάζει αρκετά με αυτό του Sraffa, με την διαφορά όμως ότι περιέχει και μη βασικά εμπορεύματα.

Κατά συνέπεια σαν $Q, Q \geq 0$ ορίζεται το διάνυσμα που παριστά το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη (ή με άλλα λόγια το ακαθαριστο προϊόν του πρότυπου υποσυστήματος του). Πρόκειται για ένα πλήρως προσδιορισμένο διάνυσμα εξαιρέσει ενός βαθμωτού¹²⁷, το οποίο προκύπτει αν διαγραφούν όλες οι μηδενικές συνιστώσες¹²⁸.

Βάσει των παραπάνω αναφερόμαστε σε ένα διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής, όπου η μήτρα των τεχνικών συντελεστών, είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή τόσο η μήτρα A_{11} όσο και η μήτρα A_{22} είναι μη διασπώμενες. Το τελευταίο ισοδυναμεί με το γεγονός, ότι για να παραχθεί ένα μη βασικό εμπόρευμα πρέπει να παραχθούν όλα τα βασικά και μη βασικά εμπορεύματα του δεδομένου συστήματος παραγωγής.

Από τις προϋποθέσεις προκύπτει, ότι για να είναι το $Q \geq 0$ πρέπει να αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας των τεχνικών συντελεστών. Επίσης αναφέρθηκε ότι η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A είναι ή $\lambda_m^{A_{22}}$, έτσι κατα συνέπεια το Q είναι τότε μόνο θετικό όταν αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή του μη βασικού υποσυστήματος.

Το Q είναι τέτοιο ώστε:

¹²⁷ Βλ. Κ.Γογολος (2000)σελ198

¹²⁸ Δηλαδή οι συνιστώσες που αναφέρονται σε μη βασικά εμπορεύματα που δεν εισέρχονται στην παραγωγή άλλων μη βασικών εμπορευμάτων, συμπεριλαμβανομένου και της δικής τους παραγωγής

$$\ell X = \ell Q, \quad (145)$$

με άλλα λόγια εξισώνεται η άμεση ζωντανή εργασία που εισέρχεται στην παραγωγή του ακαθάριστου προϊόντος με αυτήν που εισέρχεται στην παραγωγή του ακαθάριστου προϊόντος του πρότυπου υποσυστήματος του Βασιλάκη.

Σύμφωνα με την τυποποίηση του Βασιλάκη οι τιμές τυποποιούνται ως εξής:

$$pAQR_m = \ell X = \ell Q = 1_{129} \quad (146)$$

Βάσει της ως άνω τυποποίησης προκύπτει για την w-r σχέση από το σύστημα προσδιορισμού των τιμών παραγωγής¹³⁰

$$w = 1 - \frac{1}{R} r \quad (147)$$

, όπου κατά τα γνωστά προκύπτει για την κλίση της w-r

$$dw = -\frac{1}{R} \quad (148)$$

Καθώς και για το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο:

$$w_{\max} = 1 \quad (149)$$

Από το σύστημα τιμών και δεδομένης της τυποποίησης με το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη προκύπτει:

¹²⁹ Το οποίο βέβαια προκύπτει από την τυποποίηση με

$$p[I - A]Q = 1 \Leftrightarrow$$

Από το σύστημα τιμών

$$p = pA(1 + R) + w\ell$$

προκύπτει:

$$pQ = pAQ(1 + R) + w\ell Q \Leftrightarrow$$

$$p[I - A]Q = pAQR + w \Leftrightarrow$$

$$1 = pAQR$$

¹³⁰ Όπως βλέπουμε από τα Γόγολος (2000) σελ και Γ.Σταμάτης (1995) σελ

$$K_Q = \frac{pAQ}{\ell Q} = \frac{1}{R_2} \quad (150)$$

Είναι δηλαδή ξεκάθαρο ότι με την τυποποίηση με το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη προκύπτει ένα πρότυπο σύστημα, το οποίο συνεπάγεται μια γραμμική w-r και έναν πρότυπο λόγο ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος.

5.4 Το τυπικό εμπόρευμα των Μαριόλη-Βουγιουκλάκη

Βασιζόμενοι αφενός στο τυπικό εμπόρευμα του Μiαγο και αφετέρου σε αυτό του του Βασιλάκη, οι Μαριόλης και Βουγιουκλάκης εισάγουν ένα τυπικό εμπόρευμα, σαν αυτό του Μiαγο, για την περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής. Το τυπικό εμπόρευμα των Βουγιουκλάκη Μαριόλη περιέχει εκτός από όλα τα βασικά εμπορεύματα του δεδομένου συστήματος παραγωγής και όλα τα μη βασικά εμπορεύματα που εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων.

Το αναλυτικό πλαίσιο που κινούνται οι Βουγιουκλάκης-Μαριόλης είναι όμοιο με αυτό του Βασιλάκη.

Επομένως η μήτρα A, είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ενώ για την μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας A, ισχύει:

$$\lambda_{\max}^A = \max[\lambda_{\max}^{A_{11}}, \lambda_{\max}^{A_{22}}]$$

Γίνεται λοιπόν η υπόθεση ότι:

$$\lambda_{\max}^{A_{11}} < \lambda_{\max}^{A_{22}} \Leftrightarrow R_I > R_{II} \quad (151)$$

Είδαμε παραπάνω, ότι για το τυπικό υποσύστημα των Βουγιουκλάκη Μαριόλη παράγει και μη βασικά εμπορεύματα, όπως και αυτό του Βασιλάκη. Ο Σ.Βασιλάκης έδειξε, ότι για να υπάρχει ένα τέτοιο σύστημα πρέπει να ισχύει:

$$\lambda_{\max}^{A_{11}} < \lambda_{\max}^{A_{22}} \Leftrightarrow R_I > R_{II} \quad (152)$$

Με άλλα λόγια για να είναι γραμμική η w-r σχέση σε ένα σύστημα παραγωγής a la Βασιλάκης πρέπει να έχει ένα πρότυπο λόγο ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος, με άλλα λόγια:

$$R = R_{II} \quad (153)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την τυποποίηση των τιμών των Βουγιουκλάκη Μαριόλη, εισάγεται ένα τυπικό εμπόρευμα της μορφής:

$$z = Q + \varepsilon u \quad (154)$$

όπου Q όπως θα δούμε στην συνέχεια είναι το τυπικό εμπόρευμα του Βασιλάκη, ενώ το u είναι όπως στην περίπτωση του τυπικού εμπορεύματος του Μiayo, ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτό των τιμών παραγωγής και για την παραγωγή του οποίου απαιτείται μηδενική ποσότητα εργασίας. Με άλλα λόγια ισχύει:

$$pu = 0 \quad (155)$$

$$\ell u = 0 \quad (156)$$

Είδαμε και στο τυπικό εμπόρευμα του Μiayo, ότι για να είναι η w-r σχέση γραμμική, πρέπει να ισχύει:

$$p \left\{ \frac{r}{R_{\max}} [I - A(1+r)] + (1 - \frac{r}{R_{\max}}) [I - A] \right\} z = w \ell b \Leftrightarrow$$

$$\frac{r}{R_{\max}} p [I - A(1 + R_{\max})] z + (1 - \frac{r}{R_{\max}}) p [I - A] z = w \ell z \quad (157)$$

Κατά συνέπεια για να είναι η w-r σχέση γραμμική πρέπει να ισχύει, όπως και ισχύει η:

$$p [I - A(1 + R_{\max})] z = 0 \quad (158)$$

Αν τεθεί εξωγενώς η τιμή του καθαρού προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος, ίση με την ποσότητα ζωντανής εργασίας που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγής και αυτή με την σειρά της τεθεί ίση με την μονάδα, αν δηλαδή ισχύει:

$$p [I - A] b = \ell q = 1 \quad (159)$$

Τότε για την w-r σχέση ισχύει:

$$w = 1 - \frac{r}{R_{II}} \quad (160)$$

Τέλος για την τιμιακή ένταση κεφαλαίου ισχύει:

$$K_z = \frac{1}{R_{II}} \quad (161)$$

Είναι δηλαδή ξεκάθαρο ότι με την τυποποίηση με το τυπικό εμπόρευμα των Μαριόλη και Βουγιουκλάκη προκύπτει ένα πρότυπο σύστημα, το οποίο συνεπάγεται αφενός μια γραμμική $w-r$ και αφετέρου έναν πρότυπο λόγο ίσο με το μέγιστο ποσοστό κέρδους του μη βασικού υποσυστήματος.

Συγκεφαλαιώνοντας μπορούμε να πούμε, ότι τα βασικά τυπικά εμπορεύματα είναι δύο, αυτά των Sraffa και Miaygo, αφού αυτά των Βασιλάκη και Μαριόλη αποτελούν μία γενίκευση των παραπάνω στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής.

6 Η διαμάχη των δύο Cambridge

Οι νεορικαρδιανοί, στα πλαίσια γραμμικών τεχνικών παραγωγής¹³¹, εξετάζουν την σχέση μεταξύ των μισθών, του ποσοστού κέρδους και του συστήματος των τιμών. Με άλλα λόγια εξετάζουν το σύστημα των σχετικών τιμών σε συνάρτηση όχι μόνο με τεχνολογικούς παράγοντες, αλλά και με την διανομή του εισοδήματος. Έτσι κάνουν μια εκ νέου διαφοροποίηση στα εμπορεύματα, όπως ο Ricardo, δηλαδή σε αυτά η αξία των οποίων καθορίζεται από την σπανιότητα και σε αυτά που η αξία τους καθορίζεται από την ζωντανή εργασία που εμπεριέχουν άμεσα και έμμεσα.

Οι νεορικαρδιανοί πίστευαν ότι έχουν καταρρίψει την έννοια της αθροιστικής συνάρτησης και το οικοδόμημα των παραδοσιακών καμπυλών ζήτησης για κεφαλαιουχικά αγαθά και εργασία¹³². Πίστευαν ότι με τον τρόπο αυτό η θεωρία της οριακής παραγωγικότητας της αξίας και της κατανομής επίσης καταρριπτόταν.

Τα φαινόμενα του re-switching και του capital reversing¹³³ παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά από την Joan Robinson (1953-4), τον Champernowne (1953-4) και τον Sraffa το 1960. Τα δύο παραπάνω φαινόμενα, συνεπάγονται, ότι η ίδια φυσική ποσότητα κεφαλαιουχικών αγαθών είναι δυνατόν να έχει παραπάνω από μια τιμή.

Με τον τρόπο αυτό η οπτική της οικονομικής θεωρίας μετατοπίζεται σε μια, a la Ricardo θέση. Οι νεορικαρδιανοί επιτίθενται κυρίως με τον Sraffa στην θεωρία της οριακής παραγωγικότητας και στην νεοκλασική θεωρία εν γένει.

Αντίθετα η Joan Robinson, μετακίνησε το ενδιαφέρον της σε ζητήματα που ως τότε θεωρούνταν δευτερεύοντα. Έτσι αναζήτησε τις δυνάμεις (παράγοντες) που επηρεάζουν την οικονομική μεγέθυνση τόσο της εργασίας όσο και του κεφαλαίου και κατ' επέκταση της οικονομίας εν γένει. Επιπλέον ερεύνησε πως η τεχνολογική εξέλιξη επηρεάζει την ανακύκλωση του κεφαλαίου, την κατανομή του εισοδήματος και κατ' επέκταση την επιλογή της τεχνικής παραγωγής, που σε τελευταία ανάλυση καθορίζει και την επενδυτική συμπεριφορά.

¹³¹ Όπου (ανά)παράγονται εμπορεύματα μέσω εμπορευμάτων

¹³² Βλ. G.Harcourt (1972) σελ.119

¹³³ Με τον όρο capital reversing, εννοούμε την κατάσταση όπου η αξία του κεφαλαίου έχει μια μονότονη συμπεριφορά ως προς το ποσοστό κέρδους, έτσι ώστε τεχνικές μικρότερης έντασης κεφαλαίου, να σχετίζονται με χαμηλότερο ποσοστό κέρδους. Δηλαδή με άλλα λόγια είναι δυνατόν μια τεχνική με μικρότερο βαθμό μηχανοποίησης, να σχετίζεται με ένα υψηλότερο ποσοστό κέρδους. Την αντίστροφη αυτή σχέση η Joan Robinson, την ονόμασε “perverse” relation.

Το πρώτο εγχείρημα της Joan Robinson ήταν να βρει μια μονάδα μέτρησης, σύμφωνα με την οποία το κοινωνικό ή συνολικό κεφάλαιο¹³⁴, μπορεί να αθροιστεί σε έναν αριθμό. Κατά συνέπεια κατασκευάζεται ένα μοντέλο, *a la Sraffa*, όπου παράγεται μια εκροή, με την χρήση (ανα)παραγόμενου κεφαλαίου και εργασίας και στην οποία τα μερίδια των κερδών στο συνολικό εισόδημα και το ποσοστό κέρδους, καθορίζεται αποκλειστικά από τεχνολογικά κριτήρια.

Για την Joan Robinson αυτό ήταν όμως αδύνατο να συμβεί, ακόμα και στην απλουστευμένη περίπτωση της μη μεγεθυνόμενης οικονομίας. Πιο συγκεκριμένα ήταν αδύνατον να βρεθεί μια μονάδα μέτρησης του κεφαλαίου, σύμφωνα με την οποία η αξία του κεφαλαίου να είναι ανεξάρτητη από την κατανομή του εισοδήματος. Επιπλέον η αξία μιας φυσικής ποσότητας κεφαλαίου δύναται να διαφέρει, σε δύο διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας.

Ο D. Champernowne δέχτηκε την οπτική της Joan Robinson για το αδύνατο της μέτρησης του κεφαλαίου. Αμφισβήτησε όμως την δυνατότητα ύπαρξης μιας κατάστασης, όπου η ίδια φυσική ποσότητα κεφαλαίου μπορεί να έχει διαφορετική αξία σε δυο διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας. Παρόλα αυτά, ο Champernowne προσπάθησε να βρεί μια μονάδα κεφαλαίου που θα ικανοποιούσε και τα δυο εγχειρήματα της J. Robinson.

Από την άλλη πλευρά οι νεοκλασικοί είχαν σαν στόχο την υπεράσπιση της αθροιστική συνάρτηση παραγωγής, αφήνοντας, με εξαιρετικά απλά παραδείγματα, άθικτη την θεωρία της οριακής παραγωγικότητας, η οποία και σύμφωνα με αυτούς δεν έχει να κάνει με την ύπαρξη ή μη μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής. Το στοίχημα για τους νεοκλασικούς ήταν να μπορέσουν τα νεοκλασικά μοντέλα παραγωγής, που παράγουν ένα εμπόρευμα, να σταθούν και κάτω από τις νεοοικονομικές υποθέσεις, οι οποίες για τον Harcourt(1972) ήταν περισσότερο ρεαλιστικές. Τόσο για τον Sollow όσο και για τον Samuelson, τα ετερογενή κεφαλαιουχικά αγαθά, μπορούν να αναλυθούν με μοντέρνες τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού. Με τον τρόπο αυτό προσπαθούν να ξεδιαλύνουν τις δυνάμεις που καθορίζουν την διανομή του εισοδήματος, τους τρόπους ανακύκλωσης του

¹³⁴ Βλ. G.Harcourt (1972) καθώς και Avi J. Cohen and G. C. Harcourt, (2003)

κεφαλαίου, την οικονομική μεγέθυνση και εν τέλει την επιλογή τεχνικής. Έτσι, επιγραμματικά κατέληξαν στα εξής¹³⁵:

1. υπάρχει μια αντίστροφη σχέση μεταξύ ποσοστού κέρδους και έντασης κεφαλαίου
2. υπάρχει μια αντίστροφη σχέση μεταξύ ποσοστού κέρδους και κατά κεφαλήν κατανάλωσης
3. σε συνθήκες τέλει ανταγωνισμού, η κατανομή του εισοδήματος μπορεί να εξηγηθεί, τόσο από τα οριακά προϊόντα, όσο και από την προσφορά των τεχνολογικών συντελεστών¹³⁶.

Ο Samuelson στο [1966^a] συνοψίζει την συζήτηση γύρω από το reswitching και εμμέσως δέχεται την κριτική των Νέο-κευνσιανών (Νεοοικαρδιανών). Στο Samuelson [1962] εργάστηκε για την «υπεράσπιση» της μεθοδολογίας και της ανάλυσης του Sollow γύρω από τις αθροιστικές συναρτήσεις παραγωγής. Σκοπός της εργασίας του ήταν να δείξει, ότι στα πλαίσια μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής, είναι δυνατόν με ένα απλό και ενιαίο (ομογενές) μέγεθος, το οποίο ονομάζει κεφάλαιο, να παράξει μια συνολική εκροή σε συνδιασμό με την εργασία.

Το 1965, ο Levhari, υποστήριξε, ότι είναι δυνατό, να εμφανιστεί το φαινόμενο του reswitching, σε έναν μόνο τομέα παραγωγής μέσω παραγωγής, και όχι στο σύνολο της οικονομίας. Το τελευταίο αποδείχτηκε να είναι εσφαλμένο –πιο κομψά, ότι ισχύει μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις- από μια σειρά άρθρων, μεταξύ άλλων του Morishima (1966), του Passinetti (1966) της J.Robinson και Naqvi (1967), με ποιο σημαντικό αυτό του Garegnani(1966). Το αναλυτικό πλαίσιο στο οποίο κινήθηκαν όλοι ήταν, μοντέλα απλής παραγωγής a la Ricardo-Sraffa, τα οποία μέσω εργασίας και άλλων εμπορευμάτων –συμπεριλαμβανομένου και των ίδιων- παράγουν ένα απλό εμπόρευμα για κάθε διαδικασία παραγωγής. Η ανάλυση τους γινόταν στα πλαίσια w-r σχέσεων για διαφορετικά ύψη του ποσοστού κέρδους.

¹³⁵ Ο Harcourt (1969) αποφεύγει την χρήση της αντίστροφης σχέσης, και αντ' αυτού χρησιμοποιεί την έκφραση «υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ χαμηλότερου ποσοστού κέρδους και...»

¹³⁶ Στο συμπέρασμα αυτό οι νεοκλασικοί οικονομολόγοι καταλήγουν, εργαζόμενοι στα πλαίσια μοντέλων γενικής ισορροπίας. Κατά συνέπεια, νεοκλασικά ειπωμένα, οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών και κατά συνέπεια η κατανομή του εισοδήματος καθορίζεται στα πλαίσια των μοντέλων αυτών.

Και οι δύο πλευρές εξέτασαν μοντέλα με ετερογενές κεφάλαιο, στα οποία κάθε τεχνική δεν επιτρέπει την υποκατάσταση μεταξύ των συντελεστών (συναρτήσεις παραγωγής *a la Leontief*).

Μια σύνοψη της παραπάνω συζήτησης έρχεται να επαναφέρει, αλλά και να αποδομίσει εκ των υστέρων, ο L.Passinetti με μια αναφορά του το 2003.

Αναγνωρίζει ότι από το 1966 η Joan Robinson, ήρθε σε διένεξη με τον R.Sollow. Πεδίο της διένεξης ήταν το τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου του P.Sraffa (1960), στο οποίο έδειξε ότι η ίδια τεχνική παραγωγής, μπορεί να είναι η πλέον κερδοφόρα, σε πολλά σημεία στην *w-r* καμπύλη¹³⁷. Το τελευταίο αντιβαίνει στη νεοκλασική παραδοχή, μιας μονότονα φθίνουσας σχέσης μεταξύ «κεφαλαίου» και της τιμής του¹³⁸.

Αρχικά ο Samuelson προσπάθησε να κατασκευάσει την αθροιστική συνάρτηση παραγωγής. Στην συνέχεια μαζί με τον Levhari, το εξέλιξε σε ένα “Non-switching Theorem”¹³⁹, το οποίο αφενός θα γενίκευε την αθροιστική συνάρτηση παραγωγής και αφετέρου θα αποδείκνυε το εσφαλμένο των συμπερασμάτων του Sraffa.

Ο Pasinetti το 1965 στα πλαίσια του 1st World Congress of the Econometric Society που έγινε στην Ρώμη, απέδειξε το εσφαλμένο του “Non-switching Theorem” των Levhari και Samuelson. Το εσφαλμένο του θεωρήματος αναγνώσαν και οι Levhari και Samuelson με κοινό τους άρθρο το 1966¹⁴⁰.

Στην συνέχεια οι Νεοκλασικοί Οικονομολόγοι, στα πλαίσια συστημάτων γενικής ισορροπίας, προσπαθούσαν κατά τον Pasinetti, να συγκαλύψουν τα φαινόμενα του *reswitching*¹⁴¹ και του *capital reversing*, τα οποία ευθύνονται για πολλές δυσκολίες καθώς και για την αστάθεια των λύσεων στα μοντέλα αυτά.

Η εσωτερική αντίφαση των μοντέλων αυτών, είναι ο τρόπος που μετριέται το κεφάλαιο και το γεγονός, ότι το συνολικό κεφάλαιο και η τιμή (αμοιβή) του είναι μια

¹³⁷ Χωρίς να είναι αναγκαίο τα σημεία αυτά να είναι συνεχόμενα

¹³⁸ Αρχικά ακόμα και η Joan Robinson σύμφωνα με τον Passinetti (2003) αγνοούσε την σημασία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης του Sraffa, σε αντίθεση με τον Samuelson, ο οποίος το 1962 το εντόπισε.

¹³⁹ Passinetti (2003) σελ.227

¹⁴⁰ Samuelson (1966b)

¹⁴¹ Βλ. Bruno M./Burmeister E./Sheshinski (1966), Hatta(1976), Dorfman R/Samuelson P./ Sollow R (1958)

μονότονη σχέση. Η αντίφαση αυτή κατά τον Pasinetti¹⁴², έχει να κάνει τόσο με τις βασικές παραδοχές της νεοκλασικής θεωρίας του κεφαλαίου, όσο και με τα σύγχρονα μοντέλα ενδογενούς μεγέθυνσης.

Η παραπάνω αντίφαση της νεοκλασικής θεωρίας, ήταν ικανή για τον Sraffa, να «γκρεμίσει» ολόκληρο το νεοκλασικό οικοδόμημα.

Από την άλλη ο F.Fisher¹⁴³, συνεχίζοντας την νεοοικονομική κριτική, πιστεύει ότι η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής μπορεί να υπάρξει, αλλά μόνο σε συγκεκριμένες και απίθανες περιπτώσεις. Το βασικό ερώτημα που θέτει είναι, εάν υπάρχει κάποιο σύστημα άθροισης του κεφαλαίου και κατά συνέπεια των συναρτήσεων παραγωγής, ανάμεσα στις διάφορες εταιρίες. Το τελευταίο θέτει υπό αμφισβήτηση τους νεοκλασικούς «ορισμούς» για το κεφάλαιο, την εργασία την επένδυση.

Κατά συνέπεια η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής και το συνολικό (αθροιστικό) κεφάλαιο δεν μπορούν να υπάρξουν στην γενική περίπτωση¹⁴⁴.

Συνεχίζοντας¹⁴⁵ υποστηρίζει, ότι για να μπορέσει να υπάρξει μια αθροιστική συνάρτηση παραγωγής, απουσία διαδικασίας βελτιστοποίησης, πρέπει οι μικροοικονομικές συναρτήσεις παραγωγής των επιμέρους παραγωγών-καπιταλιστών¹⁴⁶ να είναι διαχωρίσιμες ως προς την εργασία και το «κεφάλαιο».

Επιπλέον για να υπάρξει μια αθροιστική εκροή είναι απαραίτητο όλες οι εταιρίες να παράγουν όλες τις δυνάμενες εκροές στις ίδιες αναλογίες.

Από την άλλη οι J. Felipe και J.S.L McCombie¹⁴⁷, υποστηρίζουν, ότι το γεγονός ότι η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής έχει αμφισβητούμενες βάσεις, δεν μπορεί να «νομιμοποιηθεί» στο γεγονός, ότι μπορεί να δίνει μια συνεπή στατιστική

¹⁴² Passinetti (2003) σελ.228

¹⁴³ F.Fisher (2003) σελ.228

¹⁴⁴ Όπως έχει δείξει και ο B. Schefold (2009) είναι δυνατόν να υπάρξουν και «Approximate Surrogate Production Functions», συναρτήσεις που δύνανται να εμφανίσουν μια σχεδόν γραμμική w-r καμπύλη, στην περίπτωση ύπαρξης κανονικών (random) συστημάτων παραγωγής, οι ιδιοτιμές των οποίων –εκτός της μέγιστης-, τείνουν στο μηδέν (Bidard και Schatteman (2001)), όσο το μέγεθος (διαστάσεις τους) αυξάνονται.

¹⁴⁵ F.Fisher (2003) σελ.229

¹⁴⁶ Οι οποίες όπως είναι αυτονόητο μεταβαίνοντας σε ένα μακροοικονομικό επίπεδο, περιγράφονται από μια διαδικασία παραγωγής.

¹⁴⁷ J. Felipe και J.S.L McCombie (2003) σελ.229

συμπεριφορά, όταν ελέγχεται εμπειρικά. Το παράδοξο αυτό εντοπίζεται στους εισοδηματικούς περιορισμούς, στους οποίους δεν εμπεριέχονται υποθέσεις για την συνάρτηση παραγωγής (αθροιστικής) που υπάρχει στο παρασκήνιο, η οποία σε τελευταία ανάλυση δεν ισχύει.

Στα νεοκλασικά μοντέλα γίνονται οι γνωστές υποθέσεις:

1. Την παραγωγή την χαρακτηρίζουν Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας
2. Η προστιθέμενη αξία (καθαρό προϊόν) κάθε τομέα είναι το άθροισμα των μισθών και των συνολικών κερδών (υπερπροϊόντος). Το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα οι ελαστικότητες των παραγωγικών συντελεστών να είναι σταθερές και ίσες με τα μερίδια των παραγωγικών συντελεστών στην παραγωγή
3. Οι πραγματικοί μισθοί αυξάνονται κατά ένα σταθερό ποσοστό
4. Και η κάθε εταιρία θέτει τιμές, εκφρασμένες σε κόστη μοναδιαίας εργασίας, έτσι ώστε τα μερίδια των παραγωγικών συντελεστών στην παραγωγή να είναι σταθερά

Στα πλαίσια λοιπόν μιας συνάρτησης Cobb Douglas, οι ελαστικότητες των εκροών, είναι ίσες με τα μερίδια των παραγωγικών συντελεστών στην συνολική παραγωγή¹⁴⁸. Έτσι για τους J.Felipe και J.S.L McCombie¹⁴⁹ η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής, δεν είναι σε τελευταία ανάλυση μια συνάρτηση παραγωγής, αλλά ο εισοδηματικός περιορισμός επανεκφρασμένος σε όρους των παραπάνω υποθέσεων.

Επομένως βάσει των παραπάνω ο υπολογισμός της αξίας της εκροής μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής θα επιβεβαιώνεται στατιστικά, βάσει των παραπάνω προϋποθέσεων. Όμως αν κάποια από τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ισχύει αυστηρά, τότε είναι δυνατόν εξαιτίας αυτού, να εμφανίζονται αύξουσες αποδόσεις κλίμακας για να υπολογιστεί η αξία της εκροής του συστήματος.

Αντίθετα, για τον R.Greenfield¹⁵⁰ τα παραπάνω παράδοξα, κάθε άλλο παρά παράδοξα είναι.

¹⁴⁸ Βλ. Γ.Σταμάτης (1996) 178-179

¹⁴⁹ J. Felipe και J.S.L McCombie (2003) σελ.230

¹⁵⁰ R.Greenfield (2003) σελ 231

Ο R.Greenfield έχει ως αφετηρία το παράδειγμα του Samuelson με την παραγωγή σαμπάνιας, όπου υπάρχουν δύο εναλλακτικές τεχνικές παραγωγής και εμφανίζεται το φαινόμενο του reswitching.

Στην περίπτωση όπου μια τεχνική είναι περισσότερο εντατική ως προς την χρήση κεφαλαίου από την άλλη. Το κομβικό σημείο για τον Greenfield είναι, ότι όποια και αν είναι η περισσότερο εντατική ως προς την χρήση κεφαλαίου τεχνική, θα παραμένει η πλέον εντατική για κάθε ποσοστό κέρδους. Το τελευταίο μάλιστα το δικαιολογεί με τον ισχυρισμό ότι «tons of steel are tons of steel».

Βάσει των παραπάνω υποστηρίζει την ορθότητα¹⁵¹, των συμπερασμάτων του Yeager (1976). Υποστηρίζει μάλιστα ότι το παράδοξο, που εντοπίζουν οι Νεορικαρδιανοί και Νεοκευνσιανοί οικονομολόγοι, στην ουσία ποτέ δεν υπήρξε. Για αυτόν το ποσοστό κέρδους, καθορίζει την ποσότητα του σπάνιου συντελεστή που αρχικά οι Tourgot και μετέπειτα ο G.Cassel ονόμασαν «waiting for capital through time» και «capital disposal».

Ο Greenfield θέτει το ερώτημα, γιατί όταν ένα χαμηλότερο ποσοστό κέρδους συνεπάγεται την αλλαγή σε μια άλλη τεχνική παραγωγής, που είναι περισσότερο κερδοφόρα, οι νεορικαρδιανοί βασιζόμενοι μάλιστα σε μη οικονομικά κριτήρια , θεωρούν την αλλαγή αυτή παράδοξο.

Τέλος εντοπίζει μια εσωτερική αντίφαση, σύμφωνα με αυτόν, των νεορικαρδιανών οικονομολόγων, ότι σε τελευταία ανάλυση το κεφάλαιο αναλύεται από μόνο του σε εργασία. Βάσει του τελευταίου πιστεύει ότι μονάδα μέτρησης του κεφαλαίου είναι η εργασία.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι θέσεις των σημαντικότερων προσώπων στην εν λόγω διένεξη

.

6.1 P.Garegnani

Το άρθρο του Garegnani, αποτελεί μια κριτική στο προηγούμενο άρθρο του D. Levhari “A non Substitution Theorem and Switching of techniques (1965)”. Στο εν

¹⁵¹ Το ίδιο

λόγω άρθρο, ο βασικός ισχυρισμός του Levhari είναι ότι σε μια οικονομία που διαθέτει και εναλλακτικές μεθόδους παραγωγής, είναι αδύνατον να εμφανίζονται το φαινόμενο του reswitching¹⁵².

Ο P. Garegnani χρησιμοποιώντας τις ίδιες τις υποθέσεις του Levhari, προσπαθεί να αποδείξει, ότι είναι απολύτως δυνατή η ύπαρξη του φαινομένου του reswitching, χρησιμοποιώντας και ένα αριθμητικό παράδειγμα

.

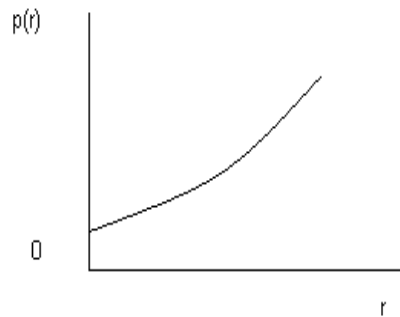
6.1.1 Υποθέσεις

Αναφέρουμε τις υποθέσεις του Levhari (και κατ' επέκταση του P. Garegnani):

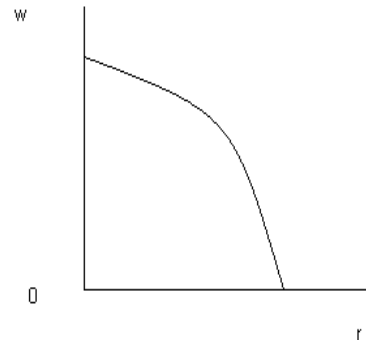
- Παράγονται εμπορεύματα μέσω εμπορευμάτων και ζωντανής εργασίας. Το κεφάλαιο είναι κυκλοφορούν. Η παραγωγή είναι απλή και φυσικά παραγωγική. Επιπλέον οι μισθοί προκαταβάλλονται.
- Παράγονται n εμπορεύματα, τα οποία μπορούν να παραχθούν από k_j εναλλακτικές για το καθένα διαδικασίες παραγωγής. Συνεπώς παίρνουμε $k_1 x k_2 x \dots x k_j$ εναλλακτικά, τετράγωνα (διαστάσεων $n \times n$) συστήματα απλής παραγωγής.
- Ορίζονται οι μήτρες των εισροών σε μέσα παραγωγής διαστάσεων $n \times m$, για τα συστήματα $A, B, A=[a_{ij}] \geq 0$ και $B=[b_{ij}] \geq 0$
- Επιπλέον ορίζεται το l_{xm} διάνυσμα l των εισροών σε ζωντανή άμεση εργασία, ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος και το l_{xm} διάνυσμα των τιμών παραγωγής p των εμπορευμάτων.
- Οι μήτρες A και B είναι μη διασπώμενες
- Ορίζονται τα βαθμωτά w και r που αντιπροσωπεύουν το ονομαστικό ωρομίσθιο, και το ποσοστό κέρδους
- Οι ονομαστικοί μισθοί και οι τιμές παραγωγής μετρούνται σε όρους ενός οποιουδήποτε εμπορεύματος, τέτοιου ώστε: για $0 \leq r \leq R$:

¹⁵² Οι θέσεις του D. Levhari, θα εξεταστούν εκτενέστερα στην συνέχεια στα πλαίσια της εξέτασης του αλγορίθμου της αγοράς στα πλαίσια τεχνικών απλής παραγωγής.

$\frac{dp}{dr} > 0$ και $\frac{dw}{dr} < 0$. Δηλαδή το σύστημα παραγωγής που εξετάζουμε είναι ομαλά συμπεριφερόμενο.



(Σχήμα1)



(Σχήμα 2)

Ο Levhari, και κατ επέκταση ο Garegnani παίρνει σαν μέτρο των τιμών το ονομαστικό ωρομίσθιο ($w=1$).

- Το κριτήριο επιλογής τεχνικής του Levhari είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους. Με άλλα λόγια επιλέγεται εκείνη η τεχνική, η οποία σε όρους της τεχνικής που αντικαθιστά, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, συνεπάγεται μικρότερο κόστος. Με μαθηματικούς όρους:

$$(1+r)[\ell_A + p_B A] \leq (1+r)[\ell_B + p_B B] \rightarrow (1)$$

$$\ell_A + p_B A \leq \ell_B + p_B B \rightarrow$$

$$p_B A - p_B B \leq \ell_B - \ell_A$$

- Για τον Levhari υπάρχει ένα διάνυσμα $n \times 1$ διαστάσεων x τέτοιο ώστε:

- $x_j \geq 0$ (2) και $\sum_{j=1}^n x_j > 0$ (3)

- $(A-B)x > 0$ (4.1) $(A-B)x < 0$ (4.2) $(A-B)x = 0$ (4.3)

Κατ' αρχήν ο Garegnani θέτει υπο αμφισβήτηση ότι ένα τέτοιο διάνυσμα x^* υπάρχει πάντα.

Οι Levhari-Garegnani από την σχέση 1 καταλήγουν μέσω της (2) και της (3) στην :

$$\psi(r) = p(A-B)x^* \quad (5). \text{ Από την υποθέσεις γνωρίζουμε ότι:}$$

$$\frac{dp}{dr} > 0.$$

Για το (A-B) x^* ισχύει για την (5):

- Αν $\frac{d\psi}{dr} > 0$, τότε (A-B) $x^* > 0$
- Αν $\frac{d\psi}{dr} < 0$, τότε (A-B) $x^* < 0$
- Αν $\frac{d\psi}{dr} = 0$, τότε (A-B) $x^* = 0$

Στο τελευταίο βήμα του συλλογισμού του ο Levhari, εξετάζει το ζήτημα της εναλλαγής των τεχνικών. Σύμφωνα με τον τελευταίο λοιπόν, αν για δεδομένο ύψος του r , έστω $\bar{r}$, $0 \leq \bar{r} \leq R_{\max}^{(A)}$, η τεχνική A είναι πιο κερδοφόρα από την B και αν το ποσοστό κέρδους αυξηθεί σε $\bar{r}'$, $0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}' \leq R_{\max}^{(A)}$ οι παραγωγοί χρησιμοποιούν την τεχνική B. Στην περίπτωση αυτή, κατά τον Levhari: $\psi(\bar{r}') > \psi(\bar{r})$, δηλαδή η τεχνική B είναι περισσότερο κερδοφόρα από την A, με άλλα λόγια θα ισχύει το

$\psi(\bar{r}') > (A-B)x^*$ (όπου δηλαδή $B \supset A$) ενώ στην αντίθετη περίπτωση, όπου δηλαδή $A \supset B$, θα έχουμε $\psi(\bar{r}') < (A-B)x^*$

Η εναλλαγή του συστήματος από την τεχνική A στην τεχνική B, μπορεί μόνο τότε να ισχυρεί όταν $\psi(\bar{r}') > \psi(\bar{r})$.

Όπως προϋποθέσαμε παραπάνω οι συναρτήσεις $\psi(\bar{r})$ είναι μονότονα αύξουσες. Επομένως αν το σύστημα μεταβεί από την τεχνική A στην τεχνική B, θα παραμείνει σε αυτήν. Με τον τρόπο αυτόν ο Levhari «πετάει» έξω από την συζήτηση το φαινόμενο του reswitching.

6.1.2 Τα εσφαλμένα πορίσματα του Levhari κατά τον Garegnani

Για τον Garegnani τα λάθος πορίσματα του Levhari είναι δύο:

1. το ότι το $\psi(\bar{r}') > \psi(\bar{r})$ όταν η $B \supset A$
2. Το μεγαλύτερο σφάλμα του Levhari, κατά τον Garegnani, είναι ότι, υπάρχει

$$\text{ένα } x^* : x_j \geq 0 \text{ και } \sum_j^n x_j > 0$$

Στο πρώτο μέρος της κριτικής του ο Garegnani ασχολείται με το πρώτο εσφαλμένο πόρισμα.

Για τον Levhari για να γίνει η μετάβαση από την τεχνική A στην τεχνική B, πρέπει να ισχύει το $\psi(\bar{r}') > \psi(\bar{r})$. Αντίθετα για τον Garegnani κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο να ισχύει. Όπως είπαμε το $x_j \geq 0$.

Από την σχέση (5) όμως γίνεται φανερό ότι για να είναι $\psi(\bar{r}') < \psi(\bar{r})$ τότε πρέπει σε μία η περισσότερες από της σχέσεις του συστήματος (σχέσης) (5) να ισχύει το $<$. Όμως τίποτε δεν μπορεί να μας εγγυηθεί, ότι το x_j δεν θα είναι μηδενικό έτσι ώστε να οδηγούμαστε στο $\psi(\bar{r}') = \psi(\bar{r})$. Το τελευταίο μάλιστα κατά τον Garegnani επιτρέπει στους παραγωγούς (και λόγω της μονοτονικότητας των $\psi(\bar{r})$ να μεταπηδούν από την τεχνική A στην τεχνική B και τούμπαλιν,

Έτσι για να ισχύουν τα συμπεράσματα του Levhari, πρέπει το ημιθετικό διάνυσμα x_j να είναι τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα μη μηδενικό επίπεδο δραστηριότητας, στο οποίο η A και η B να μην είναι ισάξιες. Επομένως οι σχέσεις (2) και (3) θα αλλάξουν ως εξής:

$$x_j \geq 0$$

$$x_j > 0, j(1,2,3,\dots,n):$$

$$p(\bar{r})(A-B) < \ell_B - \ell_A$$

$$p(\bar{r}')(A-B) > \ell_B - \ell_A$$

Στην συνέχεια ο Levhari κάνει την υπόθεση, ότι οι μήτρες A και B μπορούν να εκληφθούν σαν τις μήτρες των εισροών και των εκροών αντίστοιχα ενός μοντέλου a' la von Neumann

$$\exists x^* : Bx^* = gAx^* > 0 \quad (7)$$

Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις (όπου g ο υλικός ρυθμός μεγέθυνσης):

- $\text{Av } g > 1: Bx^* - Ax^* > 0 \quad (8)$

- $\text{Av } g < 1: Bx^* - gAx^* < 0 \quad (9)$

- $\text{Av } g = 1: Bx^* = gAx^* \quad (10)$

Κατά τον Garegnani οι σχέσεις (7,8,9,10) φαίνονται αυθαίρετες. Ιδίως στην περίπτωση της (9) είναι απολύτως δυνατόν:

$$\exists x_j, j = 1, 2, \dots, n: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \leq 0 \quad (11)$$

Δηλαδή με άλλα λόγια είναι δυνατόν να ισχύουν και οι τρεις περιπτώσεις ($\geq$, $=$, $<$).

Επομένως, η παράγωγη θεωρία του μοντέλου του von Neumann, δεν δείχνει να επαληθεύει την ύπαρξη ενός $x_j > 0$: $\sum_{j=1}^n x_j > 0$.

Συνοψίζοντας μπορούμε να επαναλάβουμε εν συντομία τα αποτελέσματα της κριτικής του Garegnani στον Levhari:

A. Δεν υπάρχει κατ' ανάγκη ένα ημιθετικό διάνυσμα x_j τέτοιο ώστε:

$$x_j > 0: \sum_{j=1}^n x_j > 0$$

B. Υπάρχει ένα x_j που ικανοποιεί την $\sum_{j=1}^n x_j > 0$ αλλά περιέχει και αρνητικά στοιχεία.

Στην πρώτη περίπτωση η μονοτονικότητα της $\psi(r)$ δεν ισχύει κατ' ανάγκη πράγμα που σημαίνει ότι είναι απολύτως δυνατή η ύπαρξη του φαινομένου του reswitching.

6.1.3 Γενικότερη κριτική του Garegnani στην νεοκλασική θεωρία

Όπως είναι γνωστό κύριο πόρισμα της νεοκλασικής θεωρίας είναι η αντίστροφη σχέση μεταξύ έντασης κεφαλαίου και ποσοστού κέρδους¹⁵³. Αυτή η ιδιότητα έχει σαν αποτέλεσμα την ύπαρξη μίας μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών ως προς την κερδοφορία τους. Το τελευταίο όμως αποκλείει την περίπτωση του reswitching, καθώς σε νεοκλασικούς όρους η τεχνική στην οποία θα επέστρεφε το σύστημα θα ήταν και μικρότερης έντασης κεφαλαίου αλλά και λιγότερο κερδοφόρα. Δηλαδή θα καταλήγαμε σε άτοπο.

Ο εντοπίζει αυτό το παράδοξο της νεοκλασικής θεωρίας στην προσπάθεια των νεοκλασικών οικονομολόγων να αντιμετωπίσουν το κεφάλαιο σαν μια πρωταρχική εισροή (δηλαδή σαν μια εισροή που δεν αλλάζει με την κατανομή του εισοδήματος).

¹⁵³ Με άλλα λόγια όσο η ένταση κεφαλαίου του συστήματος αυξάνεται, το ποσοστό κέρδους μειούται.

Συν τοις άλλοις ο Garegnani εντοπίζει το πρόβλημα της μέτρησης του συντελεστή παραγωγής κεφάλαιο, αφού η τελευταία εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε. Επιπλέον και ή ίδια η τιμή ενός μέσου παραγωγής (ταυτόσημη έννοια με την αξία για τους νεοκλασικούς) εξαρτάται βεβαίως και από την διανομή του εισοδήματος και όχι από την διαφορά προσφορά και ζήτησης, όπως φαίνεται και από την σχέση $\frac{dp}{dr} > 0$ και $\frac{dw}{dr} < 0$

Δηλαδή αυτό που προσπαθεί να κάνει ο Garegnani είναι να χτυπήσει την νεοκλασική θεωρία σε ένα θεώρημα-πυρήνα για αυτήν, που δεν είναι άλλο από το Non-Substitution Theorem

6.1.4 Garegnani-Levhari και τυπικά υποσυστήματα

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι αυτό που κάνει ο Levhari είναι να προτείνει ένα κανόνα κατάταξης τεχνικών παραγωγής, βασιζόμενος στο cost minimization criterion. Ακολουθώντας μια λογική παρόμοια με αυτή του von Neumann προσπαθεί να καταλήξει σε μία τεχνική, που δεν αποφέρει υπερκέρδη, αλλά μεταβάλλοντας το διάνυσμα δραστηριοτήτων του συστήματος. Έτσι προτείνει την ύπαρξη ενός ημιθετικού επιπέδου δραστηριοτήτων το οποίο μεγιστοποιεί την συνάρτηση των υπερκερδών $\psi(r)$ του συστήματος.

Κατά τον Levhari οι προαναφερθείσες συναρτήσεις $\psi(r)$ για κάθε τεχνική είναι μονότονα αύξουσες και τέτοιες ώστε να αποκλείεται η περίπτωση επαναφοράς του.

Ο Garegnani αμφισβητεί τόσο το γεγονός ότι υπάρχει πάντα ένα ημιθετικό διάνυσμα δραστηριοτήτων του συστήματος, όπως το προαναφερθέν. Επιπλέον αποδεικνύει την περίπτωση ύπαρξης του φαινομένου του reswitching.

Όμως και ο Garegnani δεν δείχνει να έχει υπόψη του, ότι η ύπαρξη του φαινομένου του reswitching στην γενικότερη περίπτωση εξαρτάται από την τυποποίηση των τιμών και ως εκ τούτου μπορούμε να μιλάμε για κατάταξη τυπικών υποσυστημάτων και όχι τεχνικών, πράγμα το οποίο και θα αποδειχθεί και στην συνέχεια.

6.2 L. Passinetti

Στα πλαίσια της διαμάχης των δυο Cambridge, ο Passinetti, όπως είδαμε παραπάνω, έδωσε και αυτός την απάντηση του στην παραγόμενη νεοκλασική θεωρία από τους Samuelson και Levhari.

Αρχικά, παραθέτουμε το αναλυτικό πλαίσιο του Passinetti.

Έστω λοιπόν δύο εναλλακτικές τεχνικές έστω η $[A, \ell_a]$ και η $[B, \ell_b]$, οι οποίες παράγουν μια μονάδα του εμπορεύματος G χρησιμοποιώντας μια ποσότητα του G (φυσικά <1), μια ποσότητα μέσων παραγωγής που παρήχθησαν σε προηγούμενες χρονικές περιόδους και φυσικά μια ποσότητα ζωντανής εργασίας¹⁵⁴.

Έτσι για λόγους απλούστευσης οι παραπάνω τεχνικές είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ell_a = [0, \ell_{2_a}] \text{ και}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ell_b = [\ell_{1_b}, 0, \ell_{3_b}]$$

Βλέπουμε, ότι οι δυο εναλλακτικές τεχνικές δεν έχουν τις ίδιες διαστάσεις, πράγμα που στην περίπτωση μας σημαίνει ότι η τεχνική B χρησιμοποιεί Μέσα Παραγωγής παλαιότερων χρονικών περιόδων από ότι η τεχνική A.

Έχουμε τα ακόλουθα συστήματα τιμών:

Για την τεχνική $[A, \ell_a]$:

$$p_a = p_a A(1+r) + w_a \ell_a$$

Και για την τεχνική $[B, \ell_b]$

$$p_b = p_b B(1+r) + w_b \ell_b$$

Η λύση που δίνεται για το διάνυσμα των τιμών είναι για τον Passinetti:

Για την τεχνική A

$$p_{a(t-i)} = w_a \ell_a (1+r)^t \quad ^{155}$$

¹⁵⁴ Αυτό που κάνει ο Levhari και κατ' επέκταση ο Passinetti, δεν είναι άλλο από το να παρουσιάσει τα μέσα παραγωγής που παρήχθησαν σε προηγούμενες περιόδους σαν διαδικασίες παραγωγής.

¹⁵⁵ Με t συμβολίζουμε τον αριθμό των περιόδων παραγωγής από τις οποίες χρησιμοποιεί εισροές το σύστημα και I την διαδικασία παραγωγής (την περίοδο) που εξετάζουμε

Για την τεχνική $[B, \ell_b]$

$$p_{b(t-i)} = w_b \ell_b (1+r)^t$$

Και στις δύο περιπτώσεις ο Passinetti χρησιμοποιεί σαν numeraire, την τιμή του εμπορεύματος G. Με αυτόν τον τρόπο καθιστά τις δύο τεχνικές, συγκρίσιμες μεταξύ τους.

Στην συνέχεια ο Passinetti αρχίζει την κριτική του στον Levhari. Κάνει την υπόθεση αρχικά ενός συστήματος με αναπαραγόμενο κεφάλαιο, με την έννοια ότι το παραχθέν κεφάλαιο κάθε περιόδου χρησιμοποιείται στην παραγωγή του κεφαλαίου της επόμενης. Τόσο για τον Levhari, όσο και για τον Passinetti χρησιμοποιούν τετράγωνες τεχνικές απλής παραγωγής (δηλαδή τετράγωνες μήτρες εισροών και εκροών).

Το ερώτημα που θέτει ο Passinetti είναι αν τα αποτελέσματα της ανάλυσης του Levhari, ισχύουν για κάποια ειδική περίπτωση, με συγκεκριμένους περιορισμούς ως προς την διάρκεια των κεφαλαιουχικών αγαθών (μέσων παραγωγής).

Στην ανάλυση του προσθέτει, ένα ακόμα τελικό εμπόρευμα, έστω το H, το οποίο και αυτό για την παραγωγή του χρησιμοποιεί και μέσα παραγωγής που παρήχθησαν σε προηγούμενες περιόδους. Έτσι κατασκευάζει τις τεχνικές $[A, \ell_a]^*$ και $[B, \ell_b]^*$, οι οποίες είναι προσαυξημένες κατά μια γραμμή και μια στήλη (σε σχέση με τις $[A, \ell_a][B, \ell_b]$) η οποία παριστά την παραγωγή του εμπορεύματος H. Έχοντας ξανά το εμπόρευμα G σαν numeraire και στις δύο σχέσεις ισχύουν οι ίδιες σχέσεις για τις τιμές παραγωγής.

Σύμφωνα λοιπόν με τον Passinetti, τα αποτελέσματα της ανάλυσης του είναι γενικά, υπο την έννοια ότι ισχύουν ανεξάρτητα του πόσο περίπλοκες είναι οι μήτρες των εισροών (τεχνικών συντελεστών)¹⁵⁶. Με άλλα λόγια καταλήγει, ότι όποια και αν είναι η διαφοροποίηση μεταξύ αναπαραγόμενων και διαρκών κεφαλαιουχικών αγαθών, τα αποτελέσματα της ανάλυσής του είναι γενικά.

Από την άλλη αναγνωρίζοντας τις αδυναμίες της έως τότε νεοκαραδιανής ανάλυσης κάνει την υπόθεση της ύπαρξης σταθερού κεφαλαίου. Υποστηρίζει ότι στην περίπτωση αυτή είναι αδύνατον να επιμεριστεί στο τέλος κάθε περιόδου η συνεισφορά του σταθερού κεφαλαίου στο κάθε παραγόμενο εμπόρευμα ξεχωριστά. Με άλλα λόγια όπως παραδέχεται και ο ίδιος έρχεται αντιμέτωπος με το πρόβλημα της σύνθετης παραγωγής (joint production).

¹⁵⁶ Με άλλα λόγια ανεξάρτητα του πόσα εμπορεύματα παράγουν οι εν λόγω τεχνικές

Στην συνέχεια ο Passinetti ξεδιπλώνει την κριτική του. Κατ' αυτόν ο Levhari συγκρίνει τα διανύσματα τιμών που σχετίζονται με τις μήτρες A και B και τα διανύσματα ℓ_a και ℓ_b . Για αυτόν ο Levhari συγκρίνει έμμεσα τις τεχνικές. Μετά μάλιστα από κάποιους «αλγεβρικούς χειρισμούς, φέρνει στο ίδιο μέρος της σχέσης τις μήτρες A και B και τις πολλαπλασιάζει με ένα ημιθετικό διάνυσμα x, $x \geq 0$, τέτοιο ώστε:

$$[A-B]x \geq 0 \text{ ή } [A-B]x \leq 0 \text{ ή } [A-B]x = 0.$$

Όμως κατά τον Passinetti αυτός ο συλλογισμός ενέχει ένα πρόβλημα αν $x > 0$ τότε δύναται να μην ισχύει καμία από τις τρεις περιπτώσεις. Κατ' αυτόν ένα ημιθετικό διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος βγάζει εκτός τις ανάλυσης κάποιες διαδικασίες. Το τελευταίο δείχνει να θεωρείται ανεύ σημασίας από τον Levhari, καθώς για αυτόν είναι αρκετό να βρεί ποια τεχνική συνεπάγεται γενικά τις χαμηλότερες τιμές παραγωγής. Το τελευταίο είναι και αυτό που καθιστά μια τεχνική, για αυτόν, μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους.

Αυτό που κάνει με άλλα λόγια είναι να παίρνει διαφορές σπάζοντας τα διανύσματα των τιμών παραγωγής στα δύο συστατικά τους:

1. Αφενός στην διαφορά μεταξύ των διανυσμάτων των εισροών σε εργασία
2. Στην διαφορά των μητρών εισροών πολλαπλασιασμένες με ένα διάνυσμα γραμμής έστω m

Με μαθηματικούς όρους:

$$m[A-B] \geq \ell_a - \ell_b$$

Σε κάθε ένα από τα μέρη της παραπάνω σχέσης υπάρχει μια μη μηδενική συνιστώσα η οποία και ευθύνεται για τις μεταβολές των τιμών παραγωγής και τις (εν)αλλαγές των τεχνικών παραγωγής.

Όλη αυτή η διαδικασία σε οικονομικούς όρους μας ωθεί στο να συγκρίνουμε δυο σειρές τιμών, στις οποίες έχει εξαλειφτεί από πριν το στοιχείο που παριστά το εμπόρευμα του οποίου η εναλλακτική διαδικασία παραγωγής εισάγεται.

Εφαρμόζοντας για τον Passinetti, τον «αλγόριθμο» του Levhari είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί ένα διάνυσμα x του οποίου το πρώτο στοιχείο να είναι μηδέν και όλα τα άλλα είναι δυνατόν να είναι θετικά. Με άλλα λόγια αυτό που κάνει είναι, να εξαφανίζει την διαδικασία παραγωγής κατά την οποία οι δύο τεχνικές διαφέρουν και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $(A-B)x=0$ και στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι $A \approx B$

Συνεχίζοντας ο Passinetti, εξετάζει την σχέση ποσοστού κέρδους και έντασης κεφαλαίου. Για τον Passinetti, όταν το ποσοστό κέρδους μεταβάλλεται αλλά η φυσική ποσότητα παραμένει η ίδια, οι τιμές των φυσικών ποσοτήτων των μέσων παραγωγής αλλάζουν, κατά τρόπο ο οποίος μπορεί να είναι διαφορετικός από το ένα εμπόρευμα στο άλλο.

Για τους νεοκλασσικούς από την άλλη πλευρά η φυσική ποσότητα των μέσων παραγωγής μεταβάλλεται λόγω μεταβολής του ποσοστού κέρδους. Πιο συγκεκριμένα με αυξανόμενο ποσοστό κερδους, η ποσότητα των μέσων παραγωγής (και κατ' επέκτασιν η ένταση κεφαλαίου) θα μεταβληθεί αντίστροφα από ότι το ποσοστό κέρδους.

Στην ανάλυση του ο Passinetti και για λόγους απλούστευσης παίρνει δύο τεχνικές τέτοιες που οι παραγόμενες w - r να τέμνονται μεταξύ τους σε παραπάνω από 1 σημεία. Σε γενικές γραμμές για τον Passinetti το κατά κεφαλήν καθαρό προϊόν θα διαφέρει ανάμεσα στις δύο τεχνικές ανεξαρτήτως της τυποποίησης που έχει γίνει (με άλλα λόγια ανεξάρτητα από το ποιο εμπόρευμα έχει επιλεγεί σαν numeraire).

Στα switch points το ονομαστικό ωρομίσθιο και το ποσοστό κέρδους είναι ίσα ανάμεσα στις δύο τεχνικές. Αφού το ποσοστό κερδους και το ονομαστικό ωρομισθιο είναι το ίδιο ανάμεσα στις δύο τεχνικές συνεπάγεται ότι η φυσική ποσότητα των μέσων παραγωγής (και κατ' επέκταση η ένταση κεφαλαίου) δεν θα είναι ίση ανάμεσα στις δύο τεχνικές.

Έτσι είναι δυνατόν το σύστημα με αυξανόμενο ποσοστό κέρδους να περαρνάει από μια περισσότερο εντατική ως προς την χρήση κεφαλαίου σε μια λιγότερο εντατική και ξανά σε μια περισσότερο εντατική και τουμπαλιν. Πράγμα που είναι εκ διαμέτρου αντίθετο με τα αποτελέσματα της νεοκλασικής ανάλυσης, όπου μεταξύ εντάσεως κεφαλαίου και ποσοστού κέρδους υπάρχει μια αντίστροφη σχέση.

Το γενικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει ο Passinetti είναι ότι δεδομένων των μεταβολών του ποσοστού κέρδους, δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για το πώς κινείται η ένταση κεφαλαίου στο διάστημα αυτό του ποσοστού κέρδους.

6.3 Krishna Bharadwaj

Ένα πολύ σημαντικό άρθρο στα πλαίσια της διαμάχης των δυο Cambridge, ήταν και αυτό της Krishna Bharadwaj, “On the maximum Number of Switches Between Two Production Systems”.

Η ανάλυσή της, κινείται στα πλαίσια δυο συστημάτων παραγωγής. Αφενός ενός μοντέλου που παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα και αφετέρου, ενός μοντέλου που παράγει και βασικά και μη βασικά εμπορεύματα.

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου το υπό εξέταση σύστημα παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα.

6.3.1 Παράγονται μόνο βασικά εμπορεύματα

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν δυο τεχνικές απλής παραγωγής, έστω $[A, \ell]$ και $[B, h]$. Όπου A είναι η μήτρα των τεχνικών συντελεστών, διαστάσεων $m \times m$ και το ℓ ένα $m \times 1$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία. Ομοίως η B είναι μια $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών και h ένα $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε εργασιακή δύναμη.

Οι τεχνικές αυτές για την Bharadwaj έχουν s κοινά παραγόμενα εμπορεύματα. Κατά συνέπεια η τεχνική $[A, \ell]$ παράγει $(m-s)$ εμπορεύματα που χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σε αυτήν. Ομοίως η $[B, h]$ παράγει $(n-s)$ εμπορεύματα που χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σε αυτήν.

Τα switch points είναι σημεία, όπου οι δυο τεχνικές το ίδιο ονομαστικό ωρομίσθιο και τις ίδιες τιμές για κάθε ένα από τα κοινά s εμπορεύματα.

Η Bharadwaj ψάχνει τιμές του ποσοστού κέρδους, όπου ισούνται οι τιμές παραγωγής των δυο τεχνικών καθώς και τα ονομαστικά ωρομίσθια.

Με άλλα λόγια ψάχνει τα switch points για τις δύο τεχνικές. Η Bharadwaj κάνει και την διαπίστωση, ότι στην περίπτωση που δυο τεχνικές διαφέρουν κατά περισσότερες από μια διαδικασίες παραγωγής και οι τιμές τυποποιηθούν με ένα κοινό στις δυο τεχνικές τυπικό εμπόρευμα, τότε (οι τιμές) ενδέχεται να διαφέρουν ανάμεσα στις δυο τεχνικές στα switch points.

Η Bharadwaj εξάγει την τιμή του ποσοστού κέρδους στα switch points, λύνοντας το πολυώνυμο:

$$F(r) = p[A^+ - B^+]e_i r + w[\ell^+ - h^+]e_i = 0, e_i = 1, 2, \dots, m+n-s \quad (1) \quad ^{157}$$

¹⁵⁷ η Bharadwaj αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι οι μήτρες A και B καθώς και τα διανύσματα ℓ και h είναι διαφορετικών διαστάσεων. Για να μπορέσει να λύσει το πολυώνυμο (1) προσανξάνει την μήτρα

Τα switch points επομένως είναι οι επαναλαμβανόμενες λύσεις (τιμές) του πολυωνύμου (1), οι οποίες περιορίζονται εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών του ποσοστού κέρδους:

$$1 \leq r \leq 1 + R, R = \min[R_A, R_B]$$

Κατά συνέπεια:

$$r : p(r) > 0$$

Το γενικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι για n βασικά εμπορεύματα κοινά σε δυο υπό σύγκριση τεχνικές, ο μέγιστος αριθμός των σημείων εναλλαγής είναι n . Η υπόθεση της ύπαρξης γειτονικών τεχνικών είναι μάλλον απίθανη για την Bharadwaj, αφού την θεωρεί μη ρεαλιστική την ύπαρξη τεχνικών που χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό και είδος των βασικών εμπορευμάτων και διαφέρουν σε μια μόνο μέθοδος παραγωγής είναι μάλλον απίθανο να συμβεί.

6.3.2 Παράγονται και μη βασικά εμπορεύματα

Για την Bharadwaj η περίπτωση δύο τεχνικών, οι οποίες διαφέρουν σε μια η περισσότερες διαδικασίες παραγωγής των κοινών βασικών εμπορευμάτων, τα switch points βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω.

Ιδιαίτερη σημασία δίδεται από την Bharadwaj σε δυο περιπτώσεις:

1. Εάν υπάρχει εναλλακτική διαδικασία παραγωγής για ένα μη βασικό εμπόρευμα, τότε θα υπάρξουν αλλαγές στην μέθοδο παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων
2. Τα μη βασικά εμπορεύματα μπαίνουν στο τυπικό εμπόρευμα, και ως εκ τούτου εισέρχονται έμμεσα στον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων.

6.3.2.1 Περίπτωση 1.

$A(B)$ και το ℓ (h) κατά τις διαδικασίες που παράγουν τα εμπορεύματα που παράγει αποκλειστικά η τεχνική $[B, h]([A, \ell])$ ως μη βασικά. Κατά συνέπεια $rank[A^+, B^+] = m + (n - s)$

Έστω ότι για ένα μη βασικό εμπόρευμα, υπάρχει μια εναλλακτική μέθοδος παραγωγής. Έστω ότι ένα κοινό για τις δύο τεχνικές μη βασικό εμπόρευμα λειτουργεί ως numeraire.

Στην περίπτωση αυτή, οι δυο τεχνικές διαφέρουν μόνο κατά την διαδικασία παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος, για το οποίο γίνεται λόγος. Ως εκ τούτου ο αριθμός των σημείων εναλλαγής θα δίδεται από την διάσταση της επαυξημένης μήτρας $[A^+ - B^+]$.

6.3.2.2 Περίπτωση 2

Έστω ότι δυο τεχνικές διαφέρουν κατά μια διαδικασία παραγωγής για ένα βασικό εμπόρευμα. Επιπλέον γίνεται η υπόθεση τα μη βασικά εμπορεύματα, εμπεριέχονται στο τυπικό εμπόρευμα. Ο Bharadwaj εξετάζει πως τα παραπάνω θα επηρεάσουν τον αριθμό των σημείων εναλλαγής.

Η Bharadwaj κάνει τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Εάν το μη βασικό εμπόρευμα που εξετάζουμε δεν χρησιμοποιείται στην δική του παραγωγή, τότε ο μέγιστος αριθμός των σημείων εναλλαγής είναι ίσος με τον αριθμό των διαδικασιών παραγωγής της εν λόγω τεχνικής
2. Εάν το μη βασικό εμπόρευμα, χρησιμοποιείται στην ίδια την δική του παραγωγή, τότε με το μη βασικό εμπόρευμα σαν numeraire, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων δεν μπορεί να είναι θετικές.

Στην συνέχεια εξετάζει την περίπτωση όπου τόσο βασικά, όσο και μη βασικά εμπορεύματα εμπεριέχονται στο τυπικό εμπόρευμα. Και διαπιστώνει ότι:

1. Όσα εκ των μη βασικών εμπορευμάτων τα οποία εισέρχονται έμμεσα ή άμεσα στην ίδια την δική τους παραγωγή και ταυτόχρονα στο τυπικό εμπόρευμα, προστίθενται στον αριθμό των λύσεων για το πολυώνυμο (1)
2. Οι λύσεις που προστίθενται στις λύσεις του ποσοστού κέρδους, δεν λαμβάνονται υπόψη καθώς ισούνται με των αριθμό αναπαραγωγής για τα μη βασικά εμπορεύματα. Με άλλα λόγια διαπιστώνεται, σε συμφωνία και με το Srafa, ότι οι τιμές παραγωγής για κάθε εμπόρευμα θα είναι ίσες με μηδέν.

Συγκεφαλαιώνοντας μπορούν να εξαχθούν, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Στα switch points, διαφέρουν οι δυο υπό εξέταση τεχνικές κατά μια διαδικασία παραγωγής ενός βασικού εμπορεύματος. Στην περίπτωση αυτή ο

μέγιστος αριθμός των switch points είναι ίσος με τον αριθμό των εμπορευμάτων που εισέχονται άμεσα και έμμεσα στην διαδικασία όλων των εμπορευμάτων των δυο υπό εξέτασιν τεχνικές.

2. Στην περίπτωση όπου δυο τεχνικές διαφέρουν κατά μια μέθοδο παραγωγής ενός μη βασικού εμπορεύματος, ο μέγιστος αριθμός των switch points είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των βασικών εμπορευμάτων των δυο τεχνικών, συν τον αριθμό των μη βασικών εμπορευμάτων που εισέρχονται άμεσα και έμμεσα στην διαδικασία παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος κατά το οποίο διαφέρουν οι δύο τεχνικές.
3. Η επιλογή του τυπικού εμπορεύματος, δεν επιρρεάζει τον αριθμό των switch points
4. Η κατάταξη των εμπορευμάτων σε βασικά και μη βασικά εμπορεύματα για ένα συστημα παραγωγής, χρησιμοποιεί περισσότερες πληροφορίες από ότι η κατάταξη ενός συστήματος σε διασπώμενο ή μη διασπώμενο.

6.4 Συμπεράσματα

Είδαμε λοιπόν ότι η διαμάχη των δύο Cambridge, εισέρχεται στον πυρήνα των δύο θεωριών.

Από την μία πλευρά, οι νεορικαρδιανοί, δεν δέχονται την νεοκλασική αθροιστική συνάρτηση παραγωγής, η οποία ευαγγελίζεται τον προσδιορισμό των μεταβλητών του εισοδήματος μόνο από τεχνολογικούς παράγοντες. Για τους νεοκλασικούς τόσο οι σχετικές τιμές των εμπορευμάτων όσο και των παραγωγικών συντελεστών, καθορίζονται από την οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών αυτών. Από την άλλη οι νεορικαρδιανοί, έχοντας σαφή ιδεολογικό προσανατολισμό, καταλήγουν σε ένα σύστημα τιμών που εξαρτάται και από τις μεταβλητές του εισοδήματος, και στην $w-r$ σχέση. Η $w-r$ σχέση, δίνει μια ιδεολογική στροφή στην ως τότε σκέψη, αφού θεωρεί το εισόδημα μιας τάξης συνάρτηση του εισοδήματος της άλλης τάξης¹⁵⁸.

¹⁵⁸ Αυτό κυρίως εκφράστηκε από τον N. Kaldor

Οι νεορικαρδιανοί θεωρούν τις νεοκλασικές συναρτήσεις παραγωγής τουλάχιστον μη ρεαλιστικές. Θεωρούν αδιανόητη την έννοια του ομοιογενούς κεφαλαίου και της ομοιογενούς εργασίας.

Οι νεορικαρδιανοί πίστευαν ότι έχουν καταρρίψει την έννοια της αθροιστικής συνάρτησης και το οικοδόμημα των παραδοσιακών καμπυλών ζήτησης για κεφαλαιουχικά αγαθά και εργασία. Η θεωρία για τους νεορικαρδιανούς μετατοπίζεται στην σωστή της θέση, a la Ricardo.

Με άλλα λόγια οι νεορικαρδιανοί εξετάζουν την σχέση μεταξύ των μισθών, του ποσοστού κέρδους και το σύστημα των τιμών. Με άλλα λόγια εξετάζουν το σύστημα των σχετικών τιμών σε συνάρτηση όχι μόνο με τεχνολογικούς παράγοντες, αλλά και με την διανομή του εισοδήματος. Με άλλα λόγια κάνουν μια εκ νέου διαφοροποίηση στα εμπορεύματα, όπως ο Ricardo, δηλαδή σε αυτά η αξία των οποίων καθορίζεται από την σπανιότητα και σε αυτά που η αξία τους καθορίζεται από την ζωντανή εργασία που εμπεριέχουν άμεσα και έμμεσα.

Επιπλέον, κυρίως με τον Sraffa, απέδειξαν την ύπαρξη του φαινομένου του reswitching, καταφέροντας το τελικό χτύπημα στην μονότονη σχέση κεφαλαίου και ποσοστού κέρδους.

Από την άλλη οι νεοκλασικοί, στα πλαίσια της αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής, το κεφάλαιο μετριέται σε όρους μια μονάδας μέτρησης και αθροίζεται σύμφωνα με αυτήν. Η μονάδα αυτή είναι συνήθως μια φυσική ποσότητα. Επιπλέον σύμφωνα με τους νεοκλασικούς οικονομολόγους η αδυναμία των νεορικαρδιανών οικονομολόγων έγκειται στο, ότι δεν μπορούν να επιβεβαιωθούν στατιστικά η αξία των εκροών ενός συστήματος a la Ricardo-Sraffa.

Επιπλέον σύμφωνα με τον Stiglitz¹⁵⁹ ένα σύστημα a la Ricardo-Sraffa δεν μπορεί να υπάρξει στην σύγχρονη οικονομική πραγματικότητα, αλλά μόνο σε κεντρικά σχεδιαζόμενες οικονομίες.

Η νεοκλασική θεωρία γύρω από την οριακή παραγωγικότητα ήταν πολύ σημαντική για την διαμόρφωση της θεωρίας της ενδογενούς μεγέθυνσης και για τις μεταπολεμικές θεωρίες στην οικονομετρία. Με εξαιρετικά απλά παραδείγματα, αφήνουν άθικτη την θεωρία της οριακής παραγωγικότητας, η οποία και σύμφωνα με

¹⁵⁹ Stiglitz Joseph E (1974)

αυτούς δεν έχει να κάνει με την ύπαρξη ή μη μιας αθροιστικής συνάρτησης παραγωγής.

Και οι δύο πλευρές εξέτασαν μοντέλα με ετερογενές κεφάλαιο, στα οποία κάθε τεχνική δεν επιτρέπει την υποκατάσταση μεταξύ των συντελεστών (συναρτήσεις παραγωγής *a la* Leontief). Οι νεοοικονομικοί επιτίθενται κυρίως με τον Sraffa στην θεωρία της οριακής παραγωγικότητας και στην νεοκλασική θεωρία εν γένει.

Οι νεοκλασικοί από την άλλη μεριά, είχαν σαν στόχο να υπερασπίσουν την αθροιστική συνάρτηση παραγωγής. Το στοίχημα για τους νεοκλασικούς ήταν να μπορέσουν τα νεοκλασικά μοντέλα παραγωγής, που παράγουν ένα εμπόρευμα, να σταθούν και κάτω από τις νεοοικονομικές υποθέσεις¹⁶⁰, οι οποίες για τον Harcourt(1972) ήταν περισσότερο ρεαλιστικές.

¹⁶⁰ Βλ . και Schefold B. (2006), (2008), (2009)

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ:

***Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΙ Η ΚΑΤΑΤΑΞΗ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ Η
ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΤΗΝ
ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ***

1 Κατάταξη τεχνικών

1.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και παραπάνω σε μια πραγματική οικονομία, το πλέον σύνηθες είναι αριθμός των διαθέσιμων διαδικασιών παραγωγής είναι μεγαλύτερος από αυτόν των παραγόμενων εμπορευμάτων. Το σύνολο όλων των διαθέσιμων τεχνικών παραγωγής το ονομάζουμε τεχνολογία.

Η ύπαρξη όλων των διαθέσιμων τεχνικών, εμπεριέχει την ανάγκη επιλογής μίας μόνο διαδικασίας, η οποία θα είναι η βέλτιστη για την οικονομία. Ο όρος βέλτιστη είναι από μόνος του αφηρημένος. Ωστόσο και ο ίδιος ο όρος της επιλογής τεχνικής είναι κάπως ασαφής. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι δεν διευκρινίζεται με ποιά κριτήρια επιλέγεται εν τέλει η πλέον συμφέρουσα τεχνική.

Από το Passinetti (1991) τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία επιλέγεται μία τεχνική δύναται να είναι:

1. το κριτήριο της επίτευξης της μέγιστης κερδοφορίας
2. το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους
3. το κριτήριο της επίτευξης της μέγιστης κατά κεφαλήν κατανάλωσης¹⁶¹

Κατά συνέπεια μιλώντας για κατάταξη τεχνικών είναι αναγκαίο να αναφερόμαστε πλέον σε δυο κριτήρια:

1. Στην επίτευξη της μέγιστης κερδοφορίας
2. Και στην επίτευξη του ελάχιστου δυνατού κόστους.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω θα παρουσιάσουμε τα παρακάτω κριτήρια:

1. Το w-r κριτήριο
2. Το cost minimization criterion
3. Τον αλγόριθμο της αγοράς
4. Το «κριτήριο» του John von Neumann

Αφού αναλύσουμε διεξοδικά τα ακόλουθα κριτήρια θα γίνουν κάποιες παρατηρήσεις ως προς τους περιορισμούς στην χρήση τους.

¹⁶¹ Το τελευταίο από το Κ.Γόγολος (2000)σελ 240 και από το Passinetti (1991) δεν αποτελεί κάποιο κριτήριο επιλογής τεχνικής σε μια μη κεντρικά σχεδιαζόμενη οικονομία. Ακόμα και στο I.Steedman (1993) είναι φανερό ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος για να ισχύει το κριτήριο της επίτευξης της μέγιστης κατανάλωσης

Προτού όμως αναφερθούμε διεξοδικότερα στα κριτήρια αυτά, θα ήταν χρήσιμο να εξεταστεί λίγο εκτενέστερα ο όρος επιλογή τεχνικής. Τα ερωτήματα που τίθενται προκαταβολικά είναι:

- 1. Μπορούμε πράγματι να αναφερόμαστε σε κατάταξη τεχνικών, ή θα ήταν ορθότερο να αναφερόμαστε σε επιλογή τυπικών υποσυστημάτων;**
- 2. Μεταβάλλοντας το κριτήριο επιλογής των τεχνικών αλλάζει και η κατάταξη των τεχνικών;**

Η παρούσα διατριβή υποστηρίζει ότι στην ουσία μιλάμε για κατάταξη τυπικών υποσυστημάτων. Η απόδειξη του τελευταίου θα γίνει με αναφορές στην βιβλιογραφία, με θεωρητικά και αριθμητικά παραδείγματα. Επιπλέον θα δειχθεί στην γενική περίπτωση σε ποιες περιπτώσεις η κατάταξη των τεχνικών είναι ανεξάρτητη από το τυπικό εμπόρευμα, καθώς και σε ποιές περιπτώσεις τα κριτήρια επιλογής «τεχνικής» συμπίπτουν.

2 Το w-r κριτήριο

Όπως ειπώθηκε παραπάνω όταν υπάρχουν παραπάνω από μια διαθέσιμες τεχνικές παραγωγής, τίθεται το ζήτημα της επιλογής τεχνικής. Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε εκτενώς στο w-r κριτήριο.

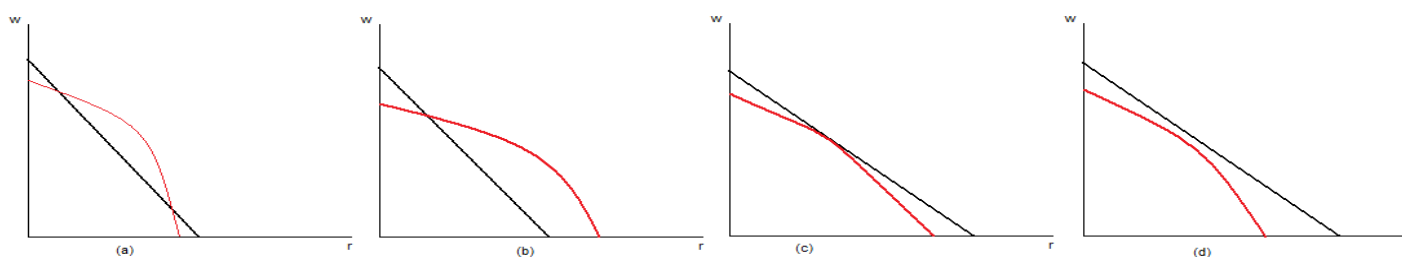
Αναφερόμενοι στο w-r κριτήριο επαναλαμβάνουμε ότι πρόκειται για την επιλογή εκείνης της τεχνικής, που για δεδομένο ποσοστό κέρδους (ονομαστικού ωρομισθίου), αποφέρει το μεγαλύτερο δυνατό ονομαστικό ωρομίσθιο (ποσοστού κέρδους)¹⁶².

Στην συνέχεια υποθέτουμε την ύπαρξη δύο διαθέσιμων τεχνικών παραγωγής. Έστω της (α) και της (β), οι οποίες περιγράφονται πλήρως από τα ζευγάρια $[A, \ell]$. Αρχικά θα εξετάσουμε διαγραμματικά το φαινόμενο αυτό. Στις ακόλουθες περιπτώσεις:

2.1 Η τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ είναι κυρτή και η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ είναι γραμμική

Στην περίπτωση αυτή¹⁶³, όπως γνωρίζουμε και από τον Passinetti¹⁶⁴, αφού πρώτα τυποποιήσουμε τις τιμές με ένα κοινό τυπικό εμπόρευμα, έστω $q, q \geq 0$, διαγράφουμε τις παραγόμενες w-r καμπύλες στο ίδιο επίπεδο. Εφεξής η κόκκινη γραμμή παριστά την τεχνική (α) και η μαύρη την τεχνική (β)

Μπορεί να ισχύουν διαζευκτικά:



Στην περίπτωση (α) έχουμε την γραμμή της τεχνικής (α) να τέμνει αυτή της τεχνικής (β) σε δύο σημεία. Η περίπτωση αυτή είναι κλασική ύπαρξης του φαινομένου του reswitching. Από την άλλη πλευρά στο σχήμα (β) η τεχνική (α) τέμνει την τεχνική

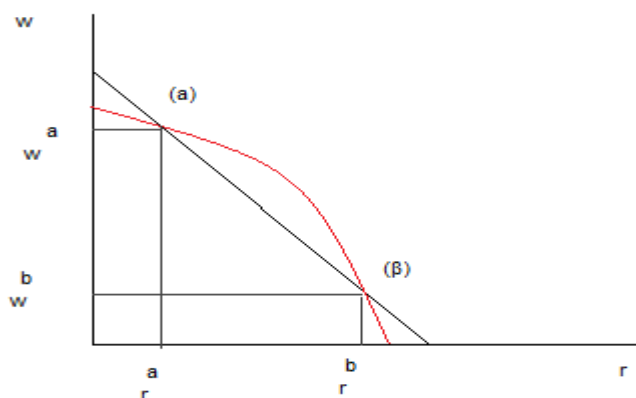
¹⁶² Βλ. Γ. Σταμάτης (1989) σελ 111

¹⁶³ Όπως είναι αυτονόητο τίποτα δεν θα άλλαζε αν η γραμμική τεχνική ήταν η (α) και η κυρτή η (β)

¹⁶⁴ Βλ. Passinetti 1991 σελ. 172-173

(β) σε ένα μόνο σημείο, όπως και στην περίπτωση (γ). Τέλος στην περίπτωση (δ) η τεχνική (α) και η τεχνική (β) δεν τέμνονται πουθενά.

Επειδή η περίπτωση που απασχόλησε την βιβλιογραφία είναι η (α) με αυτήν θα ασχοληθούμε και στην συνέχεια. Ας δούμε λίγο αναλυτικότερα την περίπτωση (α).



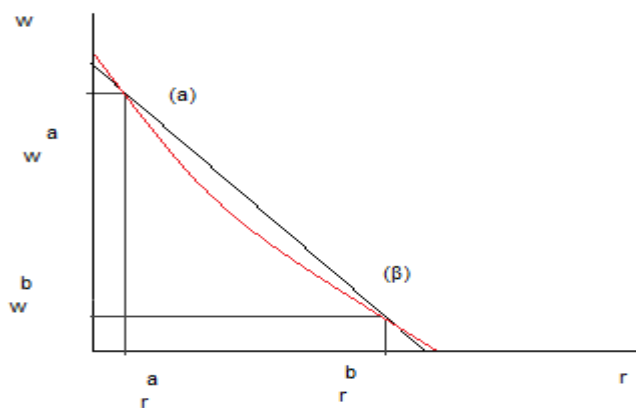
Στο παραπάνω σχήμα έχουμε ένα κλασικό φαινόμενο του reswitching. Στο διάστημα από 0 μέχρι το r^a η τεχνική που επιλέγεται είναι η (β) αφού για δεδομένο r αποφέρει το μεγαλύτερο w . Αντίστοιχα στο διάστημα r^a έως το r^b η τεχνική (α) επιλέγεται η τεχνική (α) καθώς για δεδομένο ποσοστό κέρδους επιφέρει το μεγαλύτερο δυνατό w . Τέλος στο διάστημα μεταξύ r^b μέχρι το R^b το σύστημα επιστρέφει για τους ίδιους λόγους στην χρησιμοποίηση της «τεχνικής» β. Με άλλα λόγια περιγράφει ένα φαινόμενο που όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι αδιανόητο να συμβεί σύμφωνα με τους νεοκλασικούς. Από τα παραπάνω βλέπουμε, ότι τα σημεία που επιλέγονται βρίσκονται πάνω στην περιβάλλουσα¹⁶⁵ των w - r καμπυλών των τεχνικών που συγκρίνονται.

2.2 Η τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ είναι κοίλη και η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ είναι γραμμική

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, και σύμφωνα με τον Passinetti¹⁶⁶, αφού πρώτα τυποποιήσουμε τις τιμές με ένα κοινό τυπικό εμπόρευμα, έστω $q, q \geq 0$, διαγράψουμε τις παραγόμενες w - r καμπύλες στο ίδιο επίπεδο.

¹⁶⁵ Στην βιβλιογραφία την βρίσκουμε και σαν outer envelope, και το κριτήριο επιλογής σαν outer envelope Theorem.

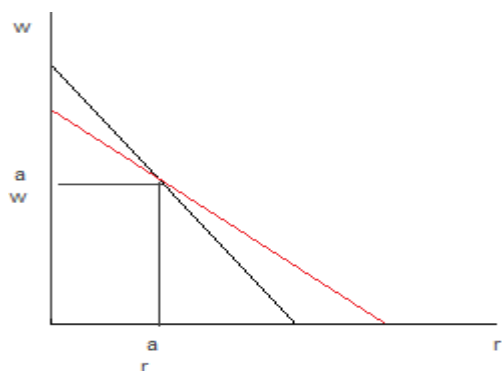
¹⁶⁶ Βλ. Passinetti 1991 σελ 173



Στο διάστημα από 0 μέχρι το r^a η τεχνική που επιλέγεται είναι η (α) αφού για δεδομένο r αποφέρει το μεγαλύτερο w . Αντίστοιχα στο διάστημα r^a έως το r^b επιλέγεται η τεχνική (β) καθώς για δεδομένο ποσοστό κέρδους επιφέρει το μεγαλύτερο δυνατό w . Τέλος στο διάστημα μεταξύ r^b μέχρι το R^a το σύστημα επιστρέφει για τους ίδιους λόγους στην χρησιμοποίηση της «τεχνικής» α.

2.3 Τόσο η τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ όσο και η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ είναι γραμμικές

Αν οι τιμές τυποποιηθούν με κάποιο τυπικό εμπόρευμα¹⁶⁷ μπορούν να δώσουν και οι δύο μια γραμμική σχέση, τότε οι διαγραμματικά το πρόβλημα επιλογής της τεχνικής θα δείχνει κάπως έτσι:



¹⁶⁷ Τυπικά εμπορεύματα που μπορούν να δώσουν μια γραμμική w - r σχέση είναι το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa, το τυπικό εμπόρευμα του Miyao, ή το τυπικό εμπόρευμα του Σ.Βασσιλάκη. Για περισσότερα γύρω από την γραμμικότητα μιας w - r σχέσης βλ. Γ.Σταμάτης (1994) σελ.227-235, Κ.Γόγολος,(2000) και παρούσα διατριβή Κεφαλαίο 5 (πρώτο μέρος)

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι στο διάστημα 0 έως r^a επιλέγεται σύμφωνα με το w-r κριτήριο η τεχνική β και στο διάστημα από r^a έως R^a η τεχνική α.

Είναι φανερό, ότι στην περίπτωση όπου συγκρίνονται δύο γραμμικές w-r καμπύλες μπορεί να υπάρξει μόνο ένα σημείο τομής των τεχνικών και συνεπώς ένα switch point. Κατά συνέπεια στην περίπτωση δύο γραμμικών w-r σχέσεων το φαινόμενο του reswitching είναι αδύνατον να συμβεί.

Τα παραπάνω θα τα εξετάσουμε και σε όρους μίας μαθηματικής διερεύνησης όπως θα δούμε και παρακάτω.

2.4 Μαθηματική διερεύνηση

Έστω οι γραμμικές τεχνικές $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$. Σύμφωνα με το w-r κριτήριο οι δύο τεχνικές συγκρίνονται, ως προς το ποια τεχνική, για ένα συγκεκριμένο ύψος του ονομαστικού ωρομισθίου (ποσοστού κέρδους), συνεπάγεται το μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους (ονομαστικό ωρομίσθιο). Όμως για να οριστεί το ποσοστό κέρδους είναι απαραίτητο πρώτα να τυποποιηθούν οι τιμές με ένα κοινό, για τις υπό εξέταση τεχνικές, τυπικό εμπόρευμα. Ας δούμε τα παραπάνω αναλυτικότερα:

Για το σύστημα τιμών της τεχνικής $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ προκύπτει:

$$P = P^{(a)}(w) = w \ell^{(a)} \quad (1)$$

Και για τις τιμές παραγωγής της τεχνικής $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$

$$P = P^{(b)}(w) = w \ell^{(b)} \quad (2)$$

Αν οι τιμές τυποποιηθούν με το τυπικό εμπόρευμα $q, q \geq 0$:

$$P = q P^{(a)}(q) = q \ell^{(a)} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) ισχύει βασιζόμενοι στην (3):

$$P = q P^{(a)}(q) = q \ell^{(a)} \quad (4)$$

BEHAGNER

$$w^{(a)} = w^{(b)} = \bar{w} \quad (6)$$

Υποθέτουμε παρακάτω ότι για κάθε τεχνική υπάρχουν δύο διαδικασίες παραγωγής

Έτσι ισχύει για το σύστημα τιμών κάθε τεχνικής:

APPENDIX (7)

~~SECRET~~ (8)

Αφού όμως το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι εξωγενώς δεδομένο, τότε μπορεί

~~13-00000-1201-1~~ (0)

Όπως αναφέραμε παραπάνω συγκρίνουμε ποια από τις δύο τεχνικές, για δεδομένο

Για το $\tilde{p}_1^{(\cdot)}$ ισχύει:

$$r = \frac{p_2^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} - \ell_2^{(\cdot)} a_{12}^{(\cdot)}}{p_2^{(\cdot)} a_{21}^{(\cdot)} - \ell_2^{(\cdot)} a_{22}^{(\cdot)}} \quad (10)$$

Για το r από την σχέση (9) και (10)

$$\begin{aligned} r = & \pm \frac{1}{2} \left(a_{12}^{(\cdot)} \ell_1^{(\cdot)} + 2 a_{12}^{(\cdot)} p_2^{(\cdot)} a_{21}^{(\cdot)} + p_2^{(\cdot)} a_{22}^{(\cdot)} \right. \\ & - 2 p_2^{(\cdot)} a_{22}^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} + p_2^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} - \ell_2^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} + \sqrt{D}, D \\ & \equiv \left(-2 p_2^{(\cdot)2} a_{22}^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} + 4 a_{12}^{(\cdot)} p_2^{(\cdot)2} a_{21}^{(\cdot)} - 2 p_2^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)2} \right. \\ & + 2 p_2^{(\cdot)} a_{22}^{(\cdot)} \ell_2^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} - 4 a_{12}^{(\cdot)} p_2^{(\cdot)} a_{21}^{(\cdot)} \ell_2^{(\cdot)} + a_{12}^{(\cdot)2} \\ & \left. \ell_1^{(\cdot)2} + p_2^{(\cdot)2} a_{22}^{(\cdot)2} + p_2^{(\cdot)2} a_{11}^{(\cdot)2} + \ell_2^{(\cdot)2} a_{11}^{(\cdot)2} \right)^{1/2} \Bigg) / \left(p_2^{(\cdot)} \left(\right. \right. \\ & \left. \left. - a_{12}^{(\cdot)} a_{21}^{(\cdot)} + a_{22}^{(\cdot)} a_{11}^{(\cdot)} \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Η σχέση που καταλήγουμε αν και φαίνεται περίπλοκη εν τούτοις καταλήγουμε, ότι η μόνη μεταβλητή, η οποία καθορίζει την τιμή του ποσοστού κέρδους είναι η τιμή του δεύτερου προϊόντος. Η τιμή του δεύτερου προϊόντος καθορίζεται από την σχέση (10) και την εξίσωση τυποποίησης. Η οποία για λόγους κατανόησης θα υποθέσουμε ότι:

$$p_2^{(\cdot)} = 1 \quad (12)$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (12) στην (11), καταλήγουμε σε μια από τις τρεις περιπτώσεις¹⁶⁸:

$r^{(a)} < r^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

$r^{(a)} = r^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$r^{(a)} > r^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

2.4.2 1.Με δεδομένο το ποσοστό κέρδους

Αν η τιμή του ποσοστού κέρδους είναι εξωγενώς δεδομένη έστω:

¹⁶⁸ Ωστόσο, όπως έχουμε δει είναι απολύτως δυνατόν η τιμή του ποσοστού κέρδους να μεταβληθεί με την τυποποίηση και οι σχέσεις (21)-(23) να μην ισχύουν. Σε ποιες περιπτώσεις και για ποιους λόγους ισχύει το τελευταίο θα το δούμε στην συνέχεια.

$$r^{(a)} \Rightarrow r^{(b)} \Rightarrow \bar{r} \quad (13)$$

Υποθέτουμε παρακάτω ότι για κάθε τεχνική υπάρχουν δύο διαδικασίες παραγωγής και δύο παραγόμενα εμπορεύματα. Επιπροσθέτως ότι $A^{(j)}, \ell^{(j)} > 0$.

Έτσι ισχύει για το σύστημα τιμών κάθε τεχνικής:

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot W \cdot X \cdot Y \cdot Z \cdot \bar{r} \quad (14 \alpha)$$

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot W \cdot X \cdot Y \cdot Z \cdot \bar{r} \quad (14 \beta)$$

Αφού όμως το ποσοστό κέρδους είναι εξωγενώς δεδομένο, τότε μπορεί κάλλιστα να ισχύσει αντίστοιχα:

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot W \cdot X \cdot Y \cdot Z \cdot \bar{r} \quad (15 \alpha)$$

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S \cdot T \cdot U \cdot V \cdot W \cdot X \cdot Y \cdot Z \cdot \bar{r} \quad (15 \beta)$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω συγκρίνουμε ποια από τις δύο τεχνικές, για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο, συνεπάγεται το μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους. Έτσι από τις σχέσεις (16) έως (17) συνεπάγεται το ποσοστό κέρδους για κάθε τεχνική.

Για το $\tilde{p}_1^{(j)}$ ισχύει:

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{p}_2 + \omega_1 \tilde{p}}{1 + \alpha}$$

Για το από την σχέση (15 α)

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{p}_2 + \omega_1 \tilde{p}}{1 + \alpha}$$

Η σχέση που καταλήγουμε αν και φαίνεται περίπλοκη εν τούτοις καταλήγουμε, ότι η μόνη μεταβλητή, η οποία καθορίζει την τιμή του ποσοστού κέρδους είναι η τιμή του δεύτερου προϊόντος. Η τιμή του δεύτερου προϊόντος καθορίζεται από την σχέση (18) και την εξίσωση τυποποίησης. Η οποία για λόγους κατανόησης θα υποθέσουμε ότι:

$$p_2^{(i)} = 1 \quad (16 \alpha)$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (20) στην (19), καταλήγουμε σε μια από τις τρεις περιπτώσεις¹⁶⁹:

$\tilde{w}^{(a)} < \tilde{w}^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

$\tilde{w}^{(a)} = \tilde{w}^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$\tilde{w}^{(a)} > \tilde{w}^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

2.5 Το w-r κριτήριο και η εξάρτηση του από το τυπικό εμπόρευμα

Όπως ειπώθηκε παραπάνω η ισχύς του w-r κριτηρίου εξαρτάται από την τυποποίηση των τιμών. Με άλλα λόγια αν μεταβληθεί η τυποποίηση είναι δυνατόν να αλλάξει η σχέση κατάταξης μεταξύ των τεχνικών παραγωγής,

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε όχι σε διαγραμματικούς όρους πια αλλά σε μαθηματικούς ποια η εξάρτηση της κατάταξης των τεχνικών από το τυπικό εμπόρευμα, και ποιο συγκεκριμένα από την μεταβολή του.

Στην περίπτωση των γειτονικών ή μη, διασπώμενων ή μη, τεχνικών απλής παραγωγής θα εξετάσουμε ποια είναι η αναγκαία και ποιά η ικανή συνθήκη ώστε η κατάταξη των τεχνικών σύμφωνα με την κερδοφορία τους να είναι ανεξάρτητη από την μεταβολή της τυποποίησης των τιμών .

2.5.1 Μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής

Για το σύστημα τιμών της κάθε τεχνικής προκύπτει:

Αρχικά για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$P = \frac{P(A^{(a)}, \ell^{(a)})}{w} \quad (1)$$

¹⁶⁹ Ωστόσο, όπως έχουμε δει είναι απολύτως δυνατόν η τιμή του ποσοστού κέρδους να μεταβληθεί με την τυποποίηση και οι σχέσεις (32)-(33) να μην ισχύουν. Σε ποιες περιπτώσεις και για ποιους λόγους ισχύει το τελευταίο θα το δούμε στην συνέχεια.

Και για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

$$\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha \quad (2)$$

Στην συνέχεια οι δύο τεχνικές τυποποιούνται καθ' ίδιον τρόπο:

$$\beta \vdash \beta \vdash \alpha \quad (3)$$

,όπου α ένα τυχαίο θετικό η ημιθετικό διάνυσμα στήλης που παριστά ένα τυχαίο τυπικό εμπόρευμα.

Επομένως οι (1) και (2) γίνονται λόγω της (3):

$$\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha \quad (4)$$

$$\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha \quad (5)$$

Σύμφωνα λοιπόν με το w - r κριτήριο για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω r^* , $\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha$ δύνανται να ισχύουν διαζευκτικά:

$w^{(a)} < w^{(b)}$ (6), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

$w^{(a)} = w^{(b)}$ (7), στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$w^{(a)} > w^{(b)}$ (8), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

Από τις (4) και (5) για τις w - r σχέσεις των δύο τεχνικών ισχύει¹⁷⁰:

$$w = \frac{c}{\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha} \quad (9)$$

$$w = \frac{c}{\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha} \quad (10)$$

Κατά συνέπεια οι (6),(7),(8), γίνονται λόγω των (9) και (10) αντίστοιχα:

$$\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha \quad (11)$$

$$\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha \quad (12)$$

¹⁷⁰ Εφόσον βέβαια η $\beta \vdash \beta A(\alpha) \vdash \alpha$

(13)

Βλέπουμε λοιπόν ότι το w-r κριτήριο συνεπάγεται μια συγκεκριμένη κατάταξη των τεχνικών παραγωγής. Για να γίνει όμως η κατάταξη πρέπει να εξαχθούν οι w-r σχέσεις των υπό σύγκριση τεχνικών. Για να εξαχθούν όμως οι w-r σχέσεις πρέπει πρώτα να τυποποιηθούν οι τιμές. Μάλιστα η κλίση της w-r σχέσης δείχνει να εξαρτάται από την τυποποίηση των τιμών.

Θα δείξουμε τι πρέπει να ισχύει ώστε η κατάταξη δύο τεχνικών να πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση¹⁷².

$$p^{(a)}q \dashv p^{(b)}q \dashv 1 \quad (13)$$

Για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω r^* ,

$w^{(a)} < w^{(b)}$ (14), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα.

$w^{(a)} = w^{(b)}$ (15), στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$w^{(a)} > w^{(b)}$ (16), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα.

¹⁷¹ Και κατά συνέπεια είναι αδιάφορο ποιες από τις δύο θα χρησιμοποιηθεί

164

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{P}[A(H^*)]} \quad (17)$$

$$\omega = \frac{C}{\mathcal{P}[A(H^*)]} \quad (18)$$

Ομοίως με παραπάνω θα ισχύει:

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (19)$$

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (20)$$

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (21)$$

Ωστόσο για να είναι η κατάταξη αυτή ανεξάρτητη από την τυποποίηση, με άλλα λόγια να ισχύει για κάθε τυχαία επιλεγμένο τυπικό εμπόρευμα, πρέπει να ισχύει:

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (21)$$

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (22)$$

$$\mathcal{P}[A(H^*)] \mathcal{P}[A(H^*)] \quad (23)$$

Από τις (21), (22), (23) προκύπτει ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ανεξαρτησία της επιλογής τεχνικής από την τυποποίηση είναι τα διανύσματα $\mathcal{P}[A(H^*)]$ και $\mathcal{P}[A(H^*)]$, πρέπει να είναι αυστηρώς ή τουλάχιστον κατά τάξη συγκρίσιμα.

Παρακάτω θα δείξουμε πως επηρεάζεται από την τυποποίηση η επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής για:

2.5.1.1 Μη διασπώμενες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Αναφερόμενοι σε γειτονικές τεχνικές, εννοούμε τεχνικές οι οποίες διαφέρουν ανά δύο κατά μία διαδικασία παραγωγής. Ας δούμε πώς η κατάταξη των τεχνικών αυτών επηρεάζεται από την τυποποίηση:

Από τις παραπάνω συνθήκες (21) και (23) βλέπουμε, ότι στην περίπτωση των γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής τα διανύσματα $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$ και $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$ είναι κατά τάξη συγκρίσιμα, καθώς έχουν τα $n-1$ στοιχεία κοινά και διαφέρουν κατά το $n^{\text{οστό}}$ στοιχείο. Αντίθετα στην περίπτωση της συνθήκης (24) τα δύο διανύσματα είναι ίσα.

Τα παραπάνω απέδειξαν κάτι γνωστό από την βιβλιογραφία¹⁷³, ότι δηλαδή στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, η κατάταξη των τεχνικών αλλάζει με την τυποποίηση, χωρίς όμως να αλλάζει η πλέον κερδοφόρα τεχνική.

2.5.1.2 Μη διασπώμενες μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Και στην περίπτωση αυτή, όπου δηλαδή οι δύο εξέτασιν τεχνικές διαφέρουν κατά παραπάνω από μια διαδικασία παραγωγής, για να είναι η κατάταξη ανεξάρτητη από την τυποποίηση πρέπει να ισχύουν και πάλι οι (21), (22), (23).

Όμως σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, δεν υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίον τα διανύσματα $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$ και $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$ να είναι τουλάχιστον κατά τάξη συγκρίσιμα. Με άλλα λόγια είναι απολύτως δυνατόν να μην μπορεί να λεχθεί τίποτα για την σχέση διάταξης μεταξύ των $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$ και $\mathcal{E}[A(H^*)]^1$, και κατ' επέκταση για την κατάταξη των τεχνικών.

2.5.2 Διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής

¹⁷³

Βλ Γ. Σταμάτης(1994β), Θ Μαριόλης(1994^α), Bruno.M. Burmeister E.,Sheshinski (1966)

2.5.2.1 Διασπόμενες μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Έστω ότι η $A^{(i)}, i=a, b$ είναι της μορφής $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$ και $\ell = [\ell_I, \ell_{II}]$.

Κατά συνέπεια για το σύστημα τιμών ισχύει:

Για το σύστημα τιμών της κάθε τεχνικής προκύπτει:

Αρχικά για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$B = B(A, \ell) \quad (1)$$

Και για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

$$B = B(A, \ell) \quad (2)$$

Καθ' όμοιο τρόπο για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω r^* ,

είναι δυνατόν να ισχύουν διαζευκτικά:

$w^{(a)} < w^{(b)}$ (3), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

$w^{(a)} = w^{(b)}$ (4), στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$w^{(a)} > w^{(b)}$ (5), στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

Για την w-r σχέση ισχύει:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{B(A, \ell)}{A} \\ w_2 &= \frac{B(A, \ell)}{A} \end{aligned}$$

Βάσει των παραπάνω θα ελέγξουμε για δύο διαφορετικές τυποποιήσεις αν η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

2.5.2.2 Τυποποίηση με την $\Gamma_{R,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \equiv$

Από τις (3),(4),(5) και λόγω της (6) προκύπτει για ένα δεδομένο r , $\mathcal{Q} \in \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \equiv \mathcal{U}_P \mathcal{Q}$ ¹⁷⁴:

$$\mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \geq \mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \quad (7)$$

$$\mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \leq \mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q} \quad (9)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει ότι και στις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής, αφού οι μήτρες $A_{11}^{(.)}$ και κατ' επέκταση οι $B_{11}^{(.)}$ είναι μη διασπώμενες.

Κατ' επέκταση η κατάταξη των εν λόγω τεχνικών μεταβάλλεται καθ' όμοιο τρόπο και για τους ίδιους λόγους με τις μη διασπώμενες μήτρες.

Επιπλέον στην περίπτωση της διασπώμενης παραγωγής μεταβάλλονται και τα μέγιστα ποσοστά κέρδους, με την τυποποίηση. Το τελευταίο επηρεάζει και αυτό την επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής.

Ακολουθώντας τις υποθέσεις του Γ. Σταμάτη ¹⁷⁵ έχουμε για την επιλογή της τεχνικής:

$$\ell^{(a)} = \ell^{(b)} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q}} \geq \frac{1}{\mathcal{Q}_{I,II} \mathcal{U}_P \mathcal{Q}} \quad (11)$$

¹⁷⁴ Όπου $R, R^{\mathcal{Q}} = \frac{1 - \mathcal{A}_m^{\mathcal{Q}}}{\mathcal{A}_m^{\mathcal{Q}}}$, όπου $i=I,II, j=1,2, (.)=a,b$

¹⁷⁵ Γ.Σταμάτης 1994β σελ 32

$$\lambda_m^{A^{(a)}} > \lambda_m^{A^{(b)}} \quad (12)$$

Καθώς και :

$$\lambda_m^{A^{(a)}} > \lambda_m^{A^{(b)}} \quad (13)$$

$$\lambda_m^{A^{(b)}} < \lambda_m^{A^{(a)}} \quad (14)$$

Κατά συνέπεια ισχύει η ακόλουθη σχέση διάταξης για τις μέγιστες ιδιοτιμές και τα ποσοστά κέρδους:

$$R_F^{(a)} < R_F^{(b)} < R_H^{(a)} < R_H^{(b)} \quad (15) \text{ και}$$

$$R_F^{(a)} < R_F^{(b)} < R_H^{(a)} < R_H^{(b)} \quad (16)$$

Έτσι για το διάστημα του r $0 \leq r < R_F^{(a)}$ η τεχνική b επιλέγεται ως η πλέον κερδοφόρα σε σχέση με την τεχνική a , και στο διάστημα $R_F^{(a)} \leq r < R_F^{(b)}$ επιλέγεται η a ως η πλέον κερδοφόρα.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν μεταβληθεί η τυποποίηση:

2.5.2.3 Τυποποίηση με την $[P, H] \rightarrow [Q, I] \Rightarrow$

Η μεταβολή της τυποποίησης έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή των μέγιστων ποσοστών κέρδους ως εξής:

$$R_F^{(a)} > R_F^{(b)} \quad (17)$$

$$R_H^{(b)} < R_H^{(a)} \quad (18)$$

$$\text{Κατά συνέπεια } R^{(a)} > R^{(b)} \quad (19)$$

Ωστόσο η μεταβολή αυτή των μέγιστων ποσοστών κέρδους έχει σαν αποτέλεσμα και την μεταβολή της κατάταξης των τεχνικών. Κατά συνέπεια έχουμε.

Στην καινούρια κατάσταση που διαμορφώθηκε, η τεχνική b, για $0 \leq r < R_H^{(b)}$ μπορεί να περισσότερο λιγότερο η εξίσου κερδοφόρα από την α. Ενώ αντίθετα για $R_H^{(b)} \leq r < R_H^{(a)}$ η τεχνική α είναι περισσότερο κερδοφόρα από την τεχνική b.

2.5.3 Διασπώμενες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής όταν οι τεχνικές είναι γειτονικές, σε αντίθεση με τις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής, η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

Έστω οι τεχνικές:

Επομένως οι τεχνικές $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ διαφέρουν μόνο κατά το στοιχείο A_{22} . Για λόγους απλούστευσης θα υποθέσουμε ότι οι υπομήτρες είναι απλά βαθμωτά. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^{(a)} = A_1^{(b)} = q_1 \\ A_2 &= A_2^{(a)} = A_2^{(b)} = q_2 \\ A_2^{(a)} &= a_2^{(a)}, Q = qb \end{aligned}$$

Έτσι στην τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο αποτελούν και τις ιδιοτιμές της μήτρας $A^{(a)}$.

Όμοια με το Γ.Σταμάτης (1994β) υποθέτουμε ότι:

$$G_I^{\otimes} \triangleleft_I^{\otimes} = I_I^{\otimes} G_I^{\otimes} \quad (23)$$

Τυποποιώντας τις τιμές με την (7) προκύπτει για τα διανύσματα $\ell^{(a)} B_{11}^{(a)} y_I$ και $\ell^{(b)} B_{11}^{(b)} y_I$

Επομένως ισχύει:

$$\ell I_{\Pi}^{\otimes} y = \ell \frac{1}{q_I^{\otimes}(\omega)} y \quad \text{και} \quad (24)$$

$$\ell I_{\Pi}^{\otimes} y = \ell \frac{1}{q_I^{\otimes}(\omega)} y \quad (25)$$

Όμως από τις προϋποθέσεις ξέρουμε ότι:

$$\ell^{\otimes} = \ell^{\otimes} = [\ell_P, \ell_I] \quad \text{και}$$

$$a_{11}^{(a)} = a_{11}^{(b)}$$

Επομένως για $0 \leq r < R_I$ οι δύο τεχνικές είναι ισάξιες (εξίσου κερδοφόρες).

Αν τώρα γίνει τυποποίηση με την (18) προκύπτει:

$$\ell \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} q_I^{\otimes}(\omega) & \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} \\ \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} & \end{array} \right] \quad (26) \text{ και}$$

$$\ell \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} q_I^{\otimes}(\omega) & \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} \\ \frac{1}{1 \ell_I^{\otimes}(\omega)} & \end{array} \right] \quad (27)$$

Όμως αφού

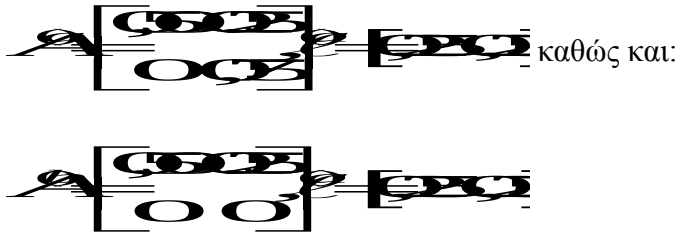
$$a_{22}^{(a)} \neq a_{22}^{(b)}$$

Και πιο συγκεκριμένα $a_2^{(a)} < a_2^{(b)}$ η τεχνική α είναι περισσότερο κερδοφόρα από την Β. Πρόκειται δηλαδή για μια κατάσταση εκ διαμέτρου αντίθετη από την παραπάνω.

Κατά συνέπεια στην διασπώμενη απλή παραγωγή ακόμα και όταν οι τεχνικές είναι γειτονικές η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με το τυπικό εμπόρευμα.

2.6 Γ. Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω οι τεχνικές $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ όπου¹⁷⁶:



Επομένως οι δύο τεχνικές που συγκρίνονται είναι διασπώμενες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής. Ας εξετάσουμε αν ισχύουν τα όσα πραγματευτήκαμε παραπάνω, και εν προκειμένω αν η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση των τιμών.

Για το σύστημα τιμών παραγωγής ισχύει:

Για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$



Και για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$



¹⁷⁶ Το αριθμητικό παράδειγμα είναι δανεισμένο από το Γ.Σταμάτης (1989) σελ.121

$$\vec{B} = \vec{C} \vec{A} \vec{C}^T$$

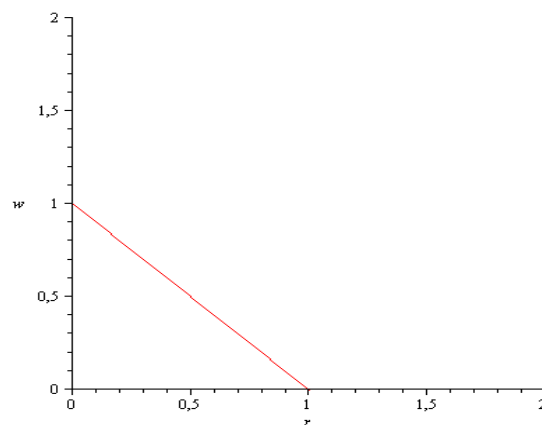
Από αυτά τα διανύσματα τιμών θα δοκιμάσουμε ορισμένες διαφορετικές τυποποιήσεις και θα εξετάσουμε ποια η κατάταξη των τεχνικών για την δεδομένη τυποποίηση.

- Τυποποίηση με $P^g = P^b = 1$

Από τις σχέσεις (31)-(34) προκύπτει για την σχέση ποσοστού κέρδους-ονομαστικού ωρομισθίου:

$$w = w_1$$

Κατά συνέπεια αν παραστήσουμε διαγραμματικά, στο ίδιο επίπεδο τις w-r καμπύλες για κάθε τεχνική, τότε θα έχουμε:



Είναι λοιπόν φανερό ότι οι δύο τεχνικές σύμφωνα με το w-r κριτήριο είναι εξίσου κερδοφόρες για κάθε ύψος του ποσοστού κέρδους. Είναι αυτονόητο ότι οι δύο τεχνικές έχουν και το ίδιο μέγιστο ποσοστό κέρδους και ονομαστικό ωρομίσθιο.

$$w_{\max} = 1 - R_{\max}$$

- Τυποποίηση με ~~CB~~ ~~CB~~ ~~CB~~ ~~CB~~

Ομοίως προκύπτει για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ η σχέση ποσοστού κέρδους ονομαστικού ωρομισθίου:

$$w^{(a)} = 1 - 3r$$

Και κατά συνέπεια

$$w_{\max}^{(a)} = 1$$

$$R_{\max}^{(a)} = \frac{1}{3}$$

Ενώ για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$

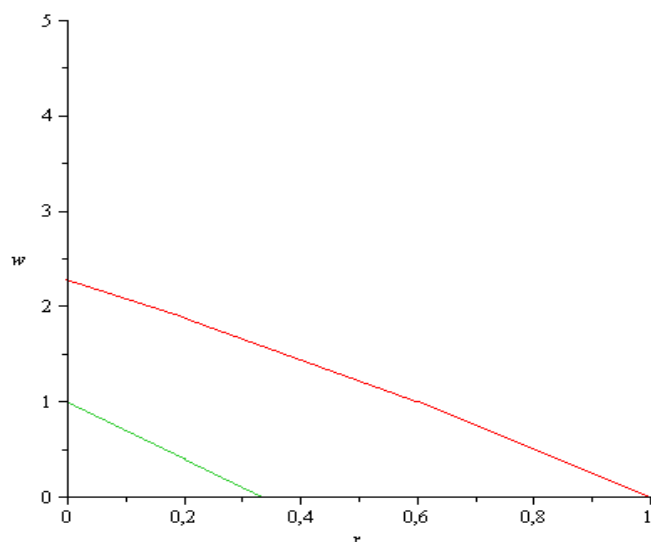
$$w^{(b)} = \frac{16(1+r)}{7-r}$$

Και κατά συνέπεια

$$w_{\max}^{(b)} = \frac{16}{7}$$

$$R_{\max}^{(b)} = 1$$

Αν αποτυπώσουμε και τις δύο w - r καμπύλες στο ίδιο επίπεδο, προκύπτει ότι για κάθε ύψος του ποσοστού κέρδους η τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ είναι η πλέον κερδοφόρα τεχνική.



Είναι λοιπόν φανερό, ότι η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση, ακόμα και στην περίπτωση των μη διασπόμενων τεχνικών απλής παραγωγής.

Ακόμα και στην περίπτωση που εξετάσουμε τα r -καθαρά προϊόντα των δύο τεχνικών έστω για το $r=0,25$ προκύπτουν τα παρακάτω r -καθαρά προϊόντα¹⁷⁷:

$$y^{\phi} = \begin{bmatrix} 0,625 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

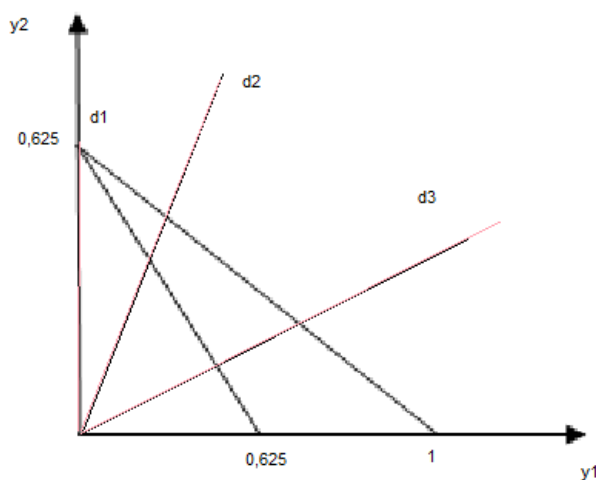
Και για την δεύτερη τεχνική

$$y^{\phi} = \begin{bmatrix} 0,625 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν βάλουμε τα δύο αυτά διανύσματα στον ίδιο άξονα θα έχουμε:

¹⁷⁷

Βλ. Κ.Γογολος 2000 σελ 227



Είναι φανερό ότι με την τυποποίηση μεταβάλλεται η κατάταξη των τεχνικών, αφού με την τυποποίηση με d_1 οι δύο τεχνικές είναι ισάξιες ενώ με την τυποποίηση με d_2 και d_3 η τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ είναι η πλέον κερδοφόρα, καθώς για δεδομένο ποσοστό κέρδους συνεπάγεται το μεγαλύτερο r -καθαρό προϊόν.

Ωστόσο απο το παραπάνω σχήμα δίδει να επιβεβαιώνει και τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο τεχνικών του αριθμητικού παραδείγματος για τις δύο διαφορετικές τυποποιήσεις.

Για την τυποποίηση με το $p_2 = 1 \Leftrightarrow d_1 = [0, 1]$ το αποτέλεσμα της σύγκρισης επιβεβαιώνεται καθώς στο σημείο $y_2 = 0,625$ οι δύο τεχνικές δείχνουν να είναι ισοδύναμες για το δεδομένο ποσοστό κέρδους ($r=0,25$).

Αντίθετα για κάθε άλλη τυποποίηση, όπως φυσικά και για την ~~$d_1 = [0, 0.625]$~~ , η επιλεγείσα τεχνική είναι η $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$.

Κατα συνέπεια η κατάταξη των δύο τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών, ακόμα και αν οι τεχνικές αυτές είναι γειτονικές.

Ωστόσο σημασία έχει να εξετάσουμε τι γίνεται στην περίπτωση μη διασπώμενων γειτονικών ή μη τεχνικών απλής παραγωγής.

2.7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως είδαμε παραπάνω τόσο η εξαγωγή της $w-r$ σχέσης, όσο και η ισχύς του $w-r$ κριτηρίου εξαρτάται από την τυποποίηση τιμών.

Η $w-r$ σχέση δεν αποτελεί την σχέση ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους της συγκεκριμένης τεχνικής, αλλά την σχέση ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους του συγκεκριμένου τυπικού υποσυστήματος. Το τελευταίο μεταφράζεται στο ότι αν μεταβληθεί η τυποποίηση τιμών της αρχικής τεχνικής τότε θα εμφανιστεί ένα νέο υποσύστημα με μια νέα $w-r$ η οποία δεν υπάρχει κανένας λόγος να συμπίπτει με αυτήν της προηγούμενης τυποποίησης. Με άλλα λόγια η $w-r$ σχέση δεν χαρακτηρίζει σε καμία περίπτωση μια τεχνική, αλλά ένα παράγωγο από αυτή τυπικό υποσύστημα.

Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με ότι υποστηρίζουν οικονομολόγοι όπως ο L.Passinetti, για τους οποίους η τυποποίηση έχει έναν ουδέτερο ρόλο, καθώς δεν αλλάζει τις σχέσεις κατάταξης μεταξύ των τεχνικών παραγωγής, αφού όπως ο ίδιος λέει είναι σαν να πολλαπλασιάζονται τα δύο μέρη του συστήματος τιμών με ένα βαθμωτό¹⁷⁸.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών είναι μάλλον ένα τυχαίο φαινόμενο. Δεν υπάρχει κανένας οικονομικός λόγος ένεκα του οποίου οι τεχνικές να πρέπει να είναι γειτονικές (δηλαδή να αλλάζουν οι επιλεγείσες τεχνικές ανά μια κάθε φορά) . Επιπλέον ακόμα και το τελευταίο δεν εξασφαλίζει ότι στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής η κατάταξη των τεχνικών θα είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση.

Οι $w-r$ που προκύπτουν δεν αντιπροσωπεύουν την σχέση ποσοστού κέρδους ονομαστικών μισθών της εκάστοτε τεχνική, αλλά μάλλον την σχέση ποσοστού κέρδους ονομαστικών μισθών ενός τυπικού υποσυστήματος που προκύπτει από τις αρχικές τεχνικές.

Η τυποποίηση όπως είδαμε επηρεάζει την κατάταξη των «τεχνικών» στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, μεταβάλλοντας και το μέγιστο ποσοστό κέρδους του κάθε υποσυστήματος, όπως και το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο.

¹⁷⁸ Βλ. L. Passinetti, (1991) σελ. 170

Ένα ακόμα θέμα που τίθεται από τον Γ. Σταμάτη (1994β) σελ.40. είναι το ποιος εν τέλει επιλέγει τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην πραγματική οικονομία. Είναι αυτονόητο ότι επιμέρους ατομικοί καπιταλιστές επιλέγουν την μεγιστοποιούσα για αυτούς το ποσοστό κέρδους διαδικασία, και η τελική επιλεγείσα τεχνική (τυπικό υποσύστημα) αποτελείται από τις αποφάσεις των επιμέρους ατομικών καπιταλιστών. Δεν υπάρχει ένας ενιαίος καπιταλιστής ο οποίος θα καθορίζει ποιες διαδικασίες παραγωγής θα χρησιμοποιηθούν. Το τελευταίο περιορίζει ακόμα περισσότερο την πιθανότητα οι τεχνικές που συγκρίνονται να είναι γειτονικές και το σύστημα να οδηγείται στην μεγιστοποιούσα το ενιαίο ποσοστό κέρδους τεχνική (τυπικό υποσύστημα). Το τελευταίο μάλιστα φαίνεται να βασίζεται στην κρίση επιμέρους ατομικών (ανεξάρτητων πολλές φορές μεταξύ τους) καπιταλιστών.

3 COST MINIMIZATION CRITERION

Όπως έχουμε προηγουμένως αναφέρει το cost minimization criterion ή κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους είναι ένα από τα γνωστά κριτήρια κατάταξης και επιλογής τεχνικών παραγωγής. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν διάφορες εκδοχές του cost minimization criterion, όπως αυτό παρουσιάζεται στην βιβλιογραφία. Θα παρουσιαστούν οι εκδοχές των L.von Bortkiewicz, του N.Okishio, του L. Passinetti, των H.D.Kurz και Neri Salvadori, καθώς και του G.Erreygers. Όπως θα δούμε το Cost minimization criterion, στηρίζεται στην ισχύη δύο συνθηκών τις οποίες θα δούμε παρακάτω.

3.1 Η εκδοχή του L. von Bortkiewicz

Ο L. von Bortkiewicz θέλοντας να αποδείξει το αντίθετο από το νόμο της πτωτικής τάσης του ποσοστού κέρδους¹⁷⁹ του Μαρξ, εισήγαγε το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους.

¹⁷⁹ Σύμφωνα με τον νόμο της πτωτικής τάσης του ποσοστού κέρδους, κάθε αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας, έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της τιμής των παραγόμενων εμπορευμάτων, πράγμα που για τον Μαρξ, έχει σαν αποτέλεσμα την πτώση του γενικού ποσοστού κέρδους. Σύμφωνα με τον Μαρξ (1978) τόμος 3, σελ 334-335:

«Κανένας κεφαλαιοκράτης δεν χρησιμοποιεί μια νέα μέθοδο παραγωγής, όσο παραγωγική και αν είναι, όσο και αν αυξάνει το ποσοστό της υπεραξίας, εφόσον μειώνει το ποσοστό κέρδους. Αλλά κάθε τέτοια νέα μέθοδος παραγωγής φτηναίνει τα εμπορεύματα. Για αυτό στην αρχή ο κεφαλαιοκράτης τα πουλά πάνω από την τιμή παραγωγής, ίσως και πάνω από την αξία τους. Τσεπώνει την διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στα έξοδα παραγωγής τους και στην αγοραία την τιμή των υπολοίπων εμπορευμάτων, που έχουν παραχθεί με υψηλότερο κόστος παραγωγής. Μπορεί να το κάνει αυτό γιατί ο μέσος όρος του κοινωνικού απαιτούμενου χρόνου εργασίας για την παραγωγή αυτών είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο εργασίας που απαιτείται με την νέα μέθοδο παραγωγής. Η διαδικασία παραγωγής του στέκει πάνω από τον μέσο όρο της κοινωνίας. Ο συναγωνισμός όμως τη γενικεύει και την υποτάσσει στο γενικό νόμο. Τότε αρχίζει η γενική πτώση του γενικού ποσοστού κέρδους - ίσως πρώτα σε αυτήν την σφαίρα παραγωγής, που εξισώνεται με τις άλλες.. Έτσι η πτώση αυτή είναι ανεξάρτητη από την θέληση του κεφαλαιοκράτη. Πάνω στο σημείο αυτό πρέπει ακόμα να παρατηρηθεί, ότι αυτός ο ίδιος ο νόμος κυριαρχεί και στις σφαίρες εκείνες της παραγωγής, που το προϊόν τους ούτε άμεσα ούτε έμμεσα μπαίνει στην κατανάλωση του εργάτη ή στους όρους παραγωγής των μέσων συντήρησης του.»

Ο L. von Bortkiewicz χρησιμοποιεί ένα μοντέλο, στο οποίο η εργασία είναι αναπαραγόμενος συντελεστής παραγωγής, πράγμα που το καθιστά ένα αυστριακό μοντέλο παραγωγής¹⁸⁰, στο οποίο οι τιμές εκφράζονται σε όρους ενσωματωμένης εργασίας. Στην παρούσα εργασία απλά θα παρουσιάσουμε το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους, όπως αποτυπώνεται στις σχέσεις που παραθέτει ο ίδιος ο L. von Bortkiewicz.

Σε ένα σύστημα σαν αυτό του Bortkiewicz για το σύστημα τιμών, ισχύει:

$$p_i = (1 + d_i r) A_i \lambda$$

,όπου A_i η μήτρα των τεχνικών συντελεστών, d_i, και λ η τιμή ενός συγκεκριμένου πραγματικού ωρομισθίου εκφρασμένη στις υπάρχουσες τιμές της δεδομένης τεχνικής παραγωγής.

Αν εισαχθεί μια νέα διαδικασία παραγωγής, η οποία χαρακτηρίζεται από τα d_i' και A_i' επιλέγεται αν και μόνο αν ισχύει η :

$$p_i > (1 + d_i' r) A_i' \lambda$$

Στην περίπτωση αυτή η νέα διαδικασία παραγωγής, η οποία χαρακτηρίζεται από τα d_i' και A_i' , συνεπάγεται ένα μικρότερο μοναδιαίο κόστος παραγωγής, εκφρασμένο στις τιμές παραγωγής (πραγματικό ωρομίσθιο) της αρχικής τεχνικής.

3.2 Η εκδοχή του N.Okishio

Μάλιστα δεν είναι τυχαίο το ότι στο The New Palgrave: A dictionary of Economics, σαν λήμμα στο choice of technique ο N.Okishio¹⁸¹ εισάγει το cost minimization criterion, ως κριτήριο επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής.

Αρχικά παρουσιάζουμε εν συντομία το αναλυτικό πλαίσιο στο οποίο εργαζόμαστε. Έστω $A^{(i)}$, η nxm μήτρα των τεχνικών συντελεστών¹⁸², I η μοναδιαία nxm μήτρα

¹⁸⁰ Για περεταίρω για τα αυστριακά μοντέλα παραγωγής, βλ. Θ.Μαριολης (1996α) και (1996β) καθώς και L.Passinetti (1991) και H.D.Kurz και N.Salvadori (1995)

¹⁸¹ Okishio, N (1987). σελ.418-420

των εκροών (ως εκ τούτου μιλάμε για απλή παραγωγή) και $\ell^{(i)}$ 1 το 1km διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή ομοιογενή εργασία¹⁸³. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής και στην συνέχεια την περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής.

Για το cost minimization criterion μπορούν εν συντομία να ειπωθούν τα ακόλουθα:

1. Συνίσταται στην σύγκριση γειτονικών μεταξύ των τεχνικών παραγωγής (τυπικών υποσυστημάτων)¹⁸⁴
2. Υπό σύγκριση τίθεται μόνο η διαδικασία παραγωγής κατά την οποία διαφέρουν οι δύο τεχνικές.
3. Επιλέγεται εκείνη η τεχνική η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος ή δυϊκά ειπωμένο εκείνη η τεχνική στις τιμές τις οποίας, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, η χρήση καμίας άλλης τεχνικής δεν αποφέρει υπερκέρδη
4. Για να συγκλίνει το σύστημα σε κάποια τεχνική πρέπει πρώτα να τυποποιηθούν οι τιμές παραγωγής.
5. Τις αποφάσεις για την χρήση ή μη κάποιας διαδικασίας δεν λαμβάνεται από μια κεντρική αρχή, όπως στο w-r κριτήριο, αλλά από τους επιμέρους ατομικούς καπιταλιστές¹⁸⁵

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε εν συντομία το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους, όπως αυτό παρουσιάστηκε από τον Okishio (Okishio, N (1987). σελ.418-420).

¹⁸² Με τον τρόπο αυτό εισάγουμε την δυνατότητα επιλογής τεχνικής, και φυσικά το $m > n$. Με άλλα λόγια υπάρχουν παραπάνω από μια διαδικασίες παραγωγής, οι οποίες μπορούν να παράξουν ένα εμπόρευμα.

¹⁸³ Για $(.) = a, b$

¹⁸⁴ Όπως βλέπουμε στο Γ. Σταμάτης (1997) σελ.300 με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους συγκρίνονται ανά δύο γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής. Είναι γεγονός, ότι η χρήση του cost minimization criterion είναι αρκετά περιορισμένη, καθώς δεν γίνεται να χρησιμοποιηθεί σε μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής, ή σε τεχνικές σύνθετης παραγωγής, ανεξάρτητα δε αν είναι γειτονικές ή μη.

¹⁸⁵ Οι οποίοι βέβαια δρούν συλλογικά, με αποτέλεσμα να μεταβαίνουμε στην αναλύσή μας απο το επίπεδο του επιμέρους καπιταλιστή, σε αυτό της διαδικασίας παραγωγής.

Για τον N.Okishio αποφάσεις γύρω από την παραγωγή, λαμβάνονται από τους επιμέρους καπιταλιστές¹⁸⁶. Κατά συνέπεια ο κάθε επιμέρους καπιταλιστής έχει σαν στόχο να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του.

Στο μοντέλο του N.Okishio οι μισθοί προκαταβάλλονται. Υπ' αυτήν την προϋπόθεση οι καπιταλιστές αναμένουν ένα διάνυσμα τιμών $\bar{p}$ και ένα ονομαστικό ωρομίσθιο $\bar{w}$. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το γεγονός ότι οι καπιταλιστές περιμένουν ένα εξωγενώς δεδομένο διάνυσμα τιμών είναι ταυτόσημο με τον εξωγενή προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους.

Κατά συνέπεια για το σύστημα τιμών ισχύει για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω $\bar{r}$,

$$\bar{p}^{(\cdot)} = (\bar{p}^{(\cdot)} A^{(\cdot)} + \bar{w}^{(\cdot)} \ell^{(\cdot)})(1+r) \quad (1)$$

Μια τεχνική έστω η (β) επιλέγεται έναντι της (α) εάν:

$$r^{(b)} \geq r^{(a)} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται ότι όταν ισχύει η (2) ισχύει η :

$$\bar{p}A^{(b)} + \bar{w}\ell^{(b)} \leq \bar{p}A^{(a)} + \bar{w}\ell^{(a)} \quad (3)$$

Η σχέση (3) μας πληροφορεί ότι το μοναδιαίο κόστος της τεχνικής (β) είναι μικρότερο από αυτό της τεχνικής (α) και ως εκ τούτου επιλέγεται ως η μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνική.

Πρέπει να αναφέρουμε, ότι στην βιβλιογραφία¹⁸⁷ κατά την εξέταση του cost minimization criterion εισάγεται έμμεσα και η έννοια της ζήτησης. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή του όρου “requirements for use”, πιο πρακτικά ομιλώντας με την τυποποίηση των τιμών¹⁸⁸. Το τελευταίο είναι και αυτό που διαφοροποιεί ένα σύνολο διαδικασιών παραγωγής από ένα -τυπικό (υπό) –σύστημα¹⁸⁹.

¹⁸⁶, σε αντίθεση με το w-r κριτήριο, όπου οι αποφάσεις λαμβάνονται από ένα συλλογικό καπιταλιστή.

¹⁸⁷ Βλ. Ch.Bidard(1990) σελ.839-40, . N. Salvadori(1995)- H.D. Kurz(1995) σελ 312

¹⁸⁸ Η με άλλες λέξεις με την επιλογή των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος.

¹⁸⁹ Ιδιαίτερη σημασία στην έννοια της ζήτησης δίνει και ο G.Erreygers (1995) . Για αυτόν το πρόβλημα της επιλογής τεχνικής ανάγεται στην εύρεση εκείνων των επιπέδων δραστηριότητας και εκείνων των τιμών οι οποίες εξασφαλίζουν:

- Ότι η ζήτηση ικανοποιείται
- Όλες οι διαδικασίες παραγωγής έχουν την ίδια κερδοφορία (ήτοι υπάρχει ένα ενιαίο ποσοστό κέρδους)

3.3 Η εκδοχή του D.Levhari

Μια ακόμα εκδοχή, καθαρά νεοκλασική αυτή τη φορά, του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους παρουσιάστηκε από τον D.Levhari το 1965¹⁹⁰, με σκοπό την υπεράσπιση του Non Substitution Theorem του P.Samuelson. Αρχικά παρουσιάζονται τα δεδομένα του υποδείγματος του Levhari:

1. Η τεχνολογία είναι γραμμική και το ζευγάρι $[A^{(.)}, \ell^{(.)}]$ παριστά μια μη διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής
2. Παράγονται n εμπορεύματα μέσω m διαδικασιών παραγωγής ($m > n$)
3. Οι υπο σύγκρισιν τεχνικές είναι γειτονικές
4. Οι μισθοί προκαταβάλλονται
5. Τίθεται εξωγενώς το ονομαστικό ωρομίσθιο w , ίσο με 1.

Κατα συνέπεια για το σύστημα τιμών ισχύει:

$$p^{(.)} = p^{(.)} A^{(.)} (1+r) + \ell^{(.)} (1+r) \Leftrightarrow p^{(.)} = \ell^{(.)} [\lambda I - A^{(.)} (1+r)]^{-1} (1) \lambda \equiv \frac{1}{1+r}$$

Είναι φανερό ότι:

-
- Καμία γνωστή διαδικασία δεν αποφέρει υπερκέρδη

Κατά συνέπεια για να επιλεγεί μια συλλογή διαδικασιών πρέπει να ικανοποιεί την ζήτηση (βλ. G.Erreygers (1995) σελ 145). Πέρα από αυτόν τον έμμεσο ορισμό της τεχνικής ο Erreygers, στην συνέχεια του ίδιου άρθρου, δίνει έναν ξεκάθαρο ορισμό της τεχνικής (βλ. σελ 149):

«Furthermore, it should be clear that a demand vector chosen at random *can* normally only be satisfied by a square set of *independent* methods. In mathematical terms this independence means that the matrix composed of the rows $C_i(g) = B_i - (1 + g)A_i$, corresponding to the methods i of a square set must have full rank. Square sets of independent methods, of which at least one requires a positive labour input, will be called *techniques*».

Η τεχνική που επιλέγεται όμως από τον Erreygers είναι αυτή στις τιμές της οποίας καμία άλλη τεχνική δεν αποφέρει υπερκέρδη. Κατά συνέπεια ο G.Erreygers προτείνει ως κριτήριο κατάταξης και επιλογής τεχνικής το cost minimization criterion.

Σε τελευταία ανάλυση αυτό που και οι C.Bidard και ο G.Erreygers ονομάζουν ζήτηση, δεν είναι άλλο από το καθαρό (ακαθάριστο) προϊόν του τυπικού υποσυστήματος.

¹⁹⁰ D.Levhari (1965) σελ 98-105

$$\frac{dp(r)}{dr} > 0(2) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = \infty(3) \text{ και κατά συνέπεια}$$

$$\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} > 0(4) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(r) = 0(5)$$

Βάσει όλων των παραπάνω ο D.Levhari αναπτύσσει το ακόλουθο θεώρημα¹⁹¹:

«Theorem: Let λ be given. Among the $\prod_{i=1}^m k_i$ matrices there exists one $[\frac{a_0^*}{a}]$ for this λ

which minimizes all the elements of the vector $p = a_0[\lambda I - a]^{-1}$;

$$p^* = a_0^* [\lambda I - a^*]^{-1} \leq a_0[\lambda I - a]^{-1} = p \gg$$

Με άλλα λόγια υπάρχει μια διαδικασία για το δεδομένο λ (κατά συνέπεια για το δεδομένο r) η οποία ελαχιστοποιεί το διάνυσμα των τιμών παραγωγής της δεδομένης διαδικασίας παραγωγής. Με άλλα λόγια ισχύουν διαζευκτικά οι σχέσεις για δύο τεχνικές έστω a και b :

$$p^a \leq p^b (6.1)$$

$$p^a = p^b (6.2)$$

$$p^a \geq p^b (6.3)$$

Από την σχέση (1) προκύπτει για τις (6.1)-(6.3) διαζευκτικά:

$\ell^{(a)}[\lambda I - A^{(a)}(1+r)]^{-1} \leq \ell^{(b)}[\lambda I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}$ (7.1) στην περίπτωση αυτή η a επιλέγεται ως η ελαχιστοποιούσα το κόστος τεχνική

$\ell^{(a)}[\lambda I - A^{(a)}(1+r)]^{-1} = \ell^{(b)}[\lambda I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}$ (7.2) στην περίπτωση αυτή και η a και η b επιλέγεται ως η ελαχιστοποιούσα το κόστος τεχνική

$\ell^{(a)}[\lambda I - A^{(a)}(1+r)]^{-1} \geq \ell^{(b)}[\lambda I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}$ (7.3) στην περίπτωση αυτή η b επιλέγεται ως η ελαχιστοποιούσα το κόστος τεχνική

¹⁹¹ D.Levhari (1965) σελ 101

Λόγω της γειτνίασης των δύο τεχνικών, τα διανύσματα $\ell^{(.)}[\lambda I - A^{(.)}(1+r)]^{-1}, (.) = a, b$, είναι κατά τάξιν συγκρίσιμα και σε καμία περίπτωση απολύτως συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Με άλλα λόγια για να επιλεγθεί μια τεχνική έναντι κάποιας άλλης, θα πρέπει η τεχνική αυτή:

1. Να είναι r- παραγωγική για το λ
2. Η κατα το ποσοστό κέρδους επαυξημένη αξία παραγωγής των παραγόμενων απο αυτήν εμπορευμάτων να είναι εξαιρουμένου, ενός εμπορεύματος του οποίου είναι μικρότερη, ίση με την αξία της άλλης υπό σύγκρισιν τεχνικής

3.4 Η οπτική του L.Pasinetti

Μια διαφορετική κάπως προσέγγιση της επιλογής της τεχνικής σύμφωνα με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους κάνει ο L.Pasinetti¹⁹². Ο L.Pasinetti δεν κάνει λόγο για συνθήκες ύπαρξης υπερκερδών ή επιπλέον κόστη. Αντιλαμβάνεται απεναντίας την σύγκριση των τιμών παραγωγής, ως την επιλογή του κόστους.

Όπως ο ίδιος παρατηρεί¹⁹³, η τιμή ενός εμπορεύματος εξαρτάται από τους τεχνολογικούς παράγοντες, από τις τιμές των μέσων παραγωγής (τιμές εμπορευμάτων που εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή του εν λόγω εμπορεύματος) και μένοντας πιστός στην νεορικαρδιανή οπτική και από την κατανομή του εισοδήματος¹⁹⁴.

¹⁹² L.Pasinetti (1991) σελ 167-185

¹⁹³ L.Pasinetti (1991) σελ 168

¹⁹⁴ Ωστόσο όπως παρατηρεί ο ίδιος ο Pasinetti στο (1991) σελ 168, για τις τιμές παραγωγής:

«Οι τιμές των άλλων εμπορευμάτων καταλήγουν να είναι ενδιάμεσες μεταβλητές, οι οποίες απαλείφονται από την δεξιά πλευρά και αντικαθίστανται από τους αντίστοιχους τεχνολογικούς συντελεστές»

Και στην συνέχεια:

«Είναι ωστόσο άμεσα φανερά μια σημαντική ιδιότητα της λύσης (V.5..18). Δεν απαλείφονται πλήρως όλες οι οικονομικές μεταβλητές από την λύση. Για προσδιοριστεί το σύστημα των τιμών, πρέπει να

Κατά συνέπεια και για τον ίδιο τον Pasinetti, η επιλογή της πλέον συμφέρουσας τεχνικής εξαρτάται τόσο από την «τεχνολογία», όπως ο ίδιος λέει, καθώς και από την διανομή του «εισοδήματος μεταξύ κερδών και μισθών».

Επιστρέφοντας στην διατύπωση του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους, για τον Pasinetti, φαίνεται όχι νόημα, μόνο όταν συγκρίνονται γειτονικές τεχνικές, οι οποίες διαφέρουν στην διαδικασία παραγωγής ενός μη βασικού εμπορεύματος, και δη ανεξάρτητα αν αυτό εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή άλλων εμπορευμάτων, συμπεριλαμβανομένου και της δικής του παραγωγής.

Κατά συνέπεια θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου παρουσιάζει και ο ίδιος ο Pasinetti¹⁹⁵, κατά την οποία συγκρίνονται τρεις εναλλακτικές μέθοδοι παραγωγής ενός μη βασικού εμπορεύματος έστω q , το οποίο δεν εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα κανενός άλλου μη βασικού εμπορεύματος, αλλά απεναντίας εισέρχεται μόνο ένα βασικό εμπόρευμα το οποίο ονομάζεται 1 ¹⁹⁶. Έστω ότι οι μέθοδοι αυτοί είναι οι (δ) , (ε) και (τ) :

$$\begin{bmatrix} a_{1q}^{(\delta)} \\ 0 \\ \ell_{nq}^{(\delta)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1q}^{(\varepsilon)} \\ 0 \\ \ell_{nq}^{(\varepsilon)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1q}^{(\tau)} \\ 0 \\ \ell_{nq}^{(\tau)} \end{bmatrix}, \text{ όπου τα διανύσματα } a_{1q}^{(i)}, i = \delta, \varepsilon, \tau \text{ είναι διαστάσεων } k \times 1 \text{ και το}$$

διάνυσμα p_1 είναι διαστάσεων $1 \times k$, καθώς και το μέγεθος $\ell_{nq}^{(i)}, i = \delta, \varepsilon, \tau$ είναι απλά βαθμωτό.

Κατά συνέπεια τα τρία εναλλακτικά κόστη, τα οποία ο Pasinetti ταυτίζει¹⁹⁷ με τις τιμές παραγωγής των, είναι :

γνωρίζουμε πέρα από τους τεχνολογικούς συντελεστές, και μια από τις δύο διανεμητικές μεταβλητές: το ωρομίσθιο ή το ποσοστό κέρδους»

¹⁹⁵ L.Pasinetti (1991) σελ 169-171

¹⁹⁶ Η ανάλυση δεν θα άλλαζε καθόλου αν υποθέταμε ότι τα διανύσματα $\ell_{nq}^{(i)}$ και $a_{1q}^{(i)}, i = \delta, \varepsilon, \tau$, είναι βαθμωτά και κατά συνέπεια και το διάνυσμα p_1 και αυτό βαθμωτό

¹⁹⁷ «Η χρήση οποιασδήποτε από τις τρεις εναλλακτικές μεθόδους παραγωγής συνεπάγεται, ένα από τα τρία εναλλακτικά κόστη παραγωγής για το εμπόρευμα q , δηλαδή μία από τις τρεις εναλλακτικές τιμές ισορροπίας» L.Pasinetti (1991) σελ 169

$$p_q^{(\delta)} = p_1 a_{1q}^{(\delta)} (1+r) + w \ell_{nq}^{(\delta)}$$

$$p_q^{(\varepsilon)} = p_1 a_{1q}^{(\varepsilon)} (1+r) + w \ell_{nq}^{(\varepsilon)}$$

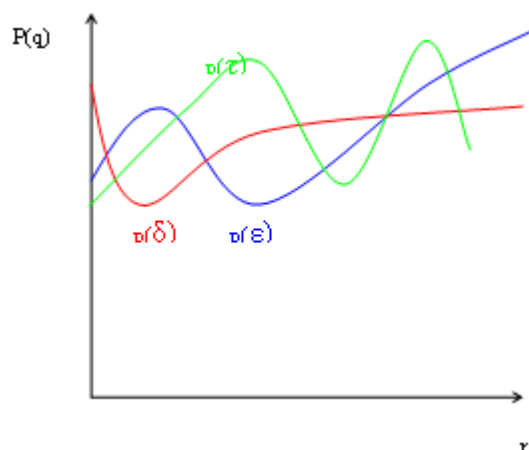
$$p_q^{(\tau)} = p_1 a_{1q}^{(\tau)} (1+r) + w \ell_{nq}^{(\tau)}$$

Κατά συνέπεια σύμφωνα με το κριτήριο του Pasinetti, επιλέγεται εκείνη η τεχνική η οποία συνεπάγεται την μικρότερη δυνατή τιμή παραγωγής γαι το εμπόρευμα q, κατα το οποίο βέβαια διαφέρουν οι τρεις γειτονικές τεχνικές.

Οι τιμές p_1 και το ονομαστικό ωρομίσθιο w , έχουν και αυτές υπολογιστεί ανεξάρτητα από την τιμή του εν λόγω μη βασικού εμπορεύματος, και για συγκεκριμένο ποσοστό κέρδους. Η σχέση διάταξης των τιμών παραγωγής μπορεί να είναι η ακόλουθη διαζευκτικά για διαφορετικά ύψη του ποσοστού κέρδους:

1. $p_q^{(\delta)} < p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\tau)}$
2. $p_q^{(\delta)} = p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\tau)}$
3. $p_q^{(\delta)} < p_q^{(\varepsilon)} = p_q^{(\tau)}$
4. $p_q^{(\delta)} < p_q^{(\tau)} = p_q^{(\varepsilon)}$
5. $p_q^{(\delta)} = p_q^{(\tau)} < p_q^{(\varepsilon)}$
6. $p_q^{(\varepsilon)} = p_q^{(\delta)} < p_q^{(\tau)}$
7. $p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\delta)} < p_q^{(\tau)}$
8. $p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\tau)} < p_q^{(\delta)}$
9. $p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\delta)} = p_q^{(\tau)}$
10. $p_q^{(\varepsilon)} = p_q^{(\tau)} < p_q^{(\delta)}$
11. $p_q^{(\varepsilon)} = p_q^{(\tau)} < p_q^{(\delta)}$
12. $p_q^{(\tau)} < p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\delta)}$
13. $p_q^{(\tau)} < p_q^{(\delta)} < p_q^{(\varepsilon)}$
14. $p_q^{(\tau)} = p_q^{(\varepsilon)} < p_q^{(\delta)}$
15. $p_q^{(\tau)} < p_q^{(\delta)} = p_q^{(\varepsilon)}$
16. $p_q^{(\tau)} = p_q^{(\delta)} < p_q^{(\varepsilon)}$

Αν αυτές οι σχέσεις αποτυπωθούν σε ένα διάγραμμα θα είναι της μορφής¹⁹⁸:



Ένα ζήτημα το οποίο ο Pasinetti, πραγματεύεται αθόρυβα είναι η εξάρτηση της ισχύος του κριτηρίου ελαχιστοποίησης του κόστους. Ο ίδιος παρατηρεί σελ 170:

«Φαίνεται αμέσως ότι η προηγούμενη επιχειρηματολογία είναι ανεξάρτητη από το είδος του numeraire που χρησιμοποιούμε για το σύστημα τιμών. Διότι, δεδομένου οποιουδήποτε ποσοστού κερδους $\bar{\pi}$, το να αλλάξουμε εμπόρευμα ως προς το οποίο εκφράζονται οι τιμές, ισοδυναμεί απλά με το να διαιρέσουμε τις δύο πλευρές κάθε μίας από τις ισότητες (VI.3.1) με τον ίδιο αριθμό (δηλαδή με την τιμή της νέας numeraire). Κατι τέτοιο αφήνει αμετάβλητη, την διάταξη των μεθόδων η οποία προκύπτει από την σύγκριση των τριών τιμών.

Κατι τέτοιο όμως, όπως έδειξε και ο Γ.Σταμάτης¹⁹⁹, κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Εμείς αρκούμαστε να αναφέρουμε, ότι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει ο Pasinetti, ευσταθεί μόνο στην περίπτωση του παραδείγματος που πραγματεύεται. Τα πράγματα ήτοι η σχέση διάταξης των τιμών θα μπορούσε να είναι διαφορετική στις περιπτώσεις όπου:

1. Το εν λόγω εμπόρευμα κατά το οποίο διαφέρουν οι δύο τεχνικές να είναι βασικό, και αυτός είναι ο λόγος ότι στην περίπτωση που οι υπό σύγκρισιν τεχνικές διαφέρουν στην διαδικασία παραγωγής ενός βασικού εμπορεύματος,

¹⁹⁸ Είναι αυτονόητο πως οι σχέσεις διάταξης και η μορφή διαγραμματικής απεικόνισης των σχέσεων των τιμών παραγωγής είναι τυχαία, όπως και τα σημεία τομής τους.

¹⁹⁹ Βλ.Γ.Σταμάτης (1989) σελ 134-135

επιλέγεται το $w-r$ κριτήριο αντί του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους.

2. Το εμπόρευμα κατά το οποίο διαφέρουν οι δύο τεχνικές να είναι μη βασικό, αλλά να εισέρχονταν στην παραγωγή και άλλων μη βασικών εμπορευμάτων, συμπεριλαμβανομένου και της δικής του παραγωγής και να:

- a. Τυποποιούνται οι τιμές με αυτό, στην περίπτωση αυτή το μη βασικό εμπόρευμα γίνεται οιονεί-βασικό, λόγω της τυποποίησης

Έχουμε δει την βιβλιογραφία²⁰⁰, ότι οι τιμές παραγωγής μεταβάλλονται για δεδομένο πάντα ποσοστό κέρδους με την τυποποίηση. Και μεταβάλλονται τόσο, ώστε ανάλογα με την σύνθεση του τυπικού εμπορεύματος μπορούν να εμφανίζονται ή και εξαφανίζονται μηδενικές τιμές των εμπορευμάτων.

Βάσει όλων αυτών ο Pasinetti, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι, όταν δύο η περισσότερες τεχνικές διαφέρουν κατά την διαδικασία παραγωγής, ενός μη βασικού εμπορεύματος, τότε η μετάβαση από την μία τεχνική στην άλλη δεν έχει καμία επίπτωση στο οικονομικό σύστημα εν γένη, παρά μόνο στους επιμέρους καπιταλιστές και καταναλωτές που παράγουν και καταναλώνουν αντίστοιχα το εν λόγω εμπόρευμα. Το συμπέρασμα πάλι είναι ορθό μόνο στην συγκεκριμένη περίπτωση που πραγματεύεται ο Pasinetti, καθώς αν άλλαζε η τυποποίηση και το εμπόρευμα αυτό συμμετείχε άμεσα ή έμμεσα στο τυπικό εμπόρευμα, τότε θα γινόταν οιονεί-βασικό και ως εκ τούτου θα επηρέαζε και τους άλλους τομείς της υπό εξέταση οικονομίας.

3.5 Η οπτική των H.D.Kurz και N.Salvadori

Αρχικά οι K-S ορίζουν σαν b_j , το $1 \times n$ διάνυσμα των εκροών της διαδικασίας j . Εισάγουν και αυτή τόσο τις ακόλουθες συνθήκες:

$$pb_j \leq pa_j(1+r) + w\ell_j \quad (1)$$

Η συνθήκη (1) αποτελεί την συνθήκη μη ύπαρξης επιπλέον κερδών από την χρησιμοποίηση της διαδικασίας παραγωγής j . Από την άλλη πλευρά η συνθήκη (2):

²⁰⁰ Μεταξύ άλλων σε κείμενα του Γ. Σταμάτη που πολλάκις έχουν αναφερθεί στην παρούσα εργασία., στο Π. Βουγιουκλάκης (1996), Κ. Γογολός (2000) και Θ. Μαριόλης (1994) (1998)

$$pb_j \geq pa_j(1+r) + w\ell_j \quad (2)$$

,αποτελεί την συνθήκη για την μη ύπαρξη επιπλέον (υπερβάλλον) κόστους από την χρήση της διαδικασίας παραγωγής j.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η :

$$pb_j = pa_j(1+r) + w\ell_j \quad (3)$$

Η σχέση (3) αποτελεί μια κατάσταση γενικής ισορροπίας, καθώς μακροπρόθεσμα, όπως υποστηρίζουν και οι K-S²⁰¹, καθώς από την χρησιμοποίηση της τεχνικής j, δεν προκύπτουν ούτε επιπλέον κέρδη αλλά ούτε και υπερβάλλοντα κόστη (extra profits).

Στην συνέχεια οι K-S προσεγγίζουν το cost minimization criterion, με έναν έμμεσο και άμμεσο τρόπο.

a) Έμμεσος τρόπος

Στην περίπτωση αυτή οι H.D.Kurz και N.Salvadori²⁰², επαναδιατυπώνουν το cost minimization criterion χρησιμοποιώντας τις σχέσεις, αφενός για την συνθήκη της μη ύπαρξης επιπλέον κόστους:

$$p_j \leq p_j A_i(1+r) + w_j \ell_i, i \neq j \quad (3)$$

Ενώ οι τιμές παραγωγής ορίζονται από την γνωστή σχέση:

$$p_j = p_j A_j(1+r) + w_j \ell_j \quad (4)$$

Και φυσικά την εξίσωση τυποποίησης:

$$p_j q = 1 \quad (4)$$

Την συνθήκη ύπαρξης μιας τεχνικής που ελαχιστοποιεί το κόστος, οι H.D.Kurz και N.Salvadori την θέτουν ως εξής (σελ 129):

²⁰¹ H.D.Kurz , N.Salvadori σελ 128

²⁰² H.D.Kurz και N.Salvadori(1995) σελ 128-9

“it is possible to prove that if there is a technique which has a positive price vector and a positive wage rate for $r = r^*$, then there is a cost minimizing technique at rate of profit r^* ”

Με άλλα λόγια αρκεί και μόνο να αποδεικτεί ότι:

$$p_j = w_j \ell_j [I - A_i(1 + r^*)]^{-1} > 0 \quad (5)$$

Από την σχέση (5) προκύπτει ότι, αρκεί και μόνο η διαδικασία I να είναι r^* -παραγωγική ώστε οι τιμές παραγωγής να είναι θετικές, και κατά συνέπεια η τεχνική που περιλαμβάνει την διαδικασία παραγωγής I να είναι μια ελαχιστοποιούσα το κόστος τεχνική παραγωγής.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε 3 προτάσεις που δίνουν οι H.D.Kurz και N.Salvadori, βάσει των οποίων θα καταλήξουν σε ένα θεώρημα, που συνοψίζει τα συμπεράσματα²⁰³ τους σχετικά με την ύπαρξη μιας ελαχιστοποιούσας το κόστος τεχνικής παραγωγής.

Πρόταση 1: Εάν στο ποσοστό κέρδους r^* , μια διαδικασία παραγωγής συνεπάγεται υπερκέρδη στις θετικές τιμές και σε θετικό ωρομίσθιο της τεχνικής $[A_i, \ell_i]$, τότε υπάρχει μια τεχνική $[A_j, \ell_j]$ η οποία μπορεί να συνεπάγεται μεγαλύτερο ονομαστικό ωρομίσθιο από την $[A_i, \ell_i]$, μετρημένο σε όρους κάποιου τυπικού εμπορεύματος.

Πρόταση 2: Έστω $[A_j, \ell_j]$ και $[A_i, \ell_i]$ δύο τεχνικές, τέτοιες ώστε για $r = r^*$ $p_i, p_j > 0$, και $w_i > w_j > 0$, τότε υπάρχει μια τεχνική $[A_i, \ell_i]$, η οποία συνεπάγεται υπερκέρδη στις τιμές της τεχνικής $[A_j, \ell_j]$.

Πρόταση 3: Έστω $[A_j, \ell_j]$ και $[A_i, \ell_i]$ είναι δυο τεχνικές οι οποίες ελαχιστοποιούν και οι δύο το κόστος στο r^* , όπου $p_i, p_j > 0$ και $w_i, w_j > 0$, τότε $w_i = w_j$ και $p_i = p_j$

Βάσει όλων των παραπάνω διατυπώνουν το ακόλουθο θεώρημα:

²⁰³ Για την απόδειξη των παρακάτω προτάσεων βλ. H.D.Kurz και N.Salvadori, (1995) σελ129-131.

1. Εάν υπάρχει μια τεχνική η οποία έχει ένα θετικό διάνυσμα τιμών και ένα θετικό ονομαστικό ωρομίσθιο για $r=r^*$, τότε υπάρχει μια τεχνική στο $r=r^*$ η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος
2. Μια τεχνική, από την οποία προκύπτει ένα διάνυσμα τιμών $p>0$ και ένα $w>0$ για $r=r^*$, ελαχιστοποιεί το κόστος στο r^* , εάν και μόνο εάν καμία άλλη τεχνική δεν επιτρέπει ένα $w'>w$, για $r=r^*$, με δεδομένο τυπικό εμπόρευμα, το οποίο αποτελείται από μια θετική ποσότητα του κάθε εμπορεύματος.
3. Εάν υπάρχουν, περισσότερες από μια τεχνικές, οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος στο r^* , και αυτές οι τεχνικές συνεπάγονται $w>0$, τότε αυτές οι τεχνικές έχουν το ίδιο w και το ίδιο διάνυσμα τιμών στο $r=r^*$.

Αυτό που κάνουν οι H.D.Kurz και N.Salvadori, δεν είναι άλλο από το να επαναδιατυπώσουν το κριτήριο της ελαχιστοποίησης, έτσι ώστε να συμπίπτει με το $w-r$ κριτήριο²⁰⁴.

b) Η άμεση μέθοδος

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, οι H.D.Kurz και N.Salvadori, επαναδιατυπώνουν για μια ακόμα φορά την συνθήκη για την μη ύπαρξη υπερκερδών. Με άλλα λόγια ισχύει:

$$Bp \leq pA(1+r) + w\ell \quad (6)$$

$$pd = 1 \quad (7)$$

Για τους H.D.Kurz και N.Salvadori το ζευγάρι (p, w) ($p \geq 0, w \geq 0$) αποτελεί μια μακροχρόνια λύση για ένα δεδομένο ποσοστό κέρδους αν και μόνο αν οι σχέσεις (6) και (7) ικανοποιούνται, και δεν υπάρχει καμία άλλη διαδικασία για κάθε ένα από το n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα η οποία να αποφέρει επιπλέον κέρδη. Το τελευταίο συμβαίνει κατά τους H.D.Kurz και N.Salvadori αν και μόνο εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$x \geq 0 \quad (8)$$

$$p[B - A(1+r)]x = w\ell x \quad (9)$$

$$Bx > 0 \quad (10)$$

²⁰⁴ Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο, ότι στην περίπτωση των γειτονικών μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής,

Βάσει των παραπάνω διατυπώνουν το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2: Για ένα δεδομένο ποσοστό κέρδους r :

- a) Εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα ημιθετικό διάνυσμα v τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$[B - A(1+r)]v \geq 0^{205},$$

Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα τιμών παραγωγής p , $p \geq 0$ και ένα ονομαστικό ωρομίσθιο $w > 0$, τέτοιο ώστε καμία διαδικασία παραγωγής να μην αποφέρει επιπλέον κέρδη και τουλάχιστον μία διαδικασία να μην συνεπάγεται επιπλέον κόστη

- b) Το ονομαστικό ωρομίσθιο w που συνεπάγεται μακροπρόθεσμα, είναι το μικρότερο w για το οποίο προκύπτει ένα θετικό διάνυσμα των τιμών p
- c) Εάν υπάρχει ένα μακροχρόνια διαμορφωμένο ονομαστικό ωρομίσθιο $w, w > 0$ και ένα μακροχρόνια διαμορφωμένο διάνυσμα τιμών $p, p > 0$, τότε αυτά είναι μοναδικά.

Είναι φανερό ότι οι σύμφωνα με το δεύτερο αυτό θεώρημα που αναπτύσσουν οι H.D.Kurz και N. Salvadori, δεν κάνουν τίποτε άλλο από το να επαναδιατυπώσουν το Non Substitution Theorem, και να διατυπώσουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το cost minimization criterion και το Non Substitution Theorem συμπίπτουν.

3.6 Η οπτική του G. Erreygers

Η παρουσίαση του cost minimization criterion από τον G. Erreygers²⁰⁶ είναι παρόμοια με αυτές που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Αρχικά παρουσιάζονται οι προϋποθέσεις του υποδειγματός του²⁰⁷.

²⁰⁵ Με άλλα λόγια το σύστημα παραγωγής $[A, B, v]$ να είναι r -βιώσιμο

²⁰⁶ G. Erreygers (1994)

²⁰⁷ Παρότι ο συμβολισμός του G. Erreygers είναι διαφορετικός από αυτόν που εκτείνεται, ως τόσο θα επιλεγεί ο τελευταίος για χάρη της συμφωνίας με τον συμβολισμό της παρούσας διατριβής

1. Υπάρχουν m διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής, που όπως είναι φυσικό υπερβαίνουν τον αριθμό των παραγόμενων n , εμπορευμάτων
2. Επιλέγεται μια τεχνική έστω T που συγκροτείται από n από τις διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής
3. Επιλέγεται από τον G.Erreygers ένα τυπικό εμπόρευμα q , που αποτελείται από τα n δυνάμεθα να παραχθούν, από την τεχνική παραγωγής T ²⁰⁸.
4. Επιλέγεται ένα ποσοστό κέρδους, $\bar{r}$ που φυσικά βρίσκεται εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών του ποσοστού κέρδους $(0, R_i], \forall i \in T$.
5. Προσδιορίζονται οι τιμές παραγωγής για το δεδομένο ύψος του ποσοστού κέρδους $\bar{r}$ και τυποποιούνται με το τυπικό εμπόρευμα $q, q > 0$.

Κατα συνέπεια ισχύει η σχέση:

$$\forall i \in T : pB_i - pA_i(1 + \bar{r}) - w\ell_i(1)$$

$$pq = 1(2)$$

Η πρώτη συνθήκη δεν είναι άλλη από μια σύνθεση των συνθηκών (33) και (34) που συναντήσαμε παραπάνω. Με άλλα λόγια σχέση (1) μας πληροφορεί, ότι στις τιμές του ποσοστού κέρδους $\bar{r}$, η τιμή του εμπορεύματος της διαδικασίας i είναι ίση με το μοναδιαίο κόστος παραγωγής του. Με άλλα λόγια δεν προκύπτουν υπερκέρδη, δηλαδή η περίπτωση όπου η τιμή του εμπορεύματος υπερβαίνει το μοναδιαίο κόστος²⁰⁹ παραγωγής του, ούτε επιπλέον κόστη στην περίπτωση όπου η τιμή του εμπορεύματος υπολείπεται του μοναδιαίου κόστους παραγωγής του. Όπως είναι αυτονόητο η σχέση (2) αποτελεί μια εξίσωση τυποποίησης των τιμών παραγωγής.

Για τον G.Erreygers επιλέγεται εκείνη η τεχνική, σύμφωνα με το cost minimization criterion, όπου στις τιμές της οποίας για ένα δεδομένο ποσοστό κέρδους, καμία

²⁰⁸ Η τυποποίηση αυτή που κάνει ο G.Erreygers μόνο τυχαία δεν είναι, καθώς αποτελεί μια εξειδικευμένη περίπτωση τυποποίησης, καθώς στα πλαίσια μιας διασπώμενης τεχνικής, της προσδίδει ιδιότητες μιας μη διασπώμενης, όσον αφορά πάντα την επιλογή και την κατάταξη των τεχνικών.

²⁰⁹ Σαν κόστος ορίζεται από το Κ.Γογολος (2000) σελ 263:

«...Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας του j προσαυξημένο με τα κέρδη στην βάση ενός ενιαίου ποσοστού κέρδους, το οποίο κόστος ορίζεται στην παράσταση: $pA_j(1 + r) + w\ell_j$...».

διαδικασία παραγωγής της δεδομένης τεχνολογίας δεν οδηγεί στην ύπαρξη υπερκερδών. Κατα συνέπεια οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται αντίστοιχα:

$$\forall i \in 1,2,3,\dots,m: pB_i - pA_i(1+\bar{r}) - w\ell_i \leq 0(3)$$

$$pq = 1(4)$$

Συνεχίζοντας ο G.Erreygers ασκώντας κριτική²¹⁰ στο Γ.Σταμάτης (1993), προσπαθεί να αποδείξει ότι η χρήση του cost minimization criterion, σε αντίθεση με το w-r κριτήριο, μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή μιας τεχνικής η οποία θα ήταν ανεξάρτητη από την τυποποίηση των τιμών.

Αν προσπάθησουμε να περιγράψουμε λεκτικά την διαδικασία που χρησιμοποιείται στα πλαίσια του –κατά Erreygers- cost minimization criterion, για δύο διαθέσιμες γειτονικές τεχνικές (α) και (β) μπορούμε να αρκεστούμε στα εξής:

- a) Εκκινώντας από την τεχνική (α) ορίζονται για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω $\bar{r}$, και για μια δεδομένη τυποποίηση, έστω με $q, q > 0$, οι τιμές παραγωγής και το ονομαστικό ωρομίσθιο της εν λόγω τεχνικής. Στην συνέχεια υπολογίζεται η διαφορά του εμπορεύματος κατά το οποίο διαφέρει η τεχνική β, από το κόστος του εμπορεύματος αυτού. Πρέπει ωστόσο να τονίσουμε ότι ο υπολογισμός των τιμών παραγωγής και του ονομαστικού ωρομισθίου γίνεται σε όρους της τεχνικής (α). Κατα συνέπεια ισχύει η σχέση:

$$p^{(a)}B_j^{(b)} - p^{(a)}A_j^{(b)}(1+\bar{r}) - w^{(a)}\ell_j^{(b)} \stackrel{<}{=} 0(5). \text{ Για την σχέση (5) δύνανται να ισχύουν}$$

διαζευκτικά:

²¹⁰ Η κριτική αυτή ασκείται χρησιμοποιώντας το ίδιο το αριθμητικό παράδειγμα του Γ.Σταμάτη, και στο οποίο γίνεται η προσπάθεια να αποδειχθεί ότι η χρήση του w-r κριτηρίου είναι λανθασμένη με την «ορθή» και «καλή» χρήση του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους, στα πλαίσια διασπώμενων συστημάτων παραγωγής. Το αν και κατά πόσον η κριτική στο εν λόγω άρθρο παραπέμπεται ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στα Σταματης (1993), G.Erreygers (1994) και Κ.Γογολος (2000). Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει εάν και κατά πόσον το cost minimization criterion είναι ανεξάρτητο από την τυποποίηση στην γενική περίπτωση.

Πρέπει ωστόσο να τονίσουμε, ότι απότερος σκοπός του G.Erreygers είναι μια γενίκευση του αλγορίθμου του Bidard, ως ένα γενικότερο κριτήριο επιλογής, ακόμα και στην περίπτωση των τεχνικών απλής παραγωγής..

$p^{(a)} B_j^{(b)} - p^{(a)} A_j^{(b)} (1 + \bar{r}) - w^{(a)} \ell_j^{(b)} > 0(5.1)$, στην περίπτωση αυτή υπάρχουν υπερκέρδη απο την χρήση της τεχνικής b, και ως εκ τούτου επιλέγεται η τεχνική α

$p^{(a)} B_j^{(b)} - p^{(a)} A_j^{(b)} (1 + \bar{r}) - w^{(a)} \ell_j^{(b)} = 0(5.2)$ στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν υπερκέρδη απο την χρήση της τεχνικής b, και ως εκ τούτου είναι αδιάφορο αν θα χρησιμοποιηθεί η τεχνική α ή η τεχνική b

$p^{(a)} B_j^{(b)} - p^{(a)} A_j^{(b)} (1 + \bar{r}) - w^{(a)} \ell_j^{(b)} < 0(5.3)$ στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν υπερκέρδη –αλλά αντίθετα προκύπτουν επιπλέον κόστη- απο την χρήση της τεχνικής α, και ως εκ τούτου επιλέγεται η τεχνική b

b) Αν τροποποιήσουμε ελαφρώς την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω και εκκινήσουμε από τις τιμές της τεχνικής b, για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, τότε θα προκύψει:

$p^{(b)} B_j^{(a)} - p^{(b)} A_j^{(a)} (1 + \bar{r}) - w^{(b)} \ell_j^{(a)} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0(6)$. Για την σχέση (6) δύνανται να ισχύουν

διαζευκτικά:

$p^{(b)} B_j^{(a)} - p^{(b)} A_j^{(a)} (1 + \bar{r}) - w^{(b)} \ell_j^{(a)} > 0(6.1)$, στην περίπτωση αυτή υπάρχουν υπερκέρδη απο την χρήση της τεχνικής α, και ως εκ τούτου επιλέγεται η τεχνική b

$p^{(b)} B_j^{(a)} - p^{(b)} A_j^{(a)} (1 + \bar{r}) - w^{(b)} \ell_j^{(a)} = 0(6.2)$ στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν υπερκέρδη απο την χρήση της τεχνικής b, και ως εκ τούτου είναι αδιάφορο αν θα χρησιμοποιηθεί η τεχνική α ή η τεχνική b

$p^{(b)} B_j^{(a)} - p^{(b)} A_j^{(a)} (1 + \bar{r}) - w^{(b)} \ell_j^{(a)} < 0(5.3)$ στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν υπερκέρδη –αλλά αντίθετα προκύπτουν επιπλέον κόστη- απο την χρήση της τεχνικής b, και ως εκ τούτου επιλέγεται η τεχνική α.

Όπως ορθά αναφέρει ο Κ.Γόγολος (2000) σελ 265, είναι απολύτως δυνατόν στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής να ισχύουν ταυτόχρονα είτε η (5.1) και η (5.3) είτε η (6.1) και η (6.3), αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η επιλογή κάποιας από τις δύο τεχνικές σύμφωνα με το cost minimization criterion, καθώς η τεχνική b (α) αποφέρει υπερκέρδη την στιγμή που η τεχνική α (b) αποφέρει επιπλέον κέρδη. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα δεν μπορεί να ισορροπήσει στην χρήση

κάποιας από τις δύο τεχνικές, αλλά θα εναλλάσσεται συνεχώς από την χρήση της τεχνικής (α) σε αυτήν της τεχνικής (b).

Για τον Erreygers η ισχύς κάποιας εκ των σχέσεων (5)-(6) είναι ανεξάρτητη από το τυπικό εμπόρευμα. Δηλαδή ο Erreygers αντίθετα με τον Γ.Σταμάτη πιστεύει ότι το cost minimization criterion, είναι κριτήριο επιλογής τεχνικής και όχι κριτήριο επιλογής τυπικών υποσυστημάτων. Αν και κατά πόσον είναι σωστή η άποψη αυτή του Erreygers θα το διαπιστώσουμε σε ακόλουθα κεφάλαια.

3.7 Το cost minimization criterion (μια γενική διατύπωση)

Κατά συνέπεια το η ισχύ του Cost minimization criterion στηρίζεται σε δύο ισοδύναμες συνθήκες, τις οποίες συναντήσαμε σε διάφορες εκδοχές παραπάνω²¹¹.

- Συνθήκη για maximum profits²¹²

$$p^{(a)} \leq p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + \ell^{(b)} (1)$$

Η συνθήκη (1) δείχνει η τεχνική (b) εκφρασμένη σε τιμές των μέσων παραγωγής της τεχνικής (α) δεν αποφέρει επιπλέον κέρδη, για μια δεδομένη τιμή του $r, 0 \leq r < \min[R_{(a)}, R_{(b)}]$.

- Συνθήκη για minimum cost

$$p^{(b)} \geq p^{(b)} A^{(a)} (1+r) + \ell^{(a)} (2)$$

Η σχέση (2) δείχνει, ότι η τεχνική (α) εκφρασμένη σε τιμές των μέσων παραγωγής της τεχνικής (b) δεν συνεπάγεται επιπλέον κόστος, για μια δεδομένη τιμή του $r, 0 \leq r < \min[R_{(a)}, R_{(b)}]$.²¹³

²¹¹ Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι $w=1$

²¹² H.D.Kurz και N.Salvadori (1995) σελ 127

²¹³ Είναι φανερό, ότι μεταξύ των δύο συνθηκών υπάρχει μια σχέση δυϊκότητας. Με άλλα λόγια η ελαχιστοποίηση του κόστους με την επιδίωξη υπερκερδών, είναι η άλλη όψη του ίδιου νομίσματος. Δηλαδή για να ισχύει το cost minimization criterion, πρέπει να ισχύουν τα δύο δυϊκά του προβλήματα-σημειώνουμε ότι η τυποποίηση δηλαδή η σχέση $p^{(b)} q = 1$ είναι τυχαία :

Ωστόσο όπως είπαμε παραπάνω οι τεχνικές (α), (β) διαφέρουν κατά μια διαδικασία μόνο παραγωγής του εμπορεύματος j, αφού σύμφωνα με το cost minimization criterion συγκρίνονται μόνο γειτονικές τεχνικές. Κατά συνέπεια οι παραπάνω σχέσεις θα πάρουν την μορφή:

- Συνθήκη για maximum profits²¹⁴

$$p_j^{(a)} \leq p_j^{(a)} A_j^{(b)} (1+r) + \ell_j^{(b)} \quad (3)$$

Η συνθήκη (3) δείχνει ότι η χρησιμοποίηση της διαδικασίας παραγωγής του j που αντιστοιχεί στην τεχνική (b), εκφρασμένο σε τιμές των μέσων παραγωγής της τεχνικής (α), δεν αποφέρει επιπλέον κέρδη, για μια δεδομένη τιμή του r, $0 \leq r < \min[R_{(a)}, R_{(b)}]$.

- Συνθήκη για minimum cost

$$p_j^{(b)} \leq p_j^{(b)} A_j^{(a)} (1+r) + \ell_j^{(a)} \quad (4)$$

Η σχέση (4) δείχνει, η χρησιμοποίηση της διαδικασίας παραγωγής του j που αντιστοιχεί στην τεχνική (α), εκφρασμένο σε τιμές των μέσων παραγωγής της τεχνικής (β), δεν συνεπάγεται επιπλέον κέρδη, για μια δεδομένη τιμή του r, $0 \leq r < \min[R_{(a)}, R_{(b)}]$.

$$\max p^{(b)} \geq p^{(b)} A^{(a)} (1+r) + w^{(b)} \ell^{(a)}$$

$$r = r^*$$

$$s.t. \quad p^{(b)} q = 1$$

$$q = [I - A^{(a)} (1+r)]d$$

Και το δυϊκό πρόβλημα:

$$\min p^{(a)} \leq p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)}$$

$$r = r^*$$

$$s.t. \quad p^{(a)} q = 1$$

$$q = [I - A^{(b)} (1+r)]d$$

Είναι φανερό, ότι για να ισχύει το cost minimization criterion, πρέπει ταυτόχρονα να ικανοποιούνται και τα δυϊκά τους προβλήματα που αναφέραμε παραπάνω. Η τελευταία

²¹⁴ H.D.Kurz και N.Salvadori (1995) σελ 128

Σύμφωνα με τα παραπάνω μακροχρόνια καμία διαδικασία παραγωγής, και κατά συνέπεια καμία τεχνική, δεν συνεπάγεται ούτε επιπλέον κέρδη, ούτε επιπλέον κόστος²¹⁵. Με άλλα λόγια η λειτουργία του cost minimization criterion, έχει ως εξής:

²¹⁵ Το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους παρουσιάζεται και από τον G.Erreygers στο G.Erreygers (1995) σαν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Προτού όμως παρουσιάσουμε συνοπτικά το πρόβλημα αυτό, θα αναφέρουμε πως ο Erreygers ορίζει τα υπερκέρδη και το επιπλέον κόστος. Στην σελίδα 148 αναφέρει:

«Let the $[k \times 1]$ vector $p = [p_i]$ represent the prices of the k commodities, the scalar w the wage earned by labourers, and the scalar r the rate of profits. If the difference between the value of the outputs of activity i ($= B_i p$) and the costs to be paid for the inputs, i.e., the sum of replacement costs, wages and profits ($= A_i p + d_i w + r A_i p$), is positive, activity i pays extra-profits. If, on the contrary, this difference is negative, activity i requires extra-costs. If there is no difference, the activity breaks even. The Sraffian theory of production prices is built upon the assumption that all processes which are in operation ($x_i > 0$) break even. For reasons of stability, it is furthermore required that all processes which are not in operation ($x_i = 0$) do not pay extra-profits...».

Με άλλα λόγια ο Erreygers εκφράζει τις συνθήκες για υπερκέρδη και επιπλέον κόστος διαφορετικά από ότι οι Kurz και Salvadori, με την ισχύ των σχέσεων:

$$C(r)p - \ell w \leq 0, C(r) \equiv B - (1+r)A$$

$$x[C(r)p - \ell w] = 0$$

Βάσει αυτών ορίζει μια τεχνική σαν cost minimizing όταν ισχύει όπως ο ίδιος γράφει (σελ 151):

«Definition 3. Given the rates of profits and growth, technique Y is cost minimizing with respect to demand vector d if there exists a semi-positive numeraire vector n , an activity vector X_Y , a price vector $p(Y, r)$ and a wage $w(Y, r)$ such that:

$$x_i C_Y(g) = d'$$

$$C_Y(r)p(Y, r) - \ell_Y w(Y, r) = 0$$

$$C(r)p(Y, r) - \ell_Y w(Y, r) \leq 0$$

$$n'p(Y, r) = 1$$

$$\forall j \in P(Y): p_j(Y, r) \geq 0$$

$$w(Y, r) \geq 0$$

$$x_r \geq 0.$$

1. Υπολογίζονται για μια δεδομένη (οικονομικά σημαντική) τιμή του ποσοστού κέρδους, οι τιμές παραγωγής της μία τεχνικής- έστω της (α).
2. Για τις νέες προκύπτουσες τιμές της τεχνικής (α) και για την ίδια τιμή του ποσοστού κέρδους, εξετάζουμε την ισχύ των συνθηκών (1) και (2) για την διαδικασία κατά την οποία διαφέρουν οι δύο τεχνικές.
3. Αν μία τεχνική ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες, τότε αυτή είναι και η cost minimizing τεχνική, η οποία και επιλέγεται

Όπως αναφέραμε παραπάνω, στην βιβλιογραφία, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται πρέπει να ικανοποιούν την ζήτηση, δηλαδή ό, τι χρειάζεται το υπό εξέταση σύστημα για κατανάλωση και επισώρευση. Δηλαδή η τεχνικές που χρησιμοποιούνται μαζί με τα διανύσματα επιπέδων δραστηριοτήτων, πρέπει να συγκροτούν ένα βιώσιμο σύστημα²¹⁶. Το τελευταίο πλησιάζει κατά πολύ τον ορισμό του Ch.Bidard γι

α την τεχνική παραγωγής, σύμφωνα με την οποία μια τυχαία συλλογή η διαδικασιών παραγωγής είναι τεχνική, στην περίπτωση που δύναται να ικανοποιήσει την ζήτηση²¹⁷.

Το cost minimization criterion βλέπουμε ότι έχει έναν καθαρά καπιταλιστικό χαρακτήρα, καθώς οι επιμέρους καπιταλιστές (οι λειτουργόντες την διαδικασία παραγωγής) είναι αυτοί που επιλέγουν ποια διαδικασία παραγωγής θα χρησιμοποιηθεί και σε ποιά εντατικότητα. Δεν υπάρχει κανένας οικονομικός λόγος w-r κριτήριο, για τον οποίον θα «υποχρεωθούν» οι καπιταλιστές να δεχθούν το ενιαίο ποσοστό κέρδους του συστήματος.

Ωστόσο όπως θα δούμε στην συνέχεια και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως και στην περίπτωση του cost minimization criterion, δεν συγκρίνονται τεχνικές αλλά τυπικά υποσυστήματα μεταξύ τους. Κατα συνέπεια ούτε το κριτήριο ελαχιστοποίησης του

²¹⁶ Για την έννοια του βιώσιμου συστήματος, βλ. Γ. Σταμάτη(1998) και (1994) Εδώ αρκούμαστε να αναφέρουμε ότι σαν βιώσιμο σύστημα ορίζεται το σύστημα το οποίο δύναται να παράξει κάθε θετικό ή έστω ημιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας αντίστοιχα ένα θετικό ακαθάριστο προϊόν.

Στην περίπτωση όμως αυτή θα ήταν ορθότερο να μιλήσουμε για r-βιώσιμο σύστημα και για r-παραγωγικό σύστημα. Με άλλα λόγια το σύστημα πρέπει να παράγει ένα θετικό ή ημιθετικό καθαρό προϊόν για δεδομένο θετικό ακαθάριστο προϊόν, απαιτώντας όμως το σύστημα να αποφέρει ποσοστό κέρδους ίσο με r^*

²¹⁷ Ch. Bidard, μια αλγοριθμική θεωρία επιλογής τεχνικών, μετάφραση: Θ. Μαριόλης (1996), σελ 121

κόστους συνεπάγεται μια μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών. Στην πραγματικότητα κατατάσσονται γειτονικά τυπικά υποσυστήματα μεταξύ τους, σύμφωνα με την ύπαρξη ή όχι υπερκερδών από την εισαγωγή μιας νέας διαδικασίας παραγωγής, για δεδομένο πάντα ποσοστό κέρδους. Το τελευταίο όπως θα δούμε, αντιβαίνει στην κρατούσα άποψη της σύγχρονης νεοοικονομικής θεωρίας (δηλαδή από τους Erreygers, Bidard, Kurz-Salvadori και L.Passinetti)²¹⁸.

3.7.1 ΜΗ ΔΙΑΣΠΩΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Έστω οι τεχνικές $[A^{(.)}, \ell^{(.)}]$, με $(.)=a,b$. Για τα διανύσματα τιμών των ισχύει για την τιμή $\bar{r}$, $0 \leq r < \min[R_{(a)}, R_{(b)}]$:

Αρχικά για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$p^{(a)} = p^{(a)}A^{(a)}(1+\bar{r}) + w^{(a)}\ell^{(a)} \Leftrightarrow p^{(a)} = w^{(a)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1} \quad (1)$$

Και εν συνεχεία για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$

$$(162) \quad p^{(b)} = w^{(b)}\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1} \quad (2)$$

Απαραίτητο ωστόσο για την συνέχεια είναι η κοινή και για τις δύο τεχνικές τυποποίηση των τιμών, έστω με το τυπικό εμπόρευμα d :

$$p^{(.)}d = 1, (.) = a, b \quad (3)$$

Επομένως οι σχέσεις (3) και (4) γίνονται αντίστοιχα:

$$p^{(a)}d = w^{(a)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (4) \text{ και}$$

$$p^{(b)}d = w^{(b)}\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (5)$$

²¹⁸ Η εξάρτηση των γνωστών κριτηρίων επιλογής τεχνικής από την τυποποίηση των τιμών, έχει εκτεταμένα αναλυθεί στην βιβλιογραφία από τον Γ. Σταμάτη.

Ξέροντας τα παραπάνω είμαστε σε θέση να εξετάσουμε την ισχύ των σχέσεων (1) και (2). Υποθέτουμε εφεξής ότι η τεχνική (α) είναι η cost minimizing τεχνική. Κατά συνέπεια:

$$p^{(a)}d \leq p^{(a)}A^{(b)}(1+\bar{r})d + w^{(b)}\ell^{(b)}d \Leftrightarrow p^{(a)}d \leq w^{(b)}\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (8)$$

$$p^{(b)}d \geq p^{(b)}A^{(a)}d(1+\bar{r}) + w^{(a)}\ell^{(a)}d \Leftrightarrow p^{(b)}d \geq w^{(a)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (9)$$

Κατά συνέπεια από τις σχέσεις (8) και (9) έχουμε:

$$w^{(b)}\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \geq w^{(b)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (10) \Rightarrow$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \Rightarrow$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \Rightarrow$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \quad (11)$$

Με άλλα λόγια σύμφωνα με την (11) για να είναι η τεχνική (α) cost minimizing πρέπει η τιμή του καθαρού προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος (b) να είναι μεγαλύτερη από αυτήν του καθαρού προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος (a).

Στο σημείο αυτό εισαγάγαμε την έννοια του τυπικού υποσυστήματος. Το ερώτημα που τίθεται ως τόσο είναι αν η κατάταξη που συνεπάγεται η (11) είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση.

Κατά συνέπεια για να ισχύει η (11) για κάθε τυπικό εμπόρευμα d πρέπει:

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}d \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}d \forall d \Leftrightarrow$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1} \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1} \quad (12)$$

Κατά συνέπεια για να ισχύει η (11) πρέπει τα διανύσματα $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ και $\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}$ πρέπει να είναι αυστηρώς η έστω κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους. Πότε όμως συμβαίνει αυτό;

Είναι φανερό, ότι όταν οι τεχνικές είναι γειτονικές²¹⁹ η κατάταξη θα είναι πάντα ανεξάρτητη από την τυποποίηση αφού η (12) θα ισχύει πάντα. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι η συνθήκη για την ανεξαρτησία της κατάταξης των τεχνικών με το cost

²¹⁹ Όταν μάλιστα οι τεχνικές είναι γειτονικές, τότε πρέπει να ισχύει αφενός και αφετέρου:

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}s_k \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}s_k, \forall k \neq j$$

$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}s_j \geq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}s_j$. Ας δούμε τι συμβαίνει με ένα απλό παράδειγμα 2x2:

Έστω οι μήτρες:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} a^{(a)}_{11} & a^{(a)}_{12} \\ a^{(a)}_{21} & a^{(a)}_{22} \end{bmatrix}, A^{(b)} = \begin{bmatrix} a^{(b)}_{11} & a^{(b)}_{12} \\ a^{(b)}_{21} & a^{(b)}_{22} \end{bmatrix}, \ell^{(a)} = [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2], \ell^{(b)} = [\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2]$$

Επιπλέον ισχύει:

$$a^{(a)}_{i1} = a^{(b)}_{i1}, \ell^{(a)}_1 = \ell^{(b)}_1, \text{ κατά συνέπεια οι δύο τεχνικές είναι γειτονικές και μη διασπώνες.}$$

Εφαρμόζουμε την σχέση (12) με βάση τα παραπάνω δεδομένα:

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^{(b)}_{11} & a^{(b)}_{12} \\ a^{(b)}_{21} & a^{(b)}_{22} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^{(a)}_{11} & a^{(a)}_{12} \\ a^{(a)}_{21} & a^{(a)}_{22} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ορίζουμε σαν } B^{(i)}(r) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^{(i)}_{11} & a^{(i)}_{12} \\ a^{(i)}_{21} & a^{(i)}_{22} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} b^{(i)}_{11} & b^{(i)}_{12} \\ b^{(i)}_{21} & b^{(i)}_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b^{(b)}_{11} & b^{(b)}_{12} \\ b^{(b)}_{21} & b^{(b)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b^{(a)}_{11} & b^{(a)}_{12} \\ b^{(a)}_{21} & b^{(a)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Για την διαδικασία παραγωγής 1.

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b^{(b)}_{11} & b^{(b)}_{12} \\ b^{(b)}_{21} & b^{(b)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b^{(a)}_{11} & b^{(a)}_{12} \\ b^{(a)}_{21} & b^{(a)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell^{(b)}_1 b^{(b)}_{11} + \ell^{(b)}_2 b^{(b)}_{21} \geq \ell^{(a)}_1 b^{(a)}_{11} + \ell^{(a)}_2 b^{(a)}_{21} \Leftrightarrow$$

$$\ell^{(b)}_2 b^{(b)}_{21} \geq \ell^{(a)}_2 b^{(a)}_{21}$$

Για την διαδικασία παραγωγής 2.

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b^{(b)}_{11} & b^{(b)}_{12} \\ b^{(b)}_{21} & b^{(b)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b^{(a)}_{11} & b^{(a)}_{12} \\ b^{(a)}_{21} & b^{(a)}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell^{(b)}_1 b^{(b)}_{12} + \ell^{(b)}_2 b^{(b)}_{22} \geq \ell^{(a)}_1 b^{(a)}_{12} + \ell^{(a)}_2 b^{(a)}_{22}$$

Βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα διανύσματα $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ και

$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ πρέπει να είναι αυστηρώς ή έστω κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους

Με άλλα λόγια στην περίπτωση αυτή μια σχέση διάταξης μεταξύ των δύο διανυσμάτων θα ισχύει πάντα δηλαδή θα είναι αυστηρώς κατά τάξη ή απολύτως συγκρίσιμα μεταξύ τους.

minimization criterion είναι ίδια με αυτή του w-r κριτηρίου. Κατά συνέπεια στην περίπτωση αυτή το w-r και το cost minimization ταυτίζονται²²⁰.

Στην περίπτωση όμως οι τεχνικές δεν είναι γειτονικές, κανένας οικονομικός λόγος δεν υπάρχει, για τον οποίο η συνθήκη (12) θα ισχύει σε κάθε περίπτωση. Είναι μάλλον περισσότερο συχνό η (12) να έχει την μορφή (σχέση διάταξης):

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1} \quad (12)$$

Με άλλα λόγια είναι δυνατόν τα διανύσματα $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ και $\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}$ να μην μπορούν να συγκριθούν.

Όμως εξ' ορισμού με cost minimization criterion, συγκρίνονται πάντα γειτονικές τεχνικές παραγωγής, οπότε κατά συνέπεια ο οποιοσδήποτε διαχωρισμός μεταξύ των περιπτώσεων γειτονικών και μη τεχνικών είναι άνευ σημασίας και τίθεται αυτομάτως εκτός συζήτησης.

3.7.2 ΔΙΑΣΠΩΜΕΝΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Έστω οι τεχνικές $[A^{(.)}, \ell^{(.)}]$, με $(.)=a,b$. Όπου:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(a)} & A_{12}^{(a)} \\ 0 & A_{22}^{(a)} \end{bmatrix} A^{(b)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(b)} & A_{12}^{(b)} \\ 0 & A_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \text{ και } \ell^{(a)} = [\ell_{I}^{(a)} \quad \ell_{II}^{(a)}], \ell^{(b)} = [\ell_{I}^{(b)} \quad \ell_{II}^{(b)}]$$

Υποθέτουμε εφεξής²²¹ ότι:

$$A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)} \quad (13)$$

$$\ell^{(a)} = \ell^{(b)} = [\ell_I \quad \ell_{II}] \quad (14)$$

Κατά συνέπεια για τα διανύσματα τιμών των δύο τεχνικών ισχύουν:

Για το βασικό υποσύστημα:

²²⁰ Το τελευταίο είναι μάλλον γνωστό στην βιβλιογραφία. Βλ. Γ. Σταμάτης (1989)

²²¹ Για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε, ότι κάθε υποσύστημα παράγει μόνο ένα εμπόρευμα, κατά συνέπεια τα A_{ij} είναι βαθμωτά

$$p_I^{(.)} = p_I^{(.)} A_{11}^{(.)} (1+r) + w^{(.)} \ell_I \Leftrightarrow p_I^{(.)} = w^{(.)} \ell_I [I - A_{11}^{(.)} (1+r)]^{-1}, (.) = a, b \quad (15)$$

Ενώ για το μη βασικό υποσύστημα:

$$p_{II}^{(.)} = p_I^{(.)} A_{12}^{(.)} (1+r) + p_{II}^{(.)} A_{22}^{(.)} (1+r) + w^{(.)} \ell_{II} \Leftrightarrow$$

$$p_{II}^{(.)} = (p_I^{(.)} A_{12}^{(.)} (1+r) + w^{(.)} \ell_{II}) [I - A_{22}^{(.)} (1+r)]^{-1}, (.) = a, b \quad (16)$$

Οι δύο τεχνικές δύνανται να διαφέρουν κατά μια διαδικασία παραγωγής ενός βασικού ή ενός μη βασικού εμπορεύματος. Κατά συνέπεια δύναται να ισχύει:

- Οι δύο τεχνικές διαφέρουν στην διαδικασία παραγωγής ενός μη βασικού εμπορεύματος.

Υποθέτουμε ότι

$$A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)} \quad (17)$$

$$A_{11}^{(a)} = A_{11}^{(b)} \quad (18)$$

όπως προείπαμε οι δύο τεχνικές παράγουν τα ίδια βασικά εμπορεύματα. Για τα βασικά εμπορεύματα ισχύει:

$$p_I^{(b)} d = p_I^{(b)} A_I^{(a)} y_I (1+\bar{r}) + w^{(b)} \ell_I^{(a)} y_I \Leftrightarrow p_I^{(b)} y_I = w^{(b)} \ell_I^{(a)} [I - A_{11}^{(a)} (1+\bar{r})]^{-1} y_I$$

$$w^{(b)} \ell_I^{(b)} [I - A_{11}^{(b)} (1+r)]^{-1} = w^{(b)} \ell_I^{(a)} [I - A_{11}^{(a)} (1+\bar{r})]^{-1} y_I$$

$$\ell_I^{(b)} [I - A_{11}^{(b)} (1+\bar{r})]^{-1} y_I = \ell_I^{(a)} [I - A_{11}^{(a)} (1+\bar{r})]^{-1} y_I \quad (19)$$

Έστω ότι:

$$(1) \quad A_{22}^{(a)} < A_{22}^{(b)} \quad (20)$$

Κατά συνέπεια για τα μη βασικά εμπορεύματα ισχύει:

$$(p_I^{(b)} A_{12}^{(b)} (1+r) + w^{(b)} \ell_I^{(b)}) [I - A_{22}^{(b)} (1+r)]^{-1} y_{II} \geq (p_I^{(b)} A_{12}^{(a)} (1+r) + w^{(b)} \ell_I^{(a)}) [I - A_{22}^{(b)} (1+r)]^{-1} y_{II}$$

λόγω των (1) και (2):

$$(p_I^{(b)} A_{12}^{(b)} (1+r)) [I - A_{22}^{(b)} (1+r)]^{-1} - [I - A_{22}^{(a)} (1+r)]^{-1} y_{II} \geq w^{(b)} \ell_{II}^{(a)} \{ [I - A_{22}^{(a)} (1+r)]^{-1} - [I - A_{22}^{(b)} (1+r)]^{-1} \} y_{II} \quad (21)$$

όπου , και λόγω της (5)

$$C_1 \equiv \{[I - A_{22}^{(b)}(1+r)]^{-1} - [I - A_{22}^{(a)}(1+r)]^{-1}\} > 0 \quad (22)$$

$$C_2 \equiv [I - A_{22}^{(b)}(1+r)]^{-1} - [I - A_{22}^{(b)}(1+r)]^{-1} < 0 \quad (23) \text{όποτε η (22) γίνεται}$$

$$[p_I^{(b)} A_{12}^{(b)}(1+r)]C_1 y_{II} \geq w^{(b)} \ell_{II}^{(a)} C_2 y_{II} \quad (24)$$

Όμως το ζητούμενο είναι η σχέση αυτή να ισχύει για κάθε y . Με άλλα λόγια η κατάταξη να είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση με άλλα λόγια να ισχύει:

$$[p_I^{(b)} A_{12}^{(b)}(1+r)]C_1 \geq w^{(b)} \ell_{II}^{(a)} C_2 \quad (25), \text{ όπου λόγω της (21) γίνεται:}$$

$$w^{(b)} \ell_I [I - A_{11}^{(b)}(1+r)]^{-1} A_{12}^{(b)}(1+r)]C_1 \geq w^{(b)} \ell_{II}^{(a)} C_2 \Leftrightarrow$$

$$\ell_I [I - A_{11}^{(b)}(1+r)]^{-1} A_{12}^{(b)}(1+r)]C_1 \geq \ell_{II}^{(a)} C_2 \quad (26)$$

Είδαμε ότι, στα γειτονικά μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής η κατάταξη δεν μεταβάλλεται με την τυποποίηση. Αντίθετα στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής μεταβάλλεται.

Έστω οι ακόλουθες δύο διαφορετικές τυποποιήσεις:

$$[p_I \quad p_{II}] \begin{bmatrix} y_I \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (27)$$

$$[p_I \quad p_{II}] \begin{bmatrix} 0 \\ y_{II} \end{bmatrix} = 1 \quad (28)$$

Στην περίπτωση της τυποποίησης με την (27) ισχύει για την κατάταξη των τεχνικών σύμφωνα με το cost minimization criterion, η (7):

$$\ell_I^{(b)} [I - A_{11}^{(b)}(1+r)]^{-1} y_I = \ell_I^{(a)} [I - A_{11}^{(a)}(1+r)]^{-1} y_I$$

Με άλλα λόγια η κεντρικός καπιταλιστής, είναι αδιάφορος ως προς την χρησιμοποίηση της τεχνικής (α) ή της τεχνικής (β).

Αν όμως αντίθετα τυποποιήσει με την (28) ισχύει μάλλον η (14) όπου η (α) είναι η ελαχιστοποιούσα το κόστος τεχνική, και κατά συνέπεια και εκείνη που χρησιμοποιείται:

Είδαμε λοιπόν ότι στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής, η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση, αδιάφορο αν οι τεχνικές είναι γειτονικές ή μη.

Είναι γεγονός, ότι η χρήση του cost minimization criterion είναι αρκετά περιορισμένη, καθώς δεν γίνεται να χρησιμοποιηθεί σε μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής, ή σε τεχνικές σύνθετης παραγωγής, ανεξάρτητα δε αν είναι γειτονικές ή μη.

3.8 Το θεώρημα της Μη Υποκατάστασης (Non Substitution Theorem)

3.8.1 Η αρχική εκδοχή του Non Substitution theorem

Η αρχική εκδοχή του Non Substitution theorem, ανήκει στον P.Samuelson²²², του οποίου τις βασικές προϋποθέσεις παρουσιάζουμε παρακάτω.

1. Παράγονται n εμπορεύματα μέσω n διαδικασιών παραγωγής. Η ακαθάριστη εκροή κάθε διαδικασίας παραγωγής (x_i) χωρίζεται σε τελική ζήτηση (C_i) και στα μέσα παραγωγής που προορίζονται για την αντικατάσταση των φθαρέντων μέσων παραγωγής ($\sum_{j=1}^n x_{ji}$). Κατά συνέπεια ορίζεται η σχέση²²³:

$$x_i = C_i + \sum_{j=1}^n x_{ji} \quad (1)$$

2. Υπάρχει μόνο μια μη αναπαραγόμενη εισροή και δεν είναι άλλη από την εργασία, η οποία αποτελεί το $(n+1)^{\circ}$ εμπόρευμα (μη αναπαραγόμενο) του συστήματος παραγωγής για το οποίο ισχύει:

$$x_{n+1} = 0 + \sum_{i=1}^n x_{n+1,i} \quad (2)$$

3. Ο ανταγωνισμός και η ύπαρξη της μη αναπαραγόμενης εισροής εργασίας, εξασφαλίζει την μη υποκατάσταση των εισροών μεταξύ τους. Επιπλέον διατυπώνεται με σαφήνεια από τον Samuelson η απουσία σύνθετης παραγωγής. Κατά συνέπεια το Non Substitution Theorem του Samuelson έχει εφαρμογή μόνο στην περίπτωση της απλής παραγωγής.

²²² P.Samuelson(1951)

²²³ Θέλοντας να μείνουμε πιστοί στον συμβολισμό του P.Samuelson, έχουν αντιστραφεί οι διαστάσεις του συστήματος έτσι αντί για x_{ij} μιλάμε πλέον για x_{ji} , όπου σαν x_{ji} ορίζεται η ποσότητα του εμπορεύματος j που εισέρχεται άμεσα σαν μέσο παραγωγής στην διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος i .

4. Εισάγεται μια συνάρτηση παραγωγής ομογενής πρώτου βαθμού, για κάθε εμπόρευμα x_i ²²⁴:

$$x_i = F_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n+1}) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει:

$$C_i = F_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n+1}) - \sum_{j=1}^n x_{ji} \quad (4)$$

Ο Samuelson στηρίζει το Non Substitution Theorem, σε όρους γενικής ισορροπίας. Η ισχύς του θεωρήματος της μη Υποκατάστασης μπορεί να βρεθεί από την λύση του ακόλουθου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, για την διαδικασία παραγωγής ενός εμπορεύματος, έστω του 1:

$$\begin{aligned} \max C_1 &= F_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1,n+1}) - \sum_{j=1}^n x_{j1} \\ \text{s.t. } C_i &= F_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n+1}) - \sum_{j=1}^n x_{ji} \\ -x_{n+1} &= -\sum_{i=1}^n x_{n+1,i} \end{aligned} \quad (5)$$

Βάσει όλων των παραπάνω ο P. Samuelson διατυπώνει το ακόλουθο θεώρημα²²⁵:

«Ανεξάρτητα από τις δεδομένες τιμές των $C_2, C_3, \dots, C_{n,n+1}$, οι βέλτιστοι συντελεστές της παραγωγής, θα συνεπάγονται πάντα τις ίδιες σταθερές αξίες και το προκύπτον πρόγραμμα παραγωγής για την κοινωνία θα είναι της απλής παραγωγής»

Με άλλα λόγια σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ανεξάρτητα από την τελική ζήτηση, η επιλεγείσα τεχνική θα είναι αυτή που προκύπτει από το παραπάνω

²²⁴ Η ύπαρξη Σταθερών Αποδόσεων Κλίμακας, σε συνδιασμό με την ομοιγένια της σχέσης (3) και την

ύπαρξη απλής παραγωγής συνεπάγεται ότι, $a_{ji} = \frac{x_{ji}}{x_i}$ και κατά συνέπεια ισχύει για την (3):

$1 = F_i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,n+1})$, δηλαδή σε γενικές γραμμές μια μορφή της γραμμικής συνάρτησης παραγωγής, όπως αυτήν την ξέρουμε σήμερα

²²⁵ P.Samuelson (1961) σελ 143

πρόγραμμα μεγιστοποίησης. Κατ' επέκταση οποιαδήποτε αλλαγή στην τελική ζήτηση δεν θα έχει καμία επίπτωση ούτε στην επιλογή της τεχνικής, αλλά ούτε και στην μορφή της συνάρτησης παραγωγής, αφού όπως ξεκάθαρα υποστηρίζει ο Samuelson, αυτή θα είναι πάντοτε γραμμική.

3.8.2 Η οπτική του N.Salvadori

Στην συνέχεια παρουσιάζεται η εκδοχή του N. Salvadori²²⁶, όπως την παρουσιάζει στο New Palgrave, όπου κάνει τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. Υπάρχει μόνο μία μη πρωταρχική (μη αναπαραγόμενη) εισροή η εργασία
2. Όλες οι διαδικασίες παραγωγής υπόκεινται σε Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας, είναι πλήρως διαχωρίσιμες, έχοντας την ίδια περίοδο παραγωγής. Η προϋπόθεση αυτή είναι συνώνυμη με την απουσία σύνθετης παραγωγής (non joint production case)
3. Κάθε διαδικασία παράγει ένα τέλεια διαχωρίσιμο εμπόρευμα, χρησιμοποιώντας δεδομένες ποσότητες εισροών (η προϋπόθεση 2 μαζί με την 3 μας οδηγεί στην αποκλειστική χρήση μιας γραμμικής τεχνικής απλής παραγωγής).
4. Για κάθε εμπόρευμα υπάρχει τουλάχιστον μία διαδικασία που το παράγει (εισάγεται με τον τρόπο αυτό η δυνατότητα επιλογής τεχνικής).
5. Η εργασία είναι απαραίτητη εισροή για κάθε διαδικασία παραγωγής, ήτοι καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι αυτοματοποιημένη.
6. Η ανταλλαγή των εμπορευμάτων γίνεται στο τέλος της περιόδου παραγωγής, με άλλα λόγια δεν μιλάμε για ενδιάμεσες εισροές²²⁷
7. Μια διαδικασία χρησιμοποιείται μόνο αν αυτή είναι ελαχιστοποιούσα το κόστος παραγωγής

Βάσει όλων των παραπάνω σύμφωνα με το Non Substitution Theorem ισχύει:

- a) Καμία διαδικασία δεν μπορεί να αποφέρει υπερκέρδη για δεδομένες τιμές παραγωγής (έστω p) και δεδομένο ποσοστό κέρδους (έστω w)

²²⁶ N. Salvadori (1987)

²²⁷ Για τον όρο ενδιάμεσες εισροές βλ. Γ.Σταμάτη σελ

- b) Για κάθε ένα παραγόμενο εμπόρευμα υπάρχει τουλάχιστον μια παραγωγική διαδικασία παραγωγής που το παράγει
- c) Οι εν λόγω παραγωγικές διαδικασίες παραγωγής μπορούν να παράξουν κάθε καθαρό προϊόν (έστω d , το οποίο στα γραμμικά υποδείγματα παραγωγής, αντιπροσωπεύει και την τελική ζήτηση).

Βάσει των παραπάνω το Non Substitution Theorem εξασφαλίζει ότι:

- a) Εάν η καθαρή εκροή είναι ίση με $d' \neq d$, τότε οι τιμές p και το ονομαστικό ωρομίσθιο w , εξακολουθούν να είναι τα ισχύοντα διανύσματα τιμών παραγωγής και το ονομαστικό ωρομίσθιο, ισοροπίας αντίστοιχα
- b) Εάν υπάρχουν παραπάνω τις μία λύσης τότε τα διανύσματα τιμών παραγωγής και το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι ίσα μεταξύ των δύο τεχνικών.

Σε μαθηματικούς όρους ο N.Salvadori, υποθέτει την ύπαρξη δύο τεχνικών, της $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και της $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$.

Για τα διανύσματα τιμών των δύο τεχνικών παραγωγής ισχύει:

Για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(a)} \quad (5)$$

Ενώ για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

$$p^{(a)} = p^{(b)} A^{(b)} (1+r) + w^{(b)} \ell^{(b)} \quad (6)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και από την προϋπόθεση (7) συνεπάγεται:

$$p^{(a)} \leq p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)} \quad (7)$$

$$p^{(b)} \leq p^{(b)} A^{(a)} (1+r) + w^{(b)} \ell^{(a)} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) καθώς και από τις (1) και (2)

$$p^{(a)} \leq \frac{w^{(a)}}{w^{(b)}} p^{(b)} \quad (9) \text{ και}$$

$$p^{(b)} \leq \frac{w^{(b)}}{w^{(a)}} p^{(a)} \quad (10)$$

Και από τις σχέσεις (5) και (6):

$$p^{(a)} = \frac{w^{(a)}}{w^{(b)}} p^{(b)} \quad (10)$$

Τυποποιώντας κατά τον Salvadori με $w^{(.)} = 1, (.) = a, b$ αποδυνκνύεται και το Non Substitution Theorem, ότι δηλαδή²²⁸:

$$p^{(a)} = p^{(b)} \quad (11)$$

Μία ακόμα διατύπωση του Non Substitution Theorem γίνεται και από τους H.D.Kurz κ N.Salvadori²²⁹, η οποία κινείται στο ίδιο μήκος κύματος με την παραπάνω.

3.8.3 Η εκδοχή των N.Salvadori και H.D.Kurz

Στο εν λόγω άρθρο οι συγγραφείς, επαναδιατυπώνουν το Non-substitution Theorem και αποδεικνύουν ένα σχετικό θεώρημα που θα παρουσιαστεί παρακάτω.

3.8.3.1 Παρουσίαση του Υποδείγματος

Ενδεικτικά αναφέρουμε τις υποθέσεις του Υποδείγματος²³⁰:

1. Υπάρχει μόνο μια πρωτογενής εισροή (μη αναπαραγώμενη), η εργασία
2. Η παραγωγή είναι απλή

²²⁸ Το παραπάνω αποτελεί την απόδειξη του N.Salvadori, για την περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, και με τυποποίηση $w^{(.)} = 1, (.) = a, b$ ωστόσο όπως θα δούμε παραπάνω η ισχύς του Non Substitution Theorem εξαρτάται και από την τυποποίηση των τιμών.

²²⁹

²³⁰ Στην εκδοχή του άρθρου τους οι Kurz και Salvadori, υποθέτουν ότι το ενιαίο ποσοστό κέρδους είναι ίσο με την μονάδα και ο υλικός ρυθμός μεγέθυνσης είναι μικρότερος από την μονάδα. Με άλλα λόγια ισχύει η εξίσωση του Cambridge: $g=sr$

3. Παράγονται n εμπορεύματα μέσω n διαδικασιών παραγωγής²³¹, δηλαδή η τεχνική παραγωγής είναι του τύπου *a la Srafa- Leontief*.
 4. Την παραγωγή την χαρακτηρίζουν φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας
- Βάση όλων των παραπάνω έχουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (1).

$$p[B - (1+r)A] \leq w\ell \quad (1.1)$$

$$p[B - (1+r)A]x = w\ell x \quad (1.2)$$

$$[B - (1+g)]x \geq d \quad (1.3)$$

$$p[B - (1+g)A]x = pd \quad (1.4)$$

$$p \geq 0, x \geq 0, w \geq 0, pq = 1 \quad (1.5)$$

,όπου κατά τα γνωστά $A, A \geq 0$ η $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών, ℓ το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία, d το $n \times 1$ διάνυσμα της σύνθεσης της κατανάλωσης, p το $1 \times n$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής. Τέλος τα βαθμωτά w, r, g παριστούν το ενιαίο ονομαστικό ωρομίσθιο, το ποσοστό κέρδους και τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης αντίστοιχα.

Κατά τα άλλα, η σχέση (1.1) είναι η συνθήκη ότι η χρησιμοποιούμενη τεχνική είναι *cost minimizing*

Η σχέση (1.2) και μάλιστα λόγω της (1.5) εξασφαλίζει, ότι όταν μια διαδικασία παραγωγής, δεν μπορεί να αποδώσει το ζητούμενο ποσοστό κέρδους, τότε δεν χρησιμοποιείται.

Η συνθήκη (1.3) εξασφαλίζει, ότι η ζήτηση ικανοποιείται και κατά συνέπεια προκύπτει, ότι κατά Bidard, πρόκειται όντως για μια τεχνική παραγωγής²³².

Η σχέση (1.4) βάζει στο υπό εξέτασιν μοντέλο τα *free goods*.

Τέλος η σχέση (1.5) δεν είναι τίποτε άλλο, από την γνωστή τυποποίηση των τιμών, με $q, q \geq 0$, ένα $n \times 1$ τυχαίο διάνυσμα.

Βάση των παραπάνω μπορούμε να διατυπώσουμε το *Non- Substitution Theorem* όπως το παρουσιάζει ο H. Varian:

²³¹ Στην εκδοχή των Kurz και Salvadori, έχουμε την ύπαρξη ενός διτομεακού υποδείγματος, με την ύπαρξη δυο εναλλακτικών διαδικασιών παραγωγής, μια για κάθε τομέα.

²³² Βλ. Christian Bidard, Ο αλγόριθμος της αγοράς

«Υποθέστε ότι υπάρχει μόνο μια μη (ανα)παραγόμενη εισροή, η οποία είναι απαραίτητη στην παραγωγή, ότι δεν υπάρχει σύνθετη παραγωγή και ότι την τεχνολογία την χαρακτηρίζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Υποθέτουμε ότι το (x, y, w) είναι μια κατά Walras ισορροπία, με $y_i > 0$. Τότε το w είναι η μοναδική λύση στο $C_i(w)y_i$, για $i=1, 2, \dots, n$.».

Οι Kurz και Salvadori από την άλλη το διατυπώνουν ως εξής²³³:

Έστω (p^*, w^*, x^*) και (p^0, w^0, x^0) δύο λύσεις του συστήματος (1) για δεδομένο r .

Το Non-Substitution Theorem, εξασφαλίζει ότι $p^* = p^0$ και $w^* = w^0$. Εάν το d είναι ημιθετικό το θεώρημα εξασφαλίζει, ότι οι τιμές των εμπορευμάτων που παράγονται είναι οι ίδιες και στις δύο λύσεις.

Ακολουθώντας τον συλλογισμό των Kurz και Salvadori, υποθέτουμε την ύπαρξη των εναλλακτικών τεχνικών (A^*, ℓ^*) και (A^0, ℓ^0) .

Στην συνέχεια οι Kurz και Salvadori ορίζουν μαθηματικά τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- A. Το εμπόρευμα j εισέρχεται άμεσα στην παραγωγή του εμπορεύματος i εάν και μόνο εάν:

$$e_j A^* e_i > 0^{234}$$

- B. Το εμπόρευμα j εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα στην παραγωγή του εμπορεύματος i εάν και μόνο εάν:

$$e_j (A^* + A^{*2} + \dots + A^{*n}) e_i > 0$$

- C. Ένα εμπόρευμα j είναι βασικό εάν και μόνο εάν:

$$(A^* + A^{*2} + \dots + A^{*n}) e_j > 0$$

- D. Ομοίως λέμε, ότι η εργασία εισέρχεται άμεσα και έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων της τεχνικής (A^*, ℓ^*) εάν και μόνο εάν

$$\ell(A^* + A^{*2} + \dots + A^{*n}) > 0$$

²³³ Βλ. Kurz και Salvadori, The Non-Substitution Theorem: Making Good a Lacuna, σελ. 99

²³⁴ Όπου $e_i, e_i \geq 0$ το μοναδιαίο διάνυσμα, του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι μηδενικές, πλην της j -οστής που είναι ίση με την μονάδα.

Βάσει των παραπάνω οι Kurz και Salvadori διατυπώνουν το ακόλουθο θεώρημα²³⁵:

Θεώρημα: Έστω (p^*, w^*, x^*) και (p^0, w^0, x^0) δύο λύσεις του συστήματος (1) για δεδομένο r , και έστω (A^*, ℓ^*) και (A^0, ℓ^0) οι αντιστοιχούσες τεχνικές. Εάν η εργασία εισέρχεται άμεσα η έμμεσα στην παραγωγή όλων των εμπορευμάτων και στις δύο τεχνικές, τότε υπάρχει ένα εμπόρευμα j το οποίο είναι βασικό και για τις δύο τεχνικές, τότε $p^* = p^0$ και $w^* = w^0$.

3.8.4 Το Non-substitution Theorem μια γενικευμένη προσέγγιση

Η συνήθης νεοκλασική θεωρία συνδέει την επιλογή τεχνικής με διάφορες οικονομικές μεταβλητές, όπως είναι η ένταση κεφαλαίου, η ζήτηση για εμπορεύματα και κεφαλαιουχικά αγαθά η παραγωγικότητα κ.α..

Ωστόσο η επιλογή τεχνικής, δείχνει να σχετίζεται περισσότερο με τις μεταβλητές της κατανομής του εισοδήματος.

Η παραδοσιακή μέχρι τις αρχές του 1960 νεοκλασική θεωρία, ήθελε την επιλογή της εκάστοτε τεχνικής, να συναρτάται από τα αρχικά αποθέματα (σε Μέσα Παραγωγής και εμπορεύματα) και από την σύνθεση της ζήτησης.

Σύμφωνα με το σκεπτικό αυτό, μια μεταβολή της ζήτησης ανάμεσα και περισσότερο ή λιγότερο εντατικά σε κεφάλαιο εμπορεύματα, θα σήμαινε την ίδια στιγμή μία μεταβολή στις τιμές παραγωγής και κατά συνέπεια μια μετατόπιση στην επιλογή της τεχνικής παραγωγής, σε περισσότερο ή λιγότερο εντατικές σε κεφάλαιο τεχνικές.

Συνεπώς οι νεοκλασικοί οικονομολόγοι, μέσω του θεωρήματος της μη υποκατάστασης, κατάφεραν να βρουν ένα «κριτήριο» για την επιλογή της τεχνικής, σε όρους του cost minimization criterion, το οποίο όμως θα ήταν ανεξάρτητο από τις μεταβολές της ζήτησης, και θα εξαρτιόνταν μόνο από τεχνολογικούς παράγοντες²³⁶.

²³⁵ Βλ. Kurz και Salvadori, The Non-Substitution Theorem: Making Good a Lacuna, σελ. 100

²³⁶ Βέβαια αυτό που έκαναν στην πραγματικότητα ήταν να παρουσιάσουν ένα υπόδειγμα, στο οποίο οι τιμές παραγωγής θα ήταν ανεξάρτητες από μια μεταβολή στην ζήτηση των παραγόμενων εμπορευμάτων. Με άλλα λόγια μια μεταβολή της ζήτησης από ένα πιο εντατικό σε κεφάλαιο εμπόρευμα, σε ένα λιγότερο εντατικό, θα είχε ως αποτέλεσμα μια πτώση στην ζήτηση για τον συντελεστή παραγωγής κεφάλαιο και μια πιθανή ταυτόχρονη αύξηση στην αμοιβή του συντελεστή

Όμως κάτι τέτοιο για τους νεο-Ρικαρδιανούς και συγκεκριμένα για τον L.Passinetti η επιλογή της τεχνικής έχει γίνει, από την στιγμή που έχει δοθεί εξωγενώς το ποσοστό κέρδους και δη ανεξάρτητα από την σύνθεση της ζήτησης.

Με άλλα λόγια η υποκατάσταση μεταξύ των εισροών δεν έχει να κάνει με μεταβολές της ζήτησης²³⁷ αλλά περισσότερο με μεταβολές στην κατανομή του εισοδήματος και στο τυπικό εμπόρευμα.

Οι υποθέσεις του Non-Substitution Theorem είναι οι εξής:

- Υπάρχουν n διαδικασίες, που παράγουν n αγαθά
- Δεν υπάρχει σύνθετη παραγωγή, και συνεπώς από κάθε μια από τις n διαδικασίες εξέρχεται ένα μόνο αγαθό.
- Υπάρχει μόνο μια μη (ανα)παραγόμενη εισροή στην παραγωγή, η εργασία.
- Η εργασία είναι απαραίτητη εισροή σε κάθε μια από τις n διαδικασίες παραγωγής. Με άλλα λόγια καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι αυτοματοποιημένη. Ως εκ τούτου το διάνυσμα των εισροών σε ομοιογενή ζωντανή εργασία είναι θετικό.
- Την τεχνολογία την χαρακτηρίζουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Σύμφωνα με το Non-Substitution Theorem, οι τιμές καθορίζονται με τον εξωγενή προσδιορισμό του ποσοστού κέρδους, το οποίο φυσικά πρέπει να βρίσκεται εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών. Κατά συνέπεια υπάρχει, εντός του πεδίου αυτού, μια τεχνική που ελαχιστοποιεί το κόστος σε όρους εργασιακής δύναμης ή μεγιστοποιεί το ονομαστικό ωρομίσθιο σε όρους ενός οποιοδήποτε τυπικού εμπορεύματος²³⁸, $u, u \geq 0$ ή numeraire²³⁹.

παραγωγής εργασία, με μια ταυτόχρονη μετάβαση από διαδικασίες παραγωγής υψηλής έντασης κεφαλαίου σε διαδικασίες παραγωγής με χαμηλότερη. Κάτι τέτοιο ωστόσο δεν ισχύει στην περίπτωση του Non Substitution Theorem, καθώς δεν υπάρχει υποκατάσταση των μεθόδων παραγωγής και κατά συνέπεια οι τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι ανεξάρτητες από την μεταβολή της ζήτησης.

²³⁷ Στα πλαίσια των γραμμικών συστημάτων παραγωγής, μια αλλαγή στην ζήτηση ισοδυναμεί με μια μεταβολή του τυπικού εμπορεύματος. Ο εξωγενής καθορισμός του τυπικού εμπορεύματος, όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι και αυτός που σε τελευταία ανάλυση καθορίζει ποια προϊόντα θα παραχθούν και σε ποια ποσότητα.

²³⁸ Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί, ότι ο όρος του τυπικού εμπορεύματος συμπίπτει με αυτόν της τελικής ζήτησης της οικονομίας. Από την βιβλιογραφία (Γ.Σταμάτης, 1995 σελ. 178), γνωρίζουμε ότι το καθαρό προϊόν του υποσυστήματος (το οποίο και αποτελεί την τελική ζήτηση της οικονομίας) συμπίπτει με αυτό του ακαθάριστου προϊόντος του τυπικού υποσυστήματος.

Με άλλα λόγια για δυο τεχνικές a και b , δύναται να ισχύει

$$p^a u \geq p^b u \text{ (2) ή}$$

$$p^a u = p^b u \text{ (3) ή}$$

$$p^a u \leq p^b u \text{ (4)}$$

Όμως δεν αρκεί μόνο ο εξωγενής προσδιορισμός του ποσοστού κέρδους για τον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής. Ο προσδιορισμός των τιμών παραγωγής δεν είναι μονοσήμαντος καθώς εξαρτάται και από την τυποποίηση των τιμών και από τις μεταβλητές του εισοδήματος.

Η γενική ισχύ του Non-Substitution Theorem είναι ισοδύναμη με την ισχύ των σχέσεων:

$$\left. \begin{array}{l} p^a u \geq p^b u \\ p^a u = p^b u \\ p^a u \leq p^b u \end{array} \right\} \forall u, u \geq 0 \text{ (5)}$$

Στην συνέχεια εξετάζεται σε ποιες περιπτώσεις δύναται να (μην) ισχύει το Non-Substitution Theorem. Κατά συνέπεια διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

3.8.4.1 Η $A(B)$ είναι μη διασπώμενη

Για το σύστημα τιμών της κάθε τεχνικής προκύπτει για $w^{(a)} = w^{(b)} = 1$:

Αρχικά για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)} (1+r) + \ell^{(a)} \text{ (1)}$$

Και για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

$$p^{(b)} = p^{(b)} A^{(b)} (1+r) + \ell^{(b)} \text{ (2)}$$

Στην συνέχεια οι δύο τεχνικές τυποποιούνται καθ' ίδιον τρόπο:

$$p^{(a)} u = p^{(b)} u = c, c > 0 \text{ (3)}$$

,όπου u ένα τυχαίο θετικό ή ημιθετικό διάνυσμα στήλης που παριστά ένα τυχαίο τυπικό εμπόρευμα.

Επομένως οι (1) και (2) γίνονται λόγω της (3):

$$p^{(a)}u = p^{(a)}A^{(a)}u(1+r) + \ell^{(a)}u \Leftrightarrow p^{(a)}u = \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \quad (4)$$

$$p^{(b)}u = p^{(b)}A^{(b)}u(1+r) + \ell^{(b)}u \Leftrightarrow p^{(b)}u = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (5)$$

Κατά συνέπεια από τις σχέσεις

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (6)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (7)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (8)$$

Ωστόσο για να ισχύει το Θεώρημα της μη Υποκατάστασης ανεξάρτητα από την τυποποίηση, με άλλα λόγια δηλαδή να ισχύει για κάθε τυχαία επιλεγμένο τυπικό εμπόρευμα, πρέπει να ισχύει:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (9)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (10)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (11)$$

Από τις (6), (7), (8) προκύπτει ότι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ανεξαρτησία του Non Substitution Theorem από την τυποποίηση είναι τα διανύσματα $\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}$ και $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}$, να είναι αυστηρώς ή τουλάχιστον κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Στην συνέχεια εξετάζονται οι εξής περιπτώσεις.

3.8.4.2 Μη διασπώμενες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Από τις παραπάνω συνθήκες (9) και (11) βλέπουμε, ότι στην περίπτωση των γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής τα διανύσματα $\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}$ και

$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}$ είναι κατά τάξη συγκρίσιμα, καθώς έχουν τα $n-1$ στοιχεία κοινά και διαφέρουν κατά το $n^{\text{οστο}}$ στοιχείο. Αντίθετα στην περίπτωση της συνθήκης (10) τα δύο διανύσματα είναι ίσα. Μαθηματικά ειπωμένα ισχύουν διαζευκτικά:

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i = [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i, i=1...n-1 \quad (12)$$

Και ταυτόχρονα:

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \geq [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (13)$$

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n = [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (14)$$

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \leq [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (15)$$

Ομοίως η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την περίπτωση των μη διασπόμενων γειτονικών τεχνικών γίνεται:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_i = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_i, i=1...n-1 \quad (16)$$

Και διαζευκτικά:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (17)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (18)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (19)$$

Με άλλα λόγια σε κάθε περίπτωση, ήτοι για κάθε τυπικό εμπόρευμα, τα διανύσματα $[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i = [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i$, θα είναι ίσα και η διαφορά τους κατά συνέπεια θα είναι ένα μηδενικό διάνυσμα. Τέλος λόγω των σχέσεων (21)-(23) θα δύνανται να διαφέρουν καθ' οποιοδήποτε τρόπο.

3.8.4.3 Μη γειτονικές μη διασπόμενες τεχνικές απλής παραγωγής

Στις μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής από την άλλη τα πράγματα είναι διαφορετικά. Το Non Substitution Theorem εξαρτάται από την τυποποίηση των τιμών, και μόνο από σύμπτωση μπορεί να είναι ανεξάρτητο από αυτήν. Ας δούμε το γιατί:

Από τα διανύσματα τιμών της κάθε τεχνικής, α και β προκύπτει;

$$p^{(a)}u = p^{(a)}A^{(a)}u(1+r) + \ell^{(a)}u \Leftrightarrow p^{(a)}u = \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \quad (20)$$

$$p^{(b)}u = p^{(b)}A^{(b)}u(1+r) + \ell^{(b)}u \Leftrightarrow p^{(b)}u = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (21)$$

Κατά συνέπεια από τις σχέσεις (20)-(21)

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (22)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (23)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u \quad (24)$$

Και στην περίπτωση αυτή, για να ισχύει το Θεώρημα της μη Υποκατάστασης ανεξαρτητά από την τυποποίηση, με άλλα λόγια δηλαδή να ισχύει για κάθε τυχαία επιλεγμένο τυπικό εμπόρευμα, πρέπει να ισχύει:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (25)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (26)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (27)$$

Όμως είναι αυτονόητο ότι στην περίπτωση των μη γειτονικών μη διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής, κανένας λόγος δεν υπάρχει, ώστε τα διανύσματα $\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}$ και $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}$ να είναι μεταξύ τους απολύτως ή τουλάχιστον κατά τάξη συγκρίσιμα. Με άλλα λόγια, είναι αδύνατον να ισχύει μία από τις καταστάσεις των σχέσεων (16)-(23). Με άλλα λόγια δύναται να ισχύει για μια δεδομένη τυποποίηση με $u, u \geq 0$ είτε:

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i = [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_i, i=1...n-1 \quad (28)$$

Και ταυτόχρονα:

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \geq [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (29)$$

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n = [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (30)$$

$$[\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \leq [\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}u]e_n \quad (31)$$

Είτε η :

$$\left. \begin{array}{l} p^a u > p^b u \\ p^a u = p^b u \\ p^a u < p^b u \end{array} \right\} \forall u, u \geq 0 \quad (32)$$

Ομοίως η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την περίπτωση των μη διασπώμενων μη γειτονικών τεχνικών γίνεται:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_i = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_i, i=1...n-1 \quad (33)$$

Και διαζευκτικά:

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (34)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (35)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}e_n \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}e_n \quad (36)$$

Είτε φυσικά διαζευκτικά :

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} > \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad \text{ή} \quad (37)$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (38) \quad \text{ή}$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} < \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \quad (39)$$

Όμως οι συνθήκες (37)-(39) ξέρουμε από την βιβλιογραφία, ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύουν στην γενική περίπτωση, αφού είναι απολύτως δυνατόν τα διανύσματα

$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}$ και $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}$ να μην είναι ούτε κατά τάξη συγκρίσιμα, με άλλα λόγια να ισχύουν καταστάσεις όπως (διαζευκτικά πάντα):

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \underset{\leq}{\geq} \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \text{ ή (40)}$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \underset{\leq}{\geq} \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \text{ ή (41)}$$

$$\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1} \underset{\leq}{\geq} \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1} \text{ (42)}$$

3.8.4.4 Διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής

3.8.4.4.1 Διασπώμενες μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Έστω ότι η $A^{(i)}, i = a, b$ είναι της μορφής $A^{(i)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ και $\ell = [\ell_I, \ell_{II}]$.

Για το σύστημα τιμών της κάθε τεχνικής προκύπτει:

Αρχικά για την τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$

$$(1) \quad p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)}(1+r) + w^{(a)} \ell^{(a)}$$

Και για την τεχνική $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

$$(2) \quad p^{(b)} = p^{(b)} A^{(b)}(1+r) + w^{(b)} \ell^{(b)}$$

Η λύση που προκύπτει για κάθε μια από τις δύο παραπάνω σχέσεις είναι:

$$(3) [p_I, p_{II}]^{(i)} [y_I, y_{II}]^T = [\ell_I, \ell_{II}]^{(i)} \begin{bmatrix} B_{11}(r) & B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ 0 & B_{22}(r) \end{bmatrix} [y_I, y_{II}]^T, (i) = a, b,$$

$$\text{όπου, } B_{11}(r) \equiv [I - A_{11}(1+r)]^{-1} \\ B_{22}(r) \equiv [I - A_{22}(1+r)]^{-1}$$

Από τις συνθήκες (1) έως (3) προκύπτει:

$$(4) \quad p^a u \geq p^b u \text{ ή}$$

$$(5) \quad p^a u = p^b u \text{ ή}$$

$$(6) \quad p^a u \leq p^b u$$

Και όμοια από την σχέση (3) προκύπτει:

$$(7) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u$$

$$(8) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u$$

$$(9) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}u \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}u$$

Βάσει των παραπάνω θα ελέγξουμε για δύο διαφορετικές τυποποιήσεις αν η σχέση διάταξης μεταξύ των τιμών, μεταβάλλεται. Συνεπώς θα ελέγξουμε αν στην περίπτωση των διασπόμενων τεχνικών παραγωγής η διάταξη των τιμών μεταβάλλεται με την τυποποίηση:

$$3.8.4.4.1.1 \text{ .Τυποποίηση με την } [p_I, p_{II}][y_I, 0]^T = 1$$

Από τις (3),(4),(5) και (6) προκύπτει για labor commanded prices²⁴⁰:

$$(10) \quad \ell^{(a)} {}_I B_{11}^{(a)} y_I \geq \ell^{(b)} {}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(11) \quad \ell^{(a)} {}_I B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(b)} {}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(12) \quad \ell^{(a)} {}_I B_{11}^{(a)} y_I \leq \ell^{(b)} {}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει ό,τι και στις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής, αφού οι μήτρες $A_{11}^{(.)}$ και κατ' επέκταση οι $B_{11}^{(.)}$ είναι μη διασπώμενες.

Επομένως η σχέση διάταξης μεταξύ των διανυσμάτων τιμών παραγωγής των εν λόγω τεχνικών μεταβάλλεται καθ' όμοιο τρόπο και για τους ίδιους λόγους με τις μη διασπώμενες μήτρες.

240 Όπου $R_i = \frac{1 - \lambda_{\max}^{A_{ij}^{(.)}}}{\lambda_{\max}^{A_{ij}^{(.)}}}$, όπου $i=I,II, j=1,2, (.)=a,b$

Επιπλέον στην περίπτωση της διασπώμενης παραγωγής μεταβάλλονται και τα μέγιστα ποσοστά κέρδους, με την τυποποίηση. Το τελευταίο επηρεάζει και αυτό το οικονομικά σημαντικό πεδίο τιμών που παίρνουν οι τιμές παραγωγής. Κατά συνέπεια για να είναι η κατάταξη των διανυσμάτων τιμών παραγωγής ανεξάρτητη από την τυποποίηση πρέπει να ισχύει:

$$(13) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} \geq \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)}$$

$$(14) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} = \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)}$$

$$(15) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} \leq \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)}$$

Με άλλα λόγια για να έχει οικονομικό νόημα θα πρέπει τα διανύσματα $\ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)}$ και $\ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)}$ να είναι απολύτως ή τουλάχιστον κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους, πράγμα που όπως είδαμε παραπάνω δεν είναι δυνατόν να ισχύει στην γενική περίπτωση.

3.8.4.4.2 Τυποποίηση με την $[p_I, p_{II}] [0, y_{II}]^T = 1$

Η μεταβολή της τυποποίησης έχει σαν αποτέλεσμα την μεταβολή των μέγιστων ποσοστών κέρδους για κάθε τεχνική. Έστω λοιπόν ότι μεταβάλλονται ως εξής:

$$(16) \quad R_I^{(a)} > R_I^{(b)}$$

$$(17) \quad R_{II}^{(b)} < R_{II}^{(a)}$$

Κατά συνέπεια $R^{(a)} > R^{(b)}$

Ωστόσο η μεταβολή αυτή των μεγίστων ποσοστών κέρδους έχει σαν αποτέλεσμα και την μεταβολή της κατάταξης των τιμών παραγωγής των εν λόγω τεχνικών. Κατά συνέπεια ισχύει διαζευκτικά:

$$(18) \quad [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(a)} > [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$(19) \quad [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(a)} > \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(b)} [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)}$$

$$(20) \quad [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(a)} > \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r) \\ B_{22}(r) \end{bmatrix}^{(b)} [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)}$$

Με άλλα λόγια και στην περίπτωση αυτή η δεν υπάρχει κανένας λόγος να ισχύουν οι σχέσεις κατάταξης των σχέσεων (4)-(6). Ως εκ τούτου για τα διανύσματα των σχέσεων (18)-(20) κανένας λόγος δεν υπάρχει ώστε αυτά να είναι μεταξύ τους απολύτως ή έστω κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

3.8.4.5 Διασπώμενες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής

Στα διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής όταν οι τεχνικές είναι γειτονικές, σε αντίθεση με τις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής, η κατάταξη των τιμών παραγωγής των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

Έστω οι τεχνικές:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}^{(a)} \end{bmatrix}, A^{(b)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}^{(b)} \end{bmatrix}, \ell^{(a)} = \ell^{(b)} = [\ell_I, \ell_{II}]$$

Επομένως οι τεχνικές $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$ διαφέρουν μόνο κατά το στοιχείο A_{22} . Για λόγους απλούστευσης θα υποθέσουμε ότι οι υπομήτρες είναι απλά βαθμωτά. Δηλαδή:

$$A_{11} = A_{11}^{(a)} = A_{11}^{(b)} = a_{11}$$

$$A_{12} = A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)} = a_{12}$$

$$A_{22}^{(\cdot)} = a_{22}^{(\cdot)}, (\cdot) = a, b$$

Έτσι στην τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο αποτελούν και τις ιδιοτιμές της μήτρας $A^{(\cdot)}$.

Όμοια με το Γ.Σταματης (1994β) υποθέτουμε ότι:

$$(21) \quad 1 > \lambda_m^{A_{22}^{(b)}} > \lambda_m^{A_{11}^{(a)}} = \lambda_m^{A_{11}^{(b)}} > \lambda_m^{A_{22}^{(a)}} \text{ και}$$

$$(22) \quad 0 < R_{II}^{(b)} < R_I^{(a)} = R_I^{(b)} R_{II}^{(a)}$$

Τυποποιώντας τις τιμές με την (7) προκύπτει για τα διανύσματα $\ell^{(a)} B_{11}^{(a)} y_I$ και $\ell^{(b)} B_{11}^{(b)} y_I$

Επομένως ισχύει:

$$(23) \quad \ell^{(a)} B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(a)} \frac{1}{a_{11}^{(a)}(1+r)} y_I \text{ και}$$

$$(24) \quad \ell^{(b)} B_{11}^{(b)} y_I = \ell^{(a)} \frac{1}{a_{11}^{(b)}(1+r)} y_I$$

Όμως από τις προϋποθέσεις ξέρουμε ότι:

$$(25) \quad \ell^{(a)} = \ell^{(b)} = [\ell_I, \ell_{II}] \text{ και}$$

$$(26) \quad a_{11}^{(a)} = a_{11}^{(b)}$$

Επομένως για $0 \leq r < R_I$ οι δύο τεχνικές είναι ισάξιες (εξίσου κερδοφόρες).

Αν τώρα γίνει τυποποίηση με την (18) προκύπτει:

$$(27) \quad \ell^{(a)} \left[\frac{\frac{1}{1-a_{11}^{(a)}(1+r)} a_{12}^{(a)}(1+r) \frac{1}{1-a_{22}^{(a)}(1+r)}}{\frac{1}{1-a_{22}^{(a)}(1+r)}} \right] y_{II} \text{ και}$$

$$(28) \quad \ell^{(b)} \left[\frac{\frac{1}{1-a_{11}^{(b)}(1+r)} a_{12}^{(b)}(1+r) \frac{1}{1-a_{22}^{(b)}(1+r)}}{\frac{1}{1-a_{22}^{(b)}(1+r)}} \right] y_{II}$$

Όμως αφού

$$(29) \quad a_{22}^{(a)} \neq a_{22}^{(b)}$$

Και πιο συγκεκριμένα $a_{22}^{(a)} < a_{22}^{(b)}$ η τεχνική α είναι περισσότερο κερδοφόρα από την Β. Πρόκειται δηλαδή για μια κατάσταση εκ διαμέτρου αντίθετη από την παραπάνω.

Κατά συνέπεια στην διασπώμενη απλή παραγωγή ακόμα και όταν οι τεχνικές είναι γειτονικές η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με το τυπικό εμπόρευμα.

3.9 Πότε το w-r κριτήριο και το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους συμπίπτουν

Όπως είδαμε παραπάνω το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους δεν συμπίπτει πάντοτε με αυτό του w-r κριτηρίου.

Τόσο με το w-r κριτήριο, όσο και με το cost minimization criterion η τυποποίηση των τιμών μεταβάλλει και την κατάταξη των εν λόγω τεχνικών. Με άλλα λόγια μια cost minimizing τεχνική μπορεί να μην οδηγεί στο μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο. Το τελευταίο μπορεί να φαίνεται οξύμωρο ωστόσο δύναται να συμβεί.

Στην παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τις οποίες το w-r κριτήριο και το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους θα συμπίπτουν.

3.9.1 Η περίπτωση της μη διασπώμενης απλής παραγωγής

Υπενθυμίζουμε τι δύναται να ισχύει διαζευκτικά σύμφωνα με το w-r κριτήριο:

$$(30) \quad w^{(a)} < w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

$$(31) \quad w^{(a)} = w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες}$$

$$(32) \quad w^{(a)} > w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

Για να συμπίπτουν τα 2 κριτήρια πρέπει ταυτόχρονα να ισχύουν αντίστοιχα και οι σχέσεις:

$$p^{(a)} \geq p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)} \quad (33)$$

$$p^{(a)} = p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)} \quad (34)$$

$$p^{(a)} \leq p^{(a)} A^{(b)} (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)} \quad (35)$$

Τροποποιώντας ελαφρά τις σχέσεις (4)-(5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} p^{(a)} d &\geq w^{(b)} \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d \Leftrightarrow \\ \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d &\geq \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d \end{aligned} \quad (36)$$

Και αντιστοίχως:

$$\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d = \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d \quad (37)$$

$$\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d \leq \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d \quad (38)$$

Αν τροποποιήσουμε και τις σχέσεις (1)-(3) θα πάρουν την μορφή:

$$(39) \quad \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d > \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d$$

$$(40) \quad \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d = \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d$$

$$(41) \quad \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^*)]^{-1} d < \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^*)]^{-1} d$$

Και αν υποθέσουμε επιπλέον²⁴¹ ότι οι τεχνικές είναι γειτονικές οι σχέσεις (39)-(40) θα γίνουν:

²⁴¹ $\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+\bar{r})]^{-1} s_k \geq \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+\bar{r})]^{-1} s_k, \forall k \neq j$

$\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+\bar{r})]^{-1} s_j \geq \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+\bar{r})]^{-1} s_j$. Ας δούμε τι συμβαίνει με ένα απλό παράδειγμα 2x2:

Έστω οι μήτρες:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} a^{(a)}_{11} & a^{(a)}_{12} \\ a^{(a)}_{21} & a^{(a)}_{22} \end{bmatrix}, A^{(b)} = \begin{bmatrix} a^{(b)}_{11} & a^{(b)}_{12} \\ a^{(b)}_{21} & a^{(b)}_{22} \end{bmatrix}, \ell^{(a)} = [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2], \ell^{(b)} = [\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2]$$

$$(42) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

$$(43) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

$$(44) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι στην περίπτωση των γειτονικών τεχνικών οι σχέσεις (38)-(40) και (42)-(44), το τελευταίο αποδεικνύει ότι στην περίπτωση των γειτονικών τεχνικών και για την ίδια τυποποίηση τα κριτήρια του cost minimization και του w-r κριτηρίου συμπίπτουν.

Επιπλέον ισχύει:

$a_{i1}^{(a)} = a_{i1}^{(b)}$, $\ell_{i1}^{(a)} = \ell_{i1}^{(b)}$, κατά συνέπεια οι δύο τεχνικές είναι γειτονικές και μη διασπώνες.

Εφαρμόζουμε την σχέση (12) με βάση τα παραπάνω δεδομένα:

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^{(b)} & a_{12}^{(b)} \\ a_{21}^{(b)} & a_{22}^{(b)} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^{(a)} & a_{12}^{(a)} \\ a_{21}^{(a)} & a_{22}^{(a)} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ορίζουμε σαν } B^{(i)}(r) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{bmatrix} (1+r) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} \\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(b)} & b_{12}^{(b)} \\ b_{21}^{(b)} & b_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(a)} & b_{12}^{(a)} \\ b_{21}^{(a)} & b_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

Για την διαδικασία παραγωγής 1.

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(b)} & b_{12}^{(b)} \\ b_{21}^{(b)} & b_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(a)} & b_{12}^{(a)} \\ b_{21}^{(a)} & b_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell^{(b)}_1 b_{11}^{(b)} + \ell^{(b)}_2 b_{21}^{(b)} \geq \ell^{(a)}_1 b_{11}^{(a)} + \ell^{(a)}_2 b_{21}^{(a)} \Leftrightarrow$$

$$\ell^{(b)}_2 b_{21}^{(b)} \geq \ell^{(a)}_2 b_{21}^{(a)}$$

Για την διαδικασία παραγωγής 2.

$$[\ell^{(b)}_1 \quad \ell^{(b)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(b)} & b_{12}^{(b)} \\ b_{21}^{(b)} & b_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq [\ell^{(a)}_1 \quad \ell^{(a)}_2] \begin{bmatrix} b_{11}^{(a)} & b_{12}^{(a)} \\ b_{21}^{(a)} & b_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ell^{(b)}_1 b_{12}^{(b)} + \ell^{(b)}_2 b_{22}^{(b)} \geq \ell^{(a)}_1 b_{12}^{(a)} + \ell^{(a)}_2 b_{22}^{(a)}$$

Βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα διανύσματα $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ και $\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}$ πρέπει να είναι αυστηρώς ή έστω κατά τάξη συγκρίσιμα μεταξύ τους

Με άλλα λόγια στην περίπτωση αυτή μια σχέση διάταξης μεταξύ των δύο διανυσμάτων θα ισχύει πάντα δηλαδή θα είναι αυστηρώς κατά τάξη ή απολύτως συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση των μη διασπώμενων γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής τόσο η ισοδυναμία των κριτηρίων, όσο και η ανεξαρτησία της κατάταξης των τεχνικών-τυπικών υποσυστημάτων από την τυποποίηση των τιμών, είναι δεδομένη. Και ο λόγος είναι ότι τα διανύσματα $\ell^{(i)}[I - A^{(i)}(1+r^*)]^{-1}, (i) = a, b$ είναι εξ' ορισμού κατά τάξιν συγκρίσιμα αφού ανήκουν σε γειτονικές τεχνικές.

3.9.2 Η περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων παραγωγής

Και στην περίπτωση αυτή μπορεί να ισχύει διαζευκτικά για το w-r κριτήριο:

(45) $w^{(a)} < w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

(46) $w^{(a)} = w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

(47) $w^{(a)} > w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

Από την άλλη πλευρά για το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους πρέπει να ισχύει προκειμένου να είναι ισοδύναμα:

$$(48) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d \geq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

$$(49) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d = \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

$$(50) \quad \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r^*)]^{-1}d \leq \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r^*)]^{-1}d$$

Ωστόσο στην περίπτωση της διασπώμενης παραγωγής είναι δυνατόν να συμβαίνουν καταστάσεις όπως:

1. Οι δυο τεχνικές να διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός βασικού εμπορεύματος και να τυποποιούνται με αυτό
2. Οι δύο τεχνικές να διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός βασικού εμπορεύματος και να μην τυποποιούνται με αυτό
3. Οι δυο τεχνικές να διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός μη βασικού εμπορεύματος και να τυποποιούνται με αυτό
4. Οι δύο τεχνικές να διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός μη βασικού εμπορεύματος και να μην τυποποιούνται με αυτό

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε ξεχωριστά και τις τρεις περιπτώσεις:

3.9.2.1 Οι δυο τεχνικές να διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός βασικού εμπορεύματος και να τυποποιούνται με αυτό

Έστω ότι η $A^{(i)}, i = a, b$ είναι της μορφής $A^{(i)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ και $\ell = [\ell_I, \ell_{II}]$.

Κατά συνέπεια για το w-r κριτήριο ισχύουν διαζευκτικά οι:

(51) $w^{(a)} < w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

(52) $w^{(a)} = w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

(53) $w^{(a)} > w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

Οι σχέσεις (22)-(24) παίρνουν την μορφή και αφού τυποποιηθούν με $[p_I, p_{II}] [y_I, 0]^T = 1$:

$$(54) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I > \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(55) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(56) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I < \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

Στην περίπτωση των διασπόμενων συστημάτων απλής παραγωγής ισχύει, ο υποδείκτης I,II υποδηλώνει το βασικό ή το μη βασικό υποσύστημα αντίστοιχα. Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι ισχύει ότι και στις μη διασπόμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Οι αντίστοιχες σχέσεις ώστε το κριτήριο ελαχιστοποίησης του κόστους να είναι ισοδύναμο με το w-r είναι.

$$(57) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I > \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(58) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(59) \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} y_I < \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} y_I$$

Αυτές οι σχέσεις όντως είναι ισοδύναμες καθώς τα διανύσματα $\ell^{(i)}_I B^{(i)}_{11} y_I, i = a, b$ είναι όντως κατά τάξη συγκρίσιμα²⁴².

3.9.2.2 Οι δυο τεχνικές διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός βασικού εμπορεύματος και δε τυποποιούνται με αυτό

Κατά συνέπεια για το w-r κριτήριο ισχύουν διαζευκτικά οι:

$$(60) \quad w^{(a)} < w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

$$(61) \quad w^{(a)} = w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες}$$

$$(62) \quad w^{(a)} > w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

²⁴² Το τελευταίο μπορεί όντως να αποδειχτεί, αν υποθέσουμε, ότι, η τεχνική α διαφέρει από την τεχνική β κατά την τεχνική j, η οποία παράγει ένα βασικό εμπόρευμα. Λόγω της μη διασπασιμότητας των μητρών $A^{(.)}_{11}$, κάθε εμπόρευμα είναι βασικά, έχοντας βέβαια τυποποιήσει με y_I . Κατά συνέπεια οι σχέσεις (28)-(30), θα πάρουν την μορφή:

$$1 \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_j > \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_j$$

$$2 \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_j = \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_j$$

$$3 \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_j < \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_j$$

Ενώ ταυτόχρονα θα ισχύουν οι :

$$\beta \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_i = \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_i$$

$$\beta \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_i = \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_i, \quad \forall i \neq j$$

$$\beta \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} s_i = \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} s_i$$

Κατά συνέπεια οι τεχνικές, ως γειτονικές, θα διαφέρουν μόνο κατά την διαδικασία παραγωγής της τεχνικής j.

Οι σχέσεις (22)-(24) παίρνουν την μορφή και αφού τυποποιηθούν με $[p_I, p_{II}][0, y_{II}]^T = 1$ και όπως δείξαμε στην περίπτωση του w-r κριτηρίου στην περίπτωση αυτή ισχύει²⁴³:

$$[\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \geq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)} \quad (63)$$

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε, ότι στην περίπτωση των γειτονικών συστημάτων απλής παραγωγής, που το τυπικό εμπόρευμα, δεν περιλαμβάνει το εμπόρευμα, κατά την διαδικασία του οποίου, διαφέρουν οι δύο τεχνικές, κανένας λόγος δεν υπάρχει ένεκα του οποίου οι δύο τεχνικές μπορούν να συγκριθούν, αφού

Οι αντίστοιχες σχέσεις ώστε το κριτήριο ελαχιστοποίησης του κόστους να είναι ισοδύναμο με το w-r είναι.

$$(64) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \geq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$(65) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} = [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$(66) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \leq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

Όμως κανένας οικονομικός λόγος δεν υπάρχει ώστε να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις. Στην περίπτωση δηλαδή, που δεν τυποποιούνται με το εμπόρευμα κατά το οποίο διαφέρουν οι δύο τεχνικές, τα δύο κριτήρια δεν είναι ισοδύναμα²⁴⁴.

²⁴³ Βλ. Γ. Σταμάτης 1994β σελ 32

²⁴⁴ Έστω ότι στην 2x2 περίπτωση ισχύει:

$$\text{Για } w^{(a)} < w^{(b)}$$

Για το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους η αντίστοιχη συνθήκη όταν είναι τα κριτήρια ισοδύναμα είναι η :

$$\begin{aligned} p^{(b)} &\leq p^{(a)}A^{(a)}(1+r) + w^{(b)}\ell^{(a)} \Leftrightarrow \\ p^{(b)} &\leq w^{(b)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1} \Leftrightarrow \\ w^{(b)}\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}y_{II} &\leq w^{(b)}\ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}y_{II} \Leftrightarrow \\ \ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}y_{II} &\leq \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}y_{II} \end{aligned}$$

3.9.2.3 Οι δυο τεχνικές διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός μη βασικού εμπορεύματος και τυποποιούνται με αυτό

Κατά συνέπεια για το w-r κριτήριο ισχύουν διαζευκτικά οι:

$$(67) \quad w^{(a)} < w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

$$(68) \quad w^{(a)} = w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες}$$

$$(69) \quad w^{(a)} > w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

Οι σχέσεις (22)-(24) παίρνουν την μορφή και αφού τυποποιηθούν με $[p_I, p_{II}][0, y_{II}]^T = 1$ και όπως δείξαμε στην περίπτωση του w-r κριτηρίου στην περίπτωση αυτή ισχύει²⁴⁵:

$$[\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \geq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)} \quad (70)$$

$$[\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} = [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)} \quad (71)$$

$$[\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \leq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)} \quad (72)$$

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε, ότι στην περίπτωση των γειτονικών συστημάτων απλής παραγωγής, που το τυπικό εμπόρευμα, περιλαμβάνει το εμπόρευμα, κατά την

Είπαμε ωστόσο ότι διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός βασικού εμπορεύματος, έστω j, αλλά τυποποιούνται με ένα καλάθι μη βασικών εμπορευμάτων ισχύει δηλαδή κατά συνέπεια:

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}s_j < \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}s_j \text{ αλλά ταυτόχρονα ισχύει:}$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}s_i = \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}s_i \text{ αν οι τιμές τυποποιηθούν με ένα μη βασικό εμπόρευμα τότε η σχέση (I) θα πάρει την μορφή:}$$

$$\ell^{(b)}[I - A^{(b)}(1+r)]^{-1}y_{II} = \ell^{(a)}[I - A^{(a)}(1+r)]^{-1}y_{II}$$

Είδαμε λοιπόν, ότι υπό προϋποθέσεις τα δύο κριτήρια δεν μπορεί να είναι ισοδύναμα, ενώ δηλαδή σύμφωνα με το w-r κριτήριο στην περίπτωση μας επιλέγεται η τεχνική (β) σύμφωνα με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους οι δύο τεχνικές είναι ισοδύναμες.

²⁴⁵ Βλ. Γ. Σταμάτης 1994β σελ 32

διαδικασία του οποίου, διαφέρουν οι δύο τεχνικές μπορούν να συγκριθούν, αφού διαφέρουν στην παραπάνω περίπτωση μόνο κατά το στοιχείο $B_{22}^{(.)}$

Οι αντίστοιχες σχέσεις ώστε το κριτήριο ελαχιστοποίησης του κόστους να είναι ισοδύναμο με το w-r είναι.

$$(73) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \geq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$(74) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} = [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$(75) [\ell_I, \ell_{II}]^{(a)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(a)} \leq [\ell_I, \ell_{II}]^{(b)} \begin{bmatrix} B_{11}(r)(1+r)A_{12}B_{22}(r)y_{II} \\ B_{22}(r)y_{II} \end{bmatrix}^{(b)}$$

Στην περίπτωση αυτή οι δύο σχέσεις μπορούν να συγκριθούν, καθώς διαφέρουν μόνο κατά το στοιχείο $B_{22}^{(.)}$ και ως εκ τούτου, η φορά των σχέσεων (44)-(46) μας εγγυώνται ότι στην περίπτωση αυτή, τα δύο κριτήρια συμπίπτουν.

Οι δυο τεχνικές διαφέρουν κατά την διαδικασία ενός μη βασικού εμπορεύματος και δεν τυποποιούνται με αυτό

Κατά συνέπεια για το w-r κριτήριο ισχύουν διαζευκτικά οι:

$$(76) \quad w^{(a)} < w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

$$(77) \quad w^{(a)} = w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες}$$

$$(78) \quad w^{(a)} > w^{(b)}, \text{ στην περίπτωση αυτή η τεχνική } b \text{ είναι περισσότερο κερδοφόρα}$$

Οι σχέσεις (76)-(78) παίρνουν την μορφή και αφού τυποποιηθούν με $[p_I, p_{II}] [y_I, 0]^T = 1$:

$$(79) \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} y_I > \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} y_I$$

$$(80) \quad \ell^{(a)}_I B^{(a)}_{11} y_I = \ell^{(b)}_I B^{(b)}_{11} y_I$$

$$(81) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I < \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

Στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής ισχύει, ο υποδείκτης I,II υποδηλώνει το βασικό ή το μη βασικό υποσύστημα αντίστοιχα. Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι ισχύει ότι και στις μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Οι αντίστοιχες σχέσεις ώστε το κριτήριο ελαχιστοποίησης του κόστους να είναι ισοδύναμο με το w-r είναι.

$$(82) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I > \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(83) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

$$(84) \quad \ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I < \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I$$

Όμως εξ ορισμού οι τεχνικές είναι γειτονικές τεχνικές οι οποίες διαφέρουν κατά μια διαδικασία j, ενός μη βασικού εμπορεύματος. Κατά συνέπεια $\ell_I^{(a)} = \ell_I^{(b)}$ και $B_{11}^{(a)} = B_{11}^{(b)}$. Το τελευταίο σημαίνει ότι σύμφωνα τόσο με το w-r κριτήριο, όσο και με κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους, οι δύο τεχνικές είναι πάντοτε ισοδύναμες²⁴⁶. Επομένως ισχύει μόνο η σχέση:

$$\ell^{(a)}_I B_{11}^{(a)} y_I = \ell^{(b)}_I B_{11}^{(b)} y_I \quad (85)$$

3.9.2.4 Συμπεράσματα

Είδαμε παραπάνω, ότι το w-r κριτήριο και το κριτήριο ελαχιστοποίησης του κόστους δεν είναι γενικά ισοδύναμα.

Το w-r είναι ένα κριτήριο κερδοφορίας ενώ το cost minimization criterion, ένα κριτήριο «φθηνίας». Σε αντίθεση με το cost minimization criterion το w-r κριτήριο έχει ένα ευρύτερο φάσμα χρησιμοποίησης. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τεχνικές

²⁴⁶ Μάλιστα και σύμφωνα με τον Passinetti (1991) όταν δύο τεχνικές διαφέρουν κατά την διαδικασία παραγωγής, ενός μη βασικού εμπορεύματος και τυποποιούνται με ένα βασικό εμπόρευμα ή με ένα καλάθι βασικών εμπορευμάτων τότε οι δύο αυτές τεχνικές, είναι ισοδύναμες.

απλής ή σύνθετης παραγωγής²⁴⁷, σε γειτονικές ή μη τεχνικές, καθώς και σε διασπώμενες ή μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής. Επιπλέον όσο αφορά το w-r κριτήριο ξέρουμε ότι μπορεί να συγκριθεί ένας οποιοσδήποτε αριθμός τεχνικών παραγωγής.

Από την άλλη πλευρά όπως είπαμε το cost minimization criterion, έχει ένα περιορισμένο φάσμα εφαρμογών. Είδαμε ότι με το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους είναι δυνατόν να συγκριθούν ανά δύο γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής. Με άλλα λόγια είναι αδύνατη με το cost minimization criterion, να συγκριθούν παραπάνω από μία τεχνικές παραγωγής, και δη ανεξάρτητα αν είναι απλής ή σύνθετης παραγωγής.

Ωστόσο το ερώτημα που τίθεται είναι αφενός αν τα δύο κριτήρια όταν είναι εφικτή η χρήση τους, είναι ισοδύναμα και αφετέρου αν κανένα από τα δύο αυτά κριτήρια οδηγούν σε μια μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών. Η απάντηση στα δύο αυτά ερωτήματα δεν μπορεί να είναι γενικά θετική. Μπορεί να ισχύει μόνο εν μέρει:

Είδαμε ότι τα δύο κριτήρια μπορεί να είναι ισοδύναμα μόνο σε μη διασπώμενες γειτονικές τεχνικές παραγωγής και στην περίπτωση διασπώμενων τεχνικών παραγωγής μόνο στην ειδική περίπτωση που στο τυπικό εμπόρευμα περιέχεται το εμπόρευμα κατά την διαδικασία παραγωγής του οποίου διαφέρουν οι δύο τεχνικές.

Όμως δεν πρέπει να υπάρχει σύγχυση μεταξύ της ισοδυναμίας των κριτηρίων και της μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών. Τόσο στην κατάταξη σύμφωνα με το w-r κριτήριο, όσο και στην κατάταξη με το cost minimization criterion, έχουν προηγουμένως τυποποιηθεί οι τιμές. Το τελευταίο όμως δεν είναι ανάξιο λόγου.

²⁴⁷ Βέβαια όπως έδειξε ο Bidard το 2000, το w-r κριτήριο δεν οδηγεί σε μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών, και στην γενική περίπτωση μάλιστα το θεωρεί λανθασμένο σελ. 90-92. Και ο Γ. Σταμάτης στην απάντηση του για το εν λόγω άρθρο του Bidard, θεωρεί ότι το w-r κριτήριο στην σύνθετη παραγωγή δεν είναι ορθό και δεν οδηγεί σε μια μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών, ωστόσο το συμπέρασμα του αυτό έρχεται να συμπληρώσει την πάγια θέση του στα Γ. Σταμάτης, σύμφωνα με το οποίο το w-r κριτήριο σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί κριτήριο μονοσήμαντης κατάταξης τεχνικών, αλλά κριτήριο κατάταξης τυπικών υποσυστημάτων.

Ο Pasinetti προσπάθησε να παρακάμψει το πρόβλημα της τυποποίησης υποστηρίζοντας²⁴⁸, ότι ο ρόλος της τυποποίησης είναι όμοιος με αυτόν μιας σταθεράς, η οποία πολλαπλασιάζεται στα δύο μέλη μιας σχέσης, και αυτόματα μπορεί να απαλείφει. Ο ουδέτερος ρόλος της εξίσωσης τυποποίησης που προσπάθησε να δώσει ο Pasinetti, όπως έδειξε ο Γ. Σταμάτης δεν ευσταθεί.

Έχει αποδειχθεί ότι τόσο το $w-r$ κριτήριο όσο και το cost minimization criterion εξαρτώνται από την τυποποίηση.

Αρχικά στην περίπτωση του $w-r$ κριτηρίου μπορούμε να συνοψίσουμε τα έως τώρα συμπεράσματα ως εξής:

1. Το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο και το μέγιστο ποσοστό κέρδους είναι δυνατόν να μεταβάλλονται με την τυποποίηση στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών παραγωγής
2. Η κλίση των $w-r$ καμπυλών μεταβάλλεται με την τυποποίηση
3. Το σχήμα των $w-r$ καμπυλών μεταβάλλεται με την τυποποίηση
4. Η σχετική θέση των $w-r$ καμπυλών μπορεί και αυτή να μεταβάλλεται με την τυποποίηση
5. Τα (re)switch points δύνανται να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται με την τυποποίηση των τιμών

Όπως είδαμε στην περίπτωση του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους εισάγονται οι απόλυτες τιμές για την σύγκριση των τεχνικών αυτών. Ωστόσο :

1. Οι απόλυτες τιμές είναι αποτέλεσμα τυποποίησης των τιμών
2. Η φορά κατάταξης των διανυσμάτων $\ell^{(i)}_I B_{11}^{(i)}$ είναι απολύτως δυνατόν να μεταβληθεί με την μεταβολή της τυποποίησης.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε, ότι τόσο το $w-r$ κριτήριο όσο και το cost minimization criterion, δεν αποτελούν κριτήρια κατάταξης και επιλογής τεχνικών αλλά κριτήρια κατάταξης και επιλογής τυπικών υποσυστημάτων.

²⁴⁸ Βλ. L.Pasinetti 1991 σελ.170

3.10 Πότε το cost minimization criterion και το Non Substitution Theorem συμπίπτουν

Αναμφισβήτητα μεταξύ του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης του κόστους και του Θεωρήματος της Μη Υποκατάστασης δείχνει να υπάρχει μία άμεση σχέση, καθώς παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες, τις οποίες θα παρουσιάσουμε και παρακάτω.

Για το cost minimization criterion επιλέγεται εκείνη η τεχνική, στις τιμές της οποίας, καμία άλλη τεχνική δεν αποφέρει υπερκέρδη για δεδομένο ποσοστό κέρδους.

Απο την άλλη στο Non-Substitution Theorem, για δεδομένη πάλι τιμή του ποσοστού κέρδους, επιλέγεται εκείνη η τεχνική, η οποία συνεπάγεται το μικρότερο διάνυσμα τιμών παραγωγής.

Απο την στοιχειώδη μικροοικονομική είναι γνωστό, ότι η τιμή ενός εμπορεύματος σε συνθήκες ανταγωνισμού ισούται με το μοναδιαίο κόστος παραγωγής του δεδομένου εμπορεύματος, το οποίο ισούται με την τιμή παραγωγής των μέσων παραγωγής (ή νεοκλασικά ειπωμένη την αμοιβή του συντελεστή παραγωγής κεφάλαιο) καθώς και απο την αμοιβή των μη αναπαραγόμενων εισροών.

Για το Θεώρημα της Μη Υποκατάστασης είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, ότι για δύο τεχνικές (α) και (β) δύναται να ισχύει:

$p^{(a)} \leq p^{(b)}$ (1.a), στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική (α) έναντι τις (β)

$p^{(a)} = p^{(b)}$ (1.b), στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι ισοδύναμες, και κατα συνέπεια οι καπιταλιστές είναι αδιάφοροι ως προς την χρήση οποιασδήποτε απο τις δύο τεχνικές

$p^{(a)} \geq p^{(b)}$ (1.c), στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική (β) έναντι τις (α)

Ας δούμε πως απο τις συνθήκες για την μη ύπαρξη υπερκερδών και επιπλέον κόστους μπορούμε να φτάσουμε σε σχέσεις όπως αυτές του Non Substitution Theorem²⁴⁹.

²⁴⁹ Είναι αυτονόητο, ότι για να έχει νόημα η σύνδεση των δύο αυτών «κριτηρίων» πρέπει η σύγκριση να αφορά μόνο γειτονικές τεχνικές. Επομένως η περίπτωση όπου συγκρίνονται δύο μη γειτονικές

Αρχικά στην περίπτωση όπου επιλέγεται η τεχνική (α) έναντι της (β) απο την συνθήκη της μη ύπαρξης υπερκερδών προκύπτει²⁵⁰:

$$\begin{aligned}
 p^{(a)} s_j &\leq p^{(a)} A^{(b)} s_j (1+r) + w^{(a)} \ell^{(b)} s_j \Leftrightarrow \\
 p^{(a)} s_j &\leq w^{(a)} \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 w^{(a)} \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r)]^{-1} s_j &\leq w^{(a)} \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r)]^{-1} s_j &\leq \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 p^{(a)} s_j &\leq p^{(b)} s_j
 \end{aligned}$$

Όπως όμως γνωρίζουμε απο την βιβλιογραφία²⁵¹ στην περίπτωση του κριτηρίου ελαχιστοποίησης του κόστους συγκρίνονται μόνο γειτονικές τεχνικές. Κατά συνέπεια ισχύει:

$$p^{(a)} s_i = p^{(b)} s_i, \forall i \neq j \quad (2)$$

Απο την τελευταία σχέση σε συνδιασμό με την σχέση (1.a-c) καταλήγουμε στην σχέση:

$$p^{(a)} \leq p^{(b)} \quad (3.a)$$

Καθ' όμοιο τρόπο προκύπτουν και σχέσεις :

$$p^{(a)} = p^{(b)} \quad (3.b) \text{ και}$$

$$p^{(a)} \geq p^{(b)} \quad (3.c)$$

τεχνικές δεν μπορεί να γίνει λόγος για ισχύ του cost minimization criterion. Ως εκ τούτου μια τέτοια τετριμμένη περίπτωση την θέτουμε εξ' αρχής εκτός συζήτησης.

²⁵⁰ Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και από την δεύτερη και ισοδύναμη συνθήκη για την ύπαρξη επιπλέον κόστους, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 p^{(b)} s_j &\geq p^{(b)} A^{(a)} s_j (1+r) + w^{(b)} \ell^{(a)} s_j \Leftrightarrow \\
 p^{(b)} s_j &\geq w^{(b)} \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 w^{(b)} \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r)]^{-1} s_j &\geq w^{(b)} \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r)]^{-1} s_j &\geq \ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r)]^{-1} s_j \Leftrightarrow \\
 p^{(b)} s_j &\geq p^{(a)} s_j
 \end{aligned}$$

²⁵¹ Βλ. Γ. Σταμάτη, G. Erreygers, Κ. Γόγολος

Μέχρι το σημείο αυτό, είδαμε πως γίνεται το Non Substitution Theorem και το Cost minimization criterion, να καταλήγουν στην ίδια κατάταξη τεχνικών. Όμως θα δούμε σε ποιές περιπτώσεις τα δύο αυτά κριτήρια συμπίπτουν. Ο G.Erreygers²⁵² υποστηρίζει ότι στην περίπτωση των απλών τεχνικών παραγωγής (χωρίς να γίνεται διαχωρισμός) συμπίπτουν. Αναφέρουμε το σχετικό κομμάτι του άρθρου του:

«To begin with, let us consider economies with single-product activities using a single non-produced resource (labour). For these economies the non-substitution theorem holds: for any given rate of profits not exceeding the maximum rate of profits, there exists only one “cost-minimizing” vector of prices which is independent of demand. Whereas the cost-minimizing price vector is always unique, it is not excluded that more than one cost-minimizing technique exists. If so, clearly the cost-minimizing techniques must all be “indifferent”: if A and B are both cost- minimizing techniques, then at the prices determined by A all the activities belonging to B have exactly the same profitability as the activities belonging to A, and vice versa. Usually indifference only occurs at “switch-points”, i.e., rates of profits which separate two intervals where only one technique is cost-minimizing... In this paper I choose to concentrate on the general case and therefore I treat the switch-cases as flukes and leave them out of consideration Keeping this in mind I can now say that, flukes apart, the non-substitution theorem implies that for any given rate of profits not exceeding the maximum rate of profits the cost- minimizing technique is unique.»

Αυτό που μας λέει ο G.Erreygers είναι ότι σε κάθε σημείο θα υπάρχει οπωσδήποτε ένα μεγιστοποιόν το ποσοστό κέρδους (και κατά συνέπεια ελαχιστοποιόν το κόστος) διάνυσμα τιμών το οποίο είναι ανεξάρτητο από την σύνθεση της ζήτησης. Όμως σαν ζήτηση μπορούμε να εκλάβουμε το καθαρό προϊόν. Όμως με την τυποποίηση είδαμε ότι εξισώνουμε την τιμή ενός εμπορεύματος ή καλαθιού εμπορευμάτων με μια θετική ποσότητα ή μια σταθερά. Το τυπικό εμπόρευμα κατά συνέπεια είναι το καθαρό προϊόν ενός υποσυστήματος που χρησιμοποιεί την ίδια τεχνική με το δεδομένο σύστημα παραγωγής. Το καθαρό προϊόν όμως αποτελεί και την ζήτηση του τυπικού υποσυστήματος. Ως εκ τούτου, ο συλογισμός του G.Erreygers, δεν ευσταθεί, καθώς έχουμε δεί, ότι ανάλογα με την τυποποίηση δύναται να αλλάζει η κατάταξη ακόμα και γειτονικών τεχνικών (στην περίπτωση βέβαια των διασπώμενων

²⁵² Βλ. Guido Erreygers (1995) σελ.145-46

συστημάτων απλής παραγωγής). Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω το Non Substitution Theorem ενδέχεται και να μην συνεπάγεται μια μονοσήμαντη κατάταξη τεχνικών σε κάθε περίπτωση, όπως ακριβώς και το cost minimization criterion.

4 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Στην έως τώρα ανάλυση μας έγινε αναφορά, στο $w-r$ κριτήριο και στο cost minimization criterion. Ένα ακόμα κριτήριο το οποίο είναι λιγότερο γνωστό είναι αυτό του αλγόριθμου της αγοράς. Η έννοια του αλγόριθμου έχει απαντηθεί αρκετές φορές στην βιβλιογραφία²⁵³.

Στα πλαίσια του αλγόριθμου της αγοράς στην γενική περίπτωση, εξετάζεται για δεδομένη τιμή του ποσοστού, ποια είναι η τεχνική, στην τιμές της οποίας, δεν προκύπτουν υπερκέρδη για καμία άλλη τεχνική²⁵⁴. Η επιλεγείσα τεχνική, για να νοείται ως τεχνική²⁵⁵, πρέπει να ικανοποιεί κάθε ύψος της ζήτησης²⁵⁶.

Πιο συγκεκριμένα για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, ορίζονται οι τιμές μιας τεχνικής (i). Στις τιμές της τεχνικής αυτής ελέγχουμε αν προκύπτουν υπερκέρδη από την χρήση μιας άλλης τεχνικής έστω (j). Σε περίπτωση που συμβαίνει αυτό, η τεχνική (i) εγκαταλείπεται και χρησιμοποιείται η τεχνική (j). Για την ίδια τιμή του ποσοστού κέρδους ορίζουμε τις τιμές παραγωγής της τεχνικής (j), και ελέγχουμε αν προκύπτουν υπερκέρδη από την χρησιμοποίηση μιας τεχνικής έστω (s). Η παραπάνω

²⁵³ Απαντάται στους Schefold, Levhari, Garegnani, Bidard, Kurz-Salvador

²⁵⁴ Όπως ορθά υποστηρίζει ο Bidard, ότι η εν λόγω διαδικασία, μοιάζει αρκετά στην νεοκλασική διαδικασία του tattonement. Και στις δύο περιπτώσεις με την δοκιμή διαφορετικών κάθε φορά τιμών, οι οποίες ανακοινώνονται από κάποια Αρχή, αναζητείται είτε η βαλρασιανή ισορροπία (στην περίπτωση των νεοκλασικών μοντέλων) είτε η κυρίαρχη τεχνική, ή όπως θα δούμε αργότερα το κυρίαρχο n -σύνολο (στην περίπτωση του αλγόριθμου του Bidard).

²⁵⁵ Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, αναζητείται μια τεχνική η οποία ικανοποιεί την ζήτηση του συστήματος (για κατανάλωση και επισώρευση). Το αν και κατά πόσον μια τυχαία συλλογή n μεθόδων παραγωγής ικανοποιεί ή όχι την εκάστοτε ζήτηση, είναι αυτό που σε τελευταία ανάλυση την ανάγει σε τεχνική. Η ομοιότητα του τελευταίου είναι εμφανής με το Non Substitution Theorem.

²⁵⁶ Η έννοια της ζήτησης εισέρχεται έμμεσα στο μοντέλο μέσω της εξίσωσης τυποποίησης. Με τον τρόπο αυτό, ορίζονται σε ποιές δραστηριότητες πρέπει να λειτουργήσουν οι επιμέρους τομείς, ώστε να παράξουν το ακαθάριστο προϊόν του τυπικού υποσυστήματος. Το ακαθάριστο προϊόν ως γνωστόν αποτελεί την συνολική ζήτηση της οικονομίας για αποσβέσεις, μισθούς και κέρδη (και κατά συνέπεια επισώρευση)

διαδικασία συνεχίζεται έως ότου, βρεθεί μια τεχνική, στις τιμές της οποίας, δεν προκύπτουν υπερκέρδη για καμία άλλη τεχνική.

Ο αλγόριθμος της αγοράς, του Bidard είναι η εφαρμογή του εν λόγω κριτηρίου στην περίπτωση τετράγωνων συστημάτων σύνθετης παραγωγής.

Αρχικά θα εξεταστεί η λειτουργία του αλγορίθμου της αγοράς στα πλαίσια της απλής παραγωγής, και εν συνεχεία στα πλαίσια της απλής παραγωγής (αλγόριθμος Bidard).

4.2 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Την λειτουργία του αλγορίθμου της αγοράς στα πλαίσια της απλής παραγωγής, πραγματεύεται αρχικά ο Levhari²⁵⁷.

Το πλαίσιο που κινείται ο Levhari είναι ένας «κόσμος» απλής παραγωγής, όπου οι μισθοί προκαταβάλλονται. Η παραγωγή είναι μη διασπώμενη και οι τιμές τυποποιούνται με τον γνωστό νεοκλασικό τρόπο:

$$w^{(.)} = 1 \quad (1)$$

Έστω οι τεχνικές $[A^{(.)}, \ell^{(.)}]$, $(.) = a, b$. Βάσει των παραπάνω για τις τιμές παραγωγής ισχύει:

$$p^{(.)} = (p^{(.)} A^{(.)} + \ell^{(.)})(1+r) \quad (2)$$

Εργαζόμενοι όπως οι Levhari- Garegnani²⁵⁸ ορίζουμε τον αλγόριθμο της επιλογής της τεχνικής ως εξής:

Από την σχέση (2) προκύπτει ότι οι τιμές είναι αύξουσα συνάρτηση του r .

Κατά συνέπεια η λειτουργία του αλγορίθμου έχει ως εξής:

Έστω μια αρχική τιμή $r = \bar{r}$ του ποσοστού κέρδους. Για αυτή την τιμή του ποσοστού κέρδους ισχύει για την τεχνική (α):

$$p^{(a)} = (p^{(a)} A^{(a)} + \ell^{(a)})(1 + \bar{r}) \quad (3)$$

²⁵⁷ D.Levhari (Feb., 1965), pp. 98-105

²⁵⁸ P.Garegnani (1966)

Στην περίπτωση του αλγορίθμου της αγοράς, εξετάζουμε ποιες διαδικασίες είναι πιο συμφέρουσες, από την άποψη του κόστους, για τους μεμονομένους καπιταλιστές. Περισσότερο τεχνικά ομιλώντας, επιλέγεται η διαδικασία εκείνη, η οποία στις τιμές οποιασδήποτε τεχνικής, επιφέρει επιπλέον κέρδη. Με άλλα λόγια:

$$p^{(a)} s_{\omega} \leq p_{\omega}^{(b)} \quad (4)$$

Για τις τιμές της τεχνικής (β) ισχύει:

$$p^{(b)} = (p^{(b)} A^{(b)} + \ell^{(b)})(1+r) \quad (5)$$

Επομένως για την δεδομένη τιμή $\bar{r}$ του ποσοστού κέρδους, και για την τιμή του εμπορεύματος της διαδικασίας ω , προκύπτει το διάνυσμα τιμών $p^{(b)}$ της τεχνικής (β) η οποία τυποποιείται από την τιμή του εμπορεύματος ω [σχέση (4)]. Οι τιμές των υπόλοιπων εμπορευμάτων ορίζονται από την σχέση (5).

Επομένως από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει:

$$p^{(a)} \leq p^{(j)}, \forall j \neq a \quad (6)$$

Δηλαδή η τεχνική (α) σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, επιλέγεται καθώς στις τιμές της οποίας δεν προκύπτουν υπερκέρδη για καμία άλλη τεχνική παραγωγής (j).

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος της αγοράς σαν κριτήριο επιλογής πλησιάζει αρκετά αυτό, της ελαχιστοποίησης του κόστους.

Ωστόσο έχουν μια σημαντική διαφορά. Ενώ στην περίπτωση του cost minimization criterion η προσέγγιση είναι μάλλον μακροοικονομική, σε αυτήν του αλγορίθμου της αγοράς, η προσέγγιση είναι μικροοικονομική²⁵⁹.

Στην περίπτωση του αλγορίθμου της αγοράς, οι τεχνικές που εξετάζονται είναι γειτονικές, κάθε φορά. Απόδειξη αυτού αποτελεί το γεγονός, ότι κάθε φορά συγκρίνεται μία και μόνο διαδικασία παραγωγής, ως προς την επίτευξη του ελαχίστου κόστους.

²⁵⁹ Το τελευταίο έχει να κάνει με το γεγονός, ότι στον αλγόριθμο της αγοράς συγκρίνονται δύο διαδικασίες παραγωγής και όχι δύο τεχνικές όπως στο w-r και στο cost minimization criterion Βλ. Π.Βουγιουκλακης (1994)

Ο Levhari μάλιστα συνοψίζοντας υποστηρίζει ότι:

«So we have proved that in each rate of interest r there exists a matrix a composed of pure activities which will minimize prices in terms of wages, or rather, maximize real wages²⁶⁰».

Στο σημείο αυτό ο Levhari υποστηρίζει ότι σε κάθε ύψος του ποσοστού κέρδους υπάρχει μία μήτρα τεχνικών συντελεστών, η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος, έχοντας τυποποιηθεί πιο πριν οι τιμές με το ονομαστικό ωρομίσθιο.

Στο σημείο αυτό ο Levhari, άθελα του παραδέχεται έμμεσα ότι η κατάταξη αυτή των τεχνικών είναι αποτέλεσμα τυποποίησης με το ονομαστικό ωρομίσθιο. Πράγμα το οποίο συμφωνεί με την πάγια θέση της παρούσας εργασίας, ότι η κατάταξη των τεχνικών, μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς, κατά Levhari, το φαινόμενο του reswitching μπορεί να εμφανιστεί για μια διαδικασία παραγωγής και όχι για την τεχνική στο σύνολο της. Το τελευταίο οφείλεται στο ότι από κατασκευής του μοντέλου (μέσω της τυποποίησης με $w=1$) οι τιμές καθίστανται γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις του ποσοστού κέρδους. Και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν να υπάρξει μια επιστροφή, κατά τον Levhari, σε μια τεχνική η οποία πιο πριν είχε αποκλειστεί ως μη ελαχιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνική²⁶¹.

Όλα τα παραπάνω θα εξεταστούν στην πράξη. Στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής και των μη διασπώμενων. Για λόγους ευκολίας θα υποθέσουμε την ύπαρξη μόνο δύο μόνο τετράγωνων τεχνικών, στις οποίες θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Levhari, που αναφέραμε παραπάνω.

²⁶⁰ Levhari (1965), σελ. 102

²⁶¹ Ο ίδιος θεωρεί πιθανή την επιστροφή σε μια διαδικασία μόνο και όχι σε μια ολόκληρη τεχνική παραγωγής

4.2.1 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΛΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Έστω οι τετράγωνες τεχνικές $[A^{(.)}, \ell^{(.)}]$, $(.) = a, b$. Σε αντίθεση με τα παραπάνω και για λόγους συμφωνίας με τα προηγούμενα υποθέτουμε ότι οι μισθοί δεν προκαταβάλλονται. Κατά συνέπεια το διάνυσμα των τιμών παραγωγής προσδιορίζεται από την σχέση:

$$p^{(.)} = p^{(.)} A^{(.)} (1+r) + w^{(.)} \ell^{(.)} \quad (7)$$

Έστω οι τιμές παραγωγής της τεχνικής a , για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω $\bar{r}$. Κατά συνέπεια:

$$p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)} (1+\bar{r}) + w^{(a)} \ell^{(a)} \quad (8)$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της αγοράς συγκρίνονται γειτονικές τεχνικές. Ως εκ τούτου εντοπίζοντας την διαδικασία παραγωγής, κατά την οποία διαφέρουν οι δύο τεχνικές, συνεπάγεται για την τεχνική αυτή έστω για την διαδικασία j :

$$p^{(a)} s_j = p^{(a)} A^{(b)} s_j (1+\bar{r}) + w^{(a)} \ell^{(a)} s_j \quad (9)$$

Από την (9) προκύπτει η τιμή του εμπορεύματος j για τιμές της τεχνικής (a) και για δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους $\bar{r}$. Η οποία τιμή καθορίζει και τις υπόλοιπες $n-1$ τιμές της τεχνικής β . οι τιμές καθορίζονται από το σύστημα:

$$p^{(b)} = p^{(b)} A^{(b)} (1+\bar{r}) + w^{(b)} \ell^{(b)} \quad (10)$$

$$p^{(b)}_j = c, c > 0 \quad (11)$$

Αυτή την διαδικασία μεταβολής των τιμών και την σύγκλιση στις τιμές της τεχνικής β περιγράφει και ο Π. Βουγιουκλάκης²⁶². Για να επιλεγεί η τεχνική β , πρέπει να ισχύει η :

$$p^{(a)} \geq p^{(b)} \quad (12)$$

²⁶² Βλ.Π. Βουγιουκλάκης (1994)

Για να ισχύει η (12) πρέπει τα δύο παραπάνω διανύσματα τιμών παραγωγής να είναι αυστηρώς κατά τάξη ή απολύτως συγκρίσιμα μεταξύ τους. Η γειτνίαση των τεχνικών σε συνδυασμό με την μη διασπασιμότητα της των τεχνικών $[A^{(a)}, \ell^{(a)}], (.) = a, b$ εξασφαλίζουν την ισχύ της (12). Όμως παραπάνω έγινε ο υπαινιγμός, ότι η κατάταξη των τεχνικών επηρεάζεται από την τυποποίηση. Παρακάτω εξετάζεται κατά πόσο το τελευταίο είναι ορθό.

Από τις σχέσεις (12) και (7) προκύπτει:

$$\frac{p^{(a)} q}{w^{(a)}} \geq \frac{p^{(b)} q}{w^{(b)}}$$

$$\ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1 + \bar{r})]^{-1} q \geq \ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1 + \bar{r})]^{-1} q, q \geq 0 \quad (13)$$

Η παραπάνω σχέση όμως δεν είναι άλλη από την συνθήκη (12). Η θετικότητα του q σε συνδυασμό με την μη διασπασιμότητα των μητρών των τεχνικών συντελεστών μας εξασφαλίζει ότι η σχέση (13) θα ισχύει για κάθε q , επομένως η κατάταξη των τεχνικών είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση. Το παραπάνω, καθώς και το πώς γίνεται η κατάταξη των τεχνικών σύμφωνα με τον αλγόριθμο είναι εύκολο να το δούμε και στην περίπτωση όπου σαν ποσοστό κέρδους παίρνουμε σαν μέγιστο ποσοστό κέρδους το:

$$R = \min[R^{(a)}, R^{(b)}] \quad (14)$$

Υποθέτουμε ότι :

$$R = R^{(b)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{\max}^{A^{(a)}} > \lambda_{\max}^{A^{(b)}} \quad (15)$$

²⁶³ Αφού είναι γνωστό ότι:

$$\begin{aligned} p^{(a)} &= p^{(a)} A^{(a)} (1 + R^{(a)}) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{1 + R^{(a)}} p^{(a)} &= p^{(a)} A^{(a)} \Rightarrow \\ \lambda_{\max}^{A^{(a)}} &= \frac{1}{1 + R^{(a)}} \end{aligned}$$

Επιπλέον από την σχέση (15) και από τα θεωρήματα του Frobenius προκύπτει ότι:

Καθώς και ότι:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A^{(b)} = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ακολουθούμε τα βήματα του αλγορίθμου της αγοράς για την εύρεση των τιμών ισορροπίας για την τιμή του ποσοστού κέρδους R . Τις τελευταίες τις συμβολίζουμε με $p^{(a)}$ ²⁶⁴.

Επομένως σύμφωνα με την (8) έχουμε:

$$p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)} (1+R) \Leftrightarrow$$

$$p^{(a)} [I - A^{(a)} (1+R)] = 0 \quad (16)$$

Από τις σχέσεις (16), (8) και (12) προκύπτει:

$$p^{(a)} [I - A^{(a)} (1+R)] \stackrel{\leq}{>} p^{(a)} [I - A^{(b)} (1+R)] \Leftrightarrow$$

$$p^{(a)} \{ [I - A^{(a)} (1+R)] - [I - A^{(b)} (1+R)] \} \stackrel{\leq}{>} 0 \Leftrightarrow$$

$$p^{(a)} \{ [I - A^{(a)} (1+R) - I + A^{(b)} (1+R)] \} \stackrel{\leq}{>} 0 \Leftrightarrow$$

$$p^{(a)} \{ [A^{(b)} - A^{(a)}] (1+R) \} \stackrel{\leq}{>} 0 \Leftrightarrow$$

Λόγω όμως της (15) ισχύει για την διαδικασία παραγωγής του εμπορεύματος (1):

$$\sum_{i=1}^2 a_{i1} > \sum_{i=1}^2 b_{i1}, \text{ με άλλα λόγια, το άθροισμα της στήλης } a_1 \text{ είναι μεγαλύτερο από αυτό της } b_1$$

²⁶⁴ Στην περίπτωση αυτή οι τιμές παραγωγής είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση καθώς είναι γνωστό ότι το δεξί και το αριστερό ιδιοδιάνυσμα μιας μήτρας είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Ως εκ τούτου στην συνέχεια και με δεδομένη την μη διασπασιμότητα των τεχνικών δεν χρειάζεται να αναφερθούμε περισσότερο στην τυποποίηση των τιμών.

$$p^{(a)} \{ [A^{(b)} - A^{(a)}](1+R) \} s_1 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0 \Leftrightarrow s_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (17)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις η (17) γίνεται:

$$\{ [b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] p_1^{(a)} + [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] p_2^{(a)} \} (1+R) \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0 (18)$$

Γνωρίζουμε ωστόσο ότι: $p^{(a)} \geq 0, (1+R) > 0$

Από την (15) ξέρουμε, ότι: το άθροισμα :

$$\begin{aligned} [b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] p_1^{(a)} + [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] p_2^{(a)} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ [b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] p_1^{(a)} &\leq -[b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] p_2^{(a)} \Leftrightarrow \\ \frac{[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}]}{[b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}]} &\leq -\frac{p_2^{(a)}}{p_1^{(a)}}, p \equiv \frac{p_2^{(a)}}{p_1^{(a)}} \end{aligned}$$

$$\frac{[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}]}{[b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}]} \leq -p (19)$$

Η (19) ισχύει λόγω της (15). Ποιο συγκεκριμένα δύναται να ισχύουν διαζευκτικά:

$$[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] < 0 \text{ ή } [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] < 0 (20)$$

$$[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] > 0 \text{ ή } [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] < 0 (21)$$

$$[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] < 0 \text{ ή } [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] > 0 (22)$$

Αναγκαία και ικανή συνθήκη να ισχύουν οι παραπάνω είναι η :

$$[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}] + [b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}] < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 a_{i1} > \sum_{i=1}^2 b_{i1} (23)$$

Εδώ πρέπει να τονίζουμε, ότι τίποτα δεν θα άλλαζε τα εως τώρα αποτελέσματα μας, αν τυποποιούσαμε τις τιμές με ένα τυχαίο (ημι-)θετικό διάνυσμα q , που παριστά ένα

τυχαίο τυπικό εμπόρευμα. Το μόνο που θα άλλαζε θα ήταν το γεγονός ότι η (19) θα έπαιρνε την μορφή²⁶⁵ :

$$\frac{[b_{11}^{(b)} - a_{11}^{(a)}]}{[b_{21}^{(b)} - a_{21}^{(a)}]} \leq -\frac{p_2^{(a)} q_2}{p_1^{(a)} q_1} \quad (24)$$

Από την οπτική γωνία του Π. Βουγιουκλάκη μπορούμε να δώσουμε έναν περισσότερο δυναμικό χαρακτήρα. Τόσο ο Bidard²⁶⁶ όσο και ο Levhari²⁶⁷ υποθέτουν ότι υπάρχει μια κυρίαρχη τεχνική και ο αλγόριθμος της αγοράς συγκλίνει σε αυτήν. Αρχικά στην περίπτωση της απλής παραγωγής ισχύει:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(a,1)} &= \tilde{p}^{(a,0)} A^{(b)} (1 + \bar{r}) + \ell^{(b)} \\ \tilde{p}^{(a,2)} &= \tilde{p}^{(a,1)} A^{(b)} (1 + \bar{r}) + \ell^{(b)} \Leftrightarrow \\ &\vdots \\ \tilde{p}^{(a,t)} &= \tilde{p}^{(a,t-1)} A^{(b)} (1 + \bar{r}) + \ell^{(b)} \quad (25) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι:

$$\tilde{p}^{(a,0)} = \tilde{p}^{(a)} \quad (26)$$

²⁶⁵ Με άλλα λόγια το μόνο που θα άλλαζε θα ήταν ο λόγος σαν απόλυτη τιμή, αλλά σε καμία περίπτωση δεν θα άλλαζε την σχέση διάταξης της (19) και κατά συνέπεια την κατάταξη των γειτονικών τεχνικών

²⁶⁶ Βλ. Christian Bidard (1990a), όπου υποστηρίζει, ότι:

«If, after some steps of this market algorithm, an-set is found for which no other process pays extra profits, it is called dominant. Like the Walrasian tatonnement, this algorithm is best interpreted in terms of information exchanges between a central agency (auctioneer or planning ministry) and decentralized units (firms), the final state only, if any, being implemented. It thus describes a two-level planning procedure with two qualifications: the central agency sends tentative prices and the firms answer in terms of extra profitable processes (dual procedures may be imagined, e.g., Kornai and Liptak (1965), Lacaze (1978), Malinvaud (1967)); however one process only is changed at each step.»

²⁶⁷ D. Levhari (1966), παρατίθεται σχετικό χωρίο:

«If we have alternative techniques for producing some of the goods, the "invisible hand" will produce a situation in which we find maximum real wages for a given rate of interest.» Καθώς και:

«Continue the process with b in the same way. Since p is strictly declining during the process, we cannot return to an "old" matrix, since the prices in the stationary state will be again as in the old situation. So we have no cycles and we have a finite number of alternative matrices, and eventually the process will end.»

(86) $\lim_{t \rightarrow \infty} p^{(a,t)} = p^{(b)}$, με άλλα λόγια οι τιμές της τεχνικής (α) μετά από t χρονικές στιγμές²⁶⁸ συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής β.

Από την (24) και από την (25),(26) και την (8) προκύπτει²⁶⁹:

$$\tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)} = [\tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)}] \left[A^{(b)}(1+\bar{r}) \right]^t \quad (27)$$

Ωστόσο για να ισχύει η (7) πρέπει να ισχύει η :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[A^{(b)}(1+\bar{r}) \right]^t = 0 \quad (28)$$

Με άλλα λόγια η μήτρα $\left[A^{(b)}(1+\bar{r}) \right]^t$ πρέπει να είναι συγκλίνουσα. Από τα θεωρήματα Perron Frobenius γνωρίζουμε ότι:

Η (28) ισχύει αν ισχύει:

$$\lambda_m^{A^{(b)}}(1+r) < 1 \Leftrightarrow \lambda_m^{A^{(b)}} < \frac{1}{(1+r)} \quad (29)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να συγκλίνει ο αλγόριθμος της αγοράς σε μια τεχνική, πρέπει αυτή για την δεδομένη τιμή του r , να είναι r -παραγωγική²⁷⁰.

Μπορούμε βασιζόμενοι εν μέρει στον αλγόριθμο της αγοράς του Bidard²⁷¹, να προσπαθήσουμε να τον εφαρμόσουμε και στην περίπτωση της απλής παραγωγής.

Για το r -καθαρό προϊόν για μια τεχνική σύνθετης παραγωγής, έστω αρχικά για την διαδικασία παραγωγής i ισχύει:

$$c_i = 1 - a_i(1+r)$$

²⁶⁸ Η διαφορετικά ειδομένο μετά από t αλλαγές t τεχνικών οι τιμές συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής (β)

²⁶⁹ Π.Βουγιουκλάκης (1996) σελ.228-239

²⁷⁰ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995)

²⁷¹ Βλ. Ch.Bidard(1990)

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας ένα αριθμητικό παράδειγμα θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου της αγοράς, στην περίπτωση της απλής μη διασπώμενης παραγωγής.

Κατά συνέπεια έστω οι ακόλουθες γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής:

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,26 \end{bmatrix}, \ell^{(a)} = [0,5 \quad 0,5], R^{(a)} = 0.5214$$

$$A^{(b)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}, \ell^{(b)} = [0,5 \quad 0,45], R^{(b)} = 0.5279$$

Αναπαράγουμε τα όσα γνωρίζουμε ως τώρα για τον αλγόριθμο της αγοράς.

Σαν τυποποίηση επιλέγουμε αυτήν του Levhari, $w=1$. Επομένως για τα διανύσματα τιμών των τεχνικών α, β ισχύει:

Για τα διανύσματα τιμών της τεχνικής α ισχύει:

$$(87) \ p^{(a)} = p^{(a)} A^{(a)} (1+r) + \ell^{(a)} \Leftrightarrow [p_1^{(a)} \quad p_2^{(a)}] = [p_1^{(a)} \quad p_2^{(a)}] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,26 \end{bmatrix} (1+r) + [0,5 \quad 0,5]$$

Ενώ για τα διανύσματα τιμών της τεχνικής β ισχύει:

$$(88) \ p^{(b)} = p^{(b)} A^{(b)} (1+r) + \ell^{(b)} \Leftrightarrow [p_1^{(b)} \quad p_2^{(b)}] = [p_1^{(b)} \quad p_2^{(b)}] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} (1+r) + [0,5 \quad 0,45]$$

Κατά συνέπεια έχουμε τα ακόλουθα συστήματα τιμών-σχέσεων:

Για την τεχνική (α)

$$\left. \begin{aligned} p_1^{(a)} &= (p_1^{(a)} 0.5 + p_2^{(a)} 0.25)(1+r) + 0.5 \\ p_2^{(a)} &= (p_1^{(a)} 0.25 + p_2^{(a)} 0.26)(1+r) + 0.5 \end{aligned} \right\} (a)$$

Και για την τεχνική (β)

$$\left. \begin{aligned} p_1^{(b)} &= (p_1^{(b)} 0.5 + p_2^{(b)} 0.25)(1+r) + 0.5 \\ p_2^{(b)} &= (p_1^{(b)} 0.25 + p_2^{(b)} 0.25)(1+r) + 0.5 \end{aligned} \right\} (b)$$

Για την τεχνική (α) η λύση που δίδεται για το σύστημα τιμών είναι η:

Ενώ για το σύστημα (β)

$$p^{(b)} = \left[\frac{0.20(r+41)}{5-10r+r^2}, -\frac{0.80(-8+3r)}{5-10r+r^2} \right] (b.1)$$

Αρχικά επιλέγεται το διάνυσμα τιμών της τεχνικής α για τιμή του $r, \bar{r} = 0.1$

Για την τεχνική (α):

$$p^{(a)} = [2.012821817, 1.475526610]$$

Ενώ για την τεχνική (β)

$$p^{(b)} = [1.940149626, 1.356608479]$$

Εφαρμόζουμε την σχέση(27) και βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στις τιμές της τεχνικής (β) αφού η (27) ικανοποιείται²⁷². Με άλλα λόγια όποιο και αν είναι το υπόλοιπο των διανυσμάτων $p^{(a)} - p^{(b)}$ μακροπρόθεσμα θα συγκλίνει στο 0 μόνο και μόνο εάν η τεχνική β είναι r_0 -παραγωγική.

4.2.2 Η περίπτωση της σύνθετης παραγωγής

Στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής απαντάται ο αλγόριθμος του Bidard. Η διαδικασία που ακολουθείται μοιάζει αρκετά με αυτή του Levhari. Ορίζονται εκ νέου για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους οι τιμές παραγωγής της αρχικής τεχνικής παραγωγής –έστω της (α). Στην συνέχεια βάσει των παραπάνω τιμών, ορίζεται η τιμή για την διαδικασία την οποία διαφέρουν οι δύο τεχνικές και στην συνέχεια ορίζονται οι τιμές της νέας τεχνικής (έστω Β). Στις καινούριες αυτές τιμές πρέπει να προκύπτουν υπερκέρδη (βλ. συνθήκη 3) η να ισχύει ισοδύναμα η:

$$(89) \quad p^{(a)} \leq p^{(b)}.$$

²⁷² Με τον τρόπο αυτό λόγω του ότι η τεχνική β είναι r_0 -παραγωγική για $r_0 = 0.1$, σημαίνει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [A^{(b)}(1+\bar{r})]^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0.55 & 0.275 \\ 0.275 & 0.275 \end{bmatrix}^t$$

Ας δούμε τα παραπάνω εκτενέστερα:

Έστω $A^{(.)}$ η $n \times q$ μήτρα $A \geq 0$ των τεχνικών συντελεστών, $B^{(.)}$, $B \geq 0$ η $n \times n$ μήτρα των εκροών, $\ell^{(.)}, \ell^{(.)} > 0$ το $1 \times q$ διάνυσμα των εισροών σε άμεση ζωντανή εργασία ανά μονάδα παραγόμενου εμπορεύματος, $p^{(.)}$ το $1 \times n$ διάνυσμα των τιμών παραγωγής καθώς επίσης και w και r το ονομαστικό ωρομίσθιο και το ποσοστό κέρδους αντίστοιχα.

Βάσει των παραπάνω έχουμε το γνωστό σύστημα τιμών:

$$(90) \quad p^{(a)} B^{(b)} \leq p^{(a)} A^{(b)} (1 + \bar{r}) + \ell^{(b)}$$

Το παραπάνω σύστημα για να έχει λύση, εκτός από την τετριμμένη ($p=0$), πρέπει η $[B^{(b)} - A^{(b)} (1 + \bar{r})]^{-1} \neq 0$, με άλλα λόγια να μην είναι η παραπάνω μήτρα συγκλίνουσα.

Επομένως μια τεχνική (ή σύμφωνα με τον Bidard), ένα n -σύνολο είναι κυρίαρχη²⁷³ (-ο) εάν για κάθε διαδικασία $i \neq j$ ²⁷⁴ ισχύει το εξής:

$$(91) \quad \forall i \neq j, (1+r)p_j A_i + l_i \geq p_j B_i$$

Με άλλα λόγια επιλέγεται η τεχνική στις τιμές της οποίας, καμία άλλη τεχνική δεν αποφέρει υπερκέρδη.

Εάν η παραπάνω συνθήκη δεν ικανοποιείται τότε οι καπιταλιστές οδηγούνται στην εισαγωγή κάποιας τεχνικής η χρήση της οποίας συνεπάγεται υπερκέρδη.

Βάσει των παραπάνω παρουσιάζουμε εκ νέου τον αλγόριθμο του Bidard.

Για το σύστημα τιμών των υπό σύγκριση τεχνικών, ισχύει:

$$(92) \quad p^{(.)} B^{(.)} = p^{(.)} A^{(.)} (1+r) + w^{(.)} \ell^{(.)}, (.) = a, b$$

Όμως από το στην περίπτωση των ομαλά συμπεριφερόμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής, ισχύει²⁷⁵:

²⁷³ Βλ. και Schefold B. (1988)

²⁷⁴ όπου η j η διαθέσιμη τεχνική από το σύστημα, η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος, και κατά συνέπεια καμία μετάβαση από αυτήν την τεχνική σε μια άλλη δεν δημιουργεί υπερκέρδη

$$p^{(\cdot)}B^{(\cdot)} = (r_0 - r)p^{(\cdot)}A^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}(1+r_0)]^{-1} + w^{(\cdot)}\ell^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}(1+r_0)]^{-1}, r, r \leq r_0 < R^{276}$$

$$(93) p^{(\cdot)}B^{(\cdot)} = (r_0 - r)p^{(\cdot)}H^{(\cdot)} + w^{(\cdot)}\ell^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}(1+r_0)]^{-1}, H^{(\cdot)} \equiv A^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}(1+r_0)]^{-1}$$

Στην εξέταση του ο Bidard ωστόσο υποθέτει ότι οι τεχνικές παραγωγής που εξετάζει κινούνται ομαλά για r , $0 \leq r < R$. Και με τον τρόπο αυτό θέτει εκτός θεωρήσης καταστάσεις όπως “ r_0 all-productive”²⁷⁷ και “ r_0 -all-engaging”²⁷⁸.

Ο Bidard ορίζει τις τιμές παραγωγής με την σχέση (2). Εισάγει τον όρο κυρίαρχη τεχνική {n-set}. Η κυρίαρχη τεχνική, δεν είναι τίποτα άλλο από την τεχνική εκείνη στις τιμές της οποίας, καμία άλλη τεχνική δεν αποφέρει υπερκέρδη από την χρησιμοποίηση της. Με άλλα λόγια για να είναι μια τεχνική κυρίαρχη πρέπει να ισχύει:

$$\forall i \neq j, (1+r)p_j A_i + l_i \geq p_j B_i$$

Με άλλα λόγια στις τιμές της τεχνικής j η χρησιμοποίηση της διαδικασίας i να μην αποφέρει υπερκέρδη²⁷⁹. Δηλαδή η διαδικασία αυτή θυμίζει το cost minimization

²⁷⁵ Σαν r_0 ορίζεται το κατώτερο ύψος του ποσοστού κέρδους για το οποίο η τεχνική που εξετάζεται συμπεριφέρεται ομαλά. Με τον όρο ομαλά εννοούμε:

- Ότι το διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} p^{(\cdot)} \\ w^{(\cdot)} \end{bmatrix} > 0, \forall r, r_0 \leq r < R$$

- Ότι η σχέση ονομαστικού ωρομισθίου είναι φθίνουσα:

$$\frac{dw^{(\cdot)}}{dr} < 0, \forall r, r_0 \leq r < R, \forall y \geq 0$$

- Ότι υπάρχει ένα πρότυπο σύστημα με πρότυπο λόγο $\bar{R}$

²⁷⁶ Από την (4) προκύπτει:

$$p^{(\cdot)}p^{(\cdot)}B^{(\cdot)} = p^{(\cdot)}A^{(\cdot)}(1+r) + r_0 p^{(\cdot)}A^{(\cdot)} - r_0 p^{(\cdot)}A^{(\cdot)} + w^{(\cdot)}\ell^{(\cdot)} \Leftrightarrow$$

$$p^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}(1+r_0)] = (r_0 - r)p^{(\cdot)}A^{(\cdot)} + w^{(\cdot)}\ell^{(\cdot)}$$

Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) σελ.37

²⁷⁷ Δηλαδή τεχνικές οι οποίες δύνανται να παράξουν ορισμένα μόνο εξωγενώς δεδομένα θετικά ή ημιθετικά καθαρά προϊόντα παράγοντας ένα αντίστοιχο θετικό ακαθάριστο προϊόν

²⁷⁸ Τεχνικές δηλαδή χρησιμοποιούν υποχρεωτικά όλες τις διαδικασίες προκειμένου να παράξουν το απαιτούμενο θετικό ακαθάριστο προϊόν.

κριτήριο, με την διαφορά όμως ότι εξετάζονται μόνο γειτονικές τεχνικές, αφού η λειτουργία του αλγορίθμου έχει να κάνει μόνο με την σύγκριση επιμέρους μόνο διαδικασιών παραγωγής.

Σύμφωνα με τον Bidard η κυρίαρχη τεχνική είναι μόνο μια και ο αλγόριθμος της αγοράς συγκλίνει σε αυτήν. Ας δούμε αν το τελευταίο ισχύει:

Χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία του Π. Βουγιουκλάκη²⁸⁰ έχουμε:

Έστω οι τετράγωνες τεχνικές σύνθετης παραγωγής $[A^{(.)}, \ell^{(.)}, B^{(.)}]$, $(.) = a, b, c, \dots, q$

Υποθέτουμε ότι:

$$(94) \quad \tilde{p}^{(a,0)} = \tilde{p}^{(a)}$$

Στην συνέχεια θα αναζητηθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να συγκλίνει το σύστημα στην τεχνική β. Συνοψίζοντας τις συνεχείς μεταβάσεις από την μια τεχνική στην άλλη θα έχουμε:

$$(95) \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{t-k} \\ p_t \end{bmatrix}^{(a)} B^{(b)} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{t-k} \\ p_{t-1} \end{bmatrix}^{(a)} A^{(b)}(1+\bar{r}) + \begin{bmatrix} w_0^{(a)} \\ w_1^{(a)} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_t^{(a)} \end{bmatrix} \ell^{(b)}$$

Τονίζουμε ότι τα στοιχεία p_i, w_i είναι τα διανύσματα τιμών, ονομαστικό ωρομίσθιο την χρονική στιγμή $i, i=0, 1, 2, \dots, t$

Κατά συνέπεια για κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

²⁷⁹ Διαφορετικά ειπωμένο η χρήση της νέας διαδικασίας i στις τιμές της τεχνικής j δεν είναι κερδοφόρα. Ch. Bidard (1990) σελ 840

²⁸⁰ Π.Βουγιουκλάκης (1995) σελ. .228-239

$$\begin{aligned}
[p^{(a,1)} - p^{(b)}]B^{(b)} &= [p^{(a,0)} - p^{(b)}]A^{(b)}(1+\bar{r}) \\
[p^{(a,2)} - p^{(b)}]B^{(b)} &= [p^{(a,0)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^2 \\
&\vdots \\
[p^{(a,t-1)} - p^{(b)}]B^{(b)} &= [p^{(a,0)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^{t-1} \\
[p^{(a,t)} - p^{(b)}]B^{(b)} &= [p^{(a,0)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια για την περίπτωση του συστήματος (8) προκύπτει:

$$[p^{(a)} - p^{(b)}]B^{(b)} = [p^{(a,0)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t \Leftrightarrow$$

Λόγω της (6) ισχύει

$$(96) \quad [p^{(a)} - p^{(b)}]B^{(b)} = [p^{(a)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t, t = 0, 1, 2, \dots, t$$

Από την (8) προκύπτει ότι διαχρονικά ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [p^{(a)} - p^{(b)}]B^{(b)} = [p^{(a)} - p^{(b)}]\{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [p^{(a,t)} - p^{(b)}]B^{(b)} = [p^{(a)} - p^{(b)}] \lim_{t \rightarrow \infty} \{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t$$

Όμως ισχύει ότι:

$$(97) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{A^{(b)}(1+\bar{r})\}^t \equiv 0$$

, καθώς η τεχνική β είναι παραγωγική και συγκλίνουσα²⁸¹.

Από την (9) προκύπτει ότι:

$$(98) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [p^{(a,t)}] = p^{(b)}$$

Η (10) μας πληροφορεί, ότι οι τιμές της τεχνικής α συγκλίνουν διαχρονικά με αυτές της τεχνικής β. Με άλλα λόγια ο αλγόριθμος της αγοράς συγκλίνει στην τεχνική β, όταν και μόνο η τεχνική β είναι παραγωγική ή ισοδύναμα η μήτρα $A^{(b)}(1+\bar{r})$ είναι συγκλίνουσα.

²⁸¹ Βλ. Π. Βουγιουκλάκης 1995 σελ 232

Αν προσπαθήσουμε να παραστήσουμε διαγραμματικά την λειτουργία του αλγορίθμου της αγοράς.

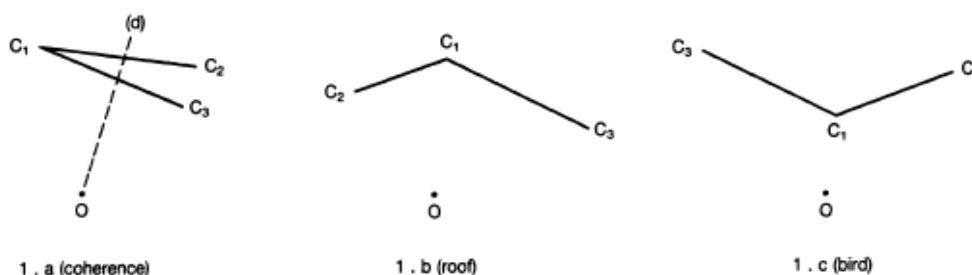
Ο Bidard ορίζει το διάνυσμα που παριστά το πραγματικό ωρομίσθιο, ή το διάνυσμα γραμμή με το οποίο τυποποιούνται οι τιμές ήτοι με το r_0 –καθαρό προϊόν του συστήματος-διαδικασίας i:

$$(99) \quad pc_i = 1$$

Όπου με την σειρά του ισχύει, για το μοναδιαίο επίπεδο εργασίας και για δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους²⁸²:

$$(100) \quad c_i = b_i - a_i(1 + \bar{r})$$

Οι σχέσεις (11) και (12) αν προσπαθήσουμε να τις παραστήσουμε διαγραμματικά θα είναι της μορφής²⁸³:



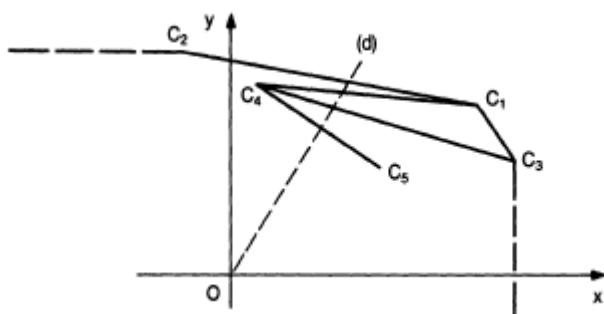
Στην περίπτωση των παραπάνω των τριών τεχνικών παραγωγής, μπορεί να συμβαίνουν τα εξής²⁸⁴:

²⁸² Για τις διαστάσεις των μεγεθών σε συστήματα σύνθετης παραγωγής, βλ Γ.Σταμάτης Αξία και υπεραξία:

²⁸³ Δείχνουμε τις τρεις καταστάσεις που σύμφωνα με τον Bidard δύναται να συμβαίνουν, όπως τις παρουσιάζει ο ίδιος ο Bidard.

Η διακεκομμένη γραμμή παριστά την σύνθεση του πραγματικού ωρομισθίου και το πώς η μεταβολή του επιρεάζει την επιλογή της κυρίαρχης τεχνικής(ή με την κατά την Bidard ορολογία κυρίαρχο n-set). Ο Bidard χρησιμοποιεί ένα αριθμητικό παράδειγμα τριών τετράγωνων τεχνικών τεχνικών αλλά και τριών αυτόνομων διαδικασιών παραγωγής-τεχνικών τις οποίες ο Bidard δεν τις κατονομάζει. Ο Bidard εξετάζει μόνο την περίπτωση των «all engaging» τεχνικών παραγωγής. Και θέτει εκτός θεώρησης, σκοπίμως, διαχωρήσιμες τεχνικές παραγωγής.

Βλ.Ch.Bidard (1991) σελ 843



Για τον Bidard ο αλγόριθμος της αγοράς συγκλίνει σε μια μόνο τεχνική. Αυτό είναι εν μέρει σωστό, καθώς για δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους όντως είναι μονοσήμαντη η κατάταξη τετράγωνων τεχνικών. Καθώς σε κάθε τυποποίηση το σύστημα συγκλίνει πάντα σε μια μόνο τεχνική. Όμως αν λάβουμε και την περίπτωση διαχωρίσιμων τεχνικών είναι απολύτως δυνατόν να μην μπορεί κάποιος να αποφανθεί σε ποια από τις δύο τεχνικές θα συγκλίνει η αγορά²⁸⁵.

Ένα άλλο σημείο που πρέπει να αναφερθεί είναι η εξίσωση μέσω της οποίας τυποποιούνται οι τιμές δηλαδή η (11):

$$pc_i = 1$$

Είναι φανερό, ότι πρόκειται για μια a la Sraffa τυποποίηση των τιμών. Μέσω αυτής τα μέσα παραγωγής και το υπερπροϊόν έχουν την ίδια σύνθεση για κάθε τιμή του ποσοστού κέρδους. Συνεπώς και το ποσοστό κέρδους είναι ο λόγος των δυο παραπάνω ομοιογενών μεγεθών.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το c_i είναι το r_0 – καθαρό προϊόν του συστήματος. Το τελευταίο μάλιστα αν αναλογιστούμε ότι περιλαμβάνει τα το υποπροϊόν U και τους πραγματικούς μισθούς έστω d μπορούμε να αποφανθούμε ότι παριστά ταυτόχρονα και την συνολική ζήτηση του συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι ο Bidard για λόγους απλούστευσης έχει επιλέξει την λειτουργία του συστήματος στο μοναδιαίο

²⁸⁴ Βλ. Ch.Bidard (1991) σελ 843

²⁸⁵ Ενδεικτικά βλέπουμε, ότι στην περίπτωση του σχήματος 1.α, όταν το πραγματικό ωρομίσθιο είναι τέτοιο ώστε να βρεθεί στο σημείο $c1$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το σύστημα θα συγκλίνει, είτε στην τεχνική που περιλαμβάνει τις διαδικασίες (12), (13) η την 1 μόνη της. Στην περίπτωση αυτή το κριτήριο του Bidard δεν μπορεί να απαντήσει σε ποιο σύστημα συγκλίνει ο αλγόριθμος. Αυτός είναι και ο λόγος που ο Bidard κάνει λόγο μόνο για τετράγωνα συστήματα σύνθετης παραγωγής.

επίπεδο, κατά συνέπεια με την κατάλληλη μεταβολή των επιπέδων δραστηριότητας του συστήματος μπορεί να ανταπεξέλθει σε κάθε είδους ζήτηση²⁸⁶.

²⁸⁶ Είναι φανερό, ότι για να μπορεί το σύστημα να ανταπεξέλθει σε κάθε είδους ζήτηση πρέπει να είναι βιώσιμο. Υπενθυμίζουμε, ότι ένα σύστημα καλείται βιώσιμο, όταν το σύστημα μπορεί να παράξει κάθε θετικό ή ήμιθετικό καθαρό προϊόν, παράγοντας ένα θετικό ή έστω ημιθετικό καθαρό προϊόν. Με άλλα λόγια:

$$Bx = Ax + Y \Leftrightarrow$$

$$(B - A)x = Y$$

Υπενθυμίζουμε ωστόσο ότι εργαζόμαστε σε ομαλά συμπεριφερόμενα συστήματα σύνθετης παραγωγής τα οποία έχουν ένα πρότυπο λόγο $\bar{R}$, ως εκ τούτου θα ήταν σωστότερο η παραπάνω σχέση να ξαναγραφεί ως εξής:

$$[B - A(1 + r_0)]x = Y_0$$

5 Περιπτώσεις Μονοσήμαντης Κατάταξης τεχνικών Παραγωγής

5.1 Corn Economies

Η σύλληψη της ιδέας των “pure corn economies” ανήκει στο D.Ricardo. Το σημαντικό στην θεωρία του D.Ricardo, είναι ότι ο ίδιος άφησε πράγματα τα οποία θεωρούσε λιγότερο σημαντικά εκτός θεώρησης²⁸⁷.

5.1.1 1.Το μοντέλο

Υποτίθεται η ύπαρξη δύο τομέων παραγωγής. Ο ένας τομέας παράγει αγροτικά προϊόντα²⁸⁸, έστω καλαμπόκι (corn) χρησιμοποιώντας ως εισροές μόνο καλαμπόκι. Υπάρχει και ένας δεύτερος τομέας ο οποίος παράγει βιομηχανικά εμπορεύματα, έστω σίδηρο, χρησιμοποιώντας ως εισροές τόσο καλαμπόκι όσο και σίδηρο.

Η εργασία και η εισροή σε γη εμπεριέχονται στις εισροές των τομέων. Με άλλα λόγια το υπό εξέταση σύστημα είναι ένα κλειστό σύστημα a la Leontief. Η τεχνολογία είναι γραμμική και κάθε τομέας παράγει μόνο ένα εμπόρευμα. Ως εκ τούτου μιλάμε για την περίπτωση μιας γραμμικής τεχνικής απλής παραγωγής. Είναι αυτονόητο, ότι η τεχνική είναι παραγωγική, και ότι το σύστημα είναι βιώσιμο²⁸⁹.

Ορίζεται η μήτρα των τεχνικών συντελεστών A , $A \geq 0$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{cc} & a_{ci} \\ 0 & a_{ii} \end{bmatrix}, \text{ κάθε στοιχείο της } a_{ij} \text{ περιέχει τις εισροές σε εμπορεύματα, σε}$$

μισθιακά εμπορεύματα και σε γη.

Είναι φανερό, ότι μιλάμε για ένα διασπώμενο σύστημα απλής παραγωγής. Τόσο το πραγματικό ωρομίσθιο, όσο και το ποσοστό κέρδους εκφράζονται σε όρους του ίδιου εμπορεύματος δηλαδή του σιταριού.

²⁸⁷ Φυσικά αναφερόμαστε στα μη βασικά εμπορεύματα που δεν εισέρχονταν στην παραγωγή κανενός άλλου εμπορεύματος βασικού ή μη βασικού. Τα αγαθά αυτά ονομάστηκαν και ως αγαθά πολυτελείας.

²⁸⁸ Η επιλογή της ονομασίας των τομέων γίνεται σε συμφωνία με τον Ricardo.

²⁸⁹ Σε διαφορετική περίπτωση η συζήτηση αυτή δεν θα είχε κανένα νόημα

Με μια πιο σύγχρονη ορολογία μπορούμε να πούμε ότι η συγκεκριμένη corn economy «σπάει» σε δύο υποσυστήματα. Σε ένα βασικό-αναπαραγωγικό που παράγει σιτάρι και σε ένα μη βασικό-μη αναπαραγωγικό που παράγει σίδηρο.

Στην περίπτωση των corn models, το ποσοστό κέρδους μετριέται ως ο λόγος του καθαρού προϊόντος του τομέα παραγωγής καλαμποκιού μείον την γαιοπρόσοδο προς τα συνολικά φθαρέντα μέσα παραγωγής στον τομέα αυτό. Ο ανταγωνισμός μάλιστα ωθεί το ίδιο ποσοστό κέρδους να ισχύσει και στον τομέα παραγωγής σιδήρου²⁹⁰.

Στην περίπτωση των corn economies το ποσοστό κέρδους είναι ανεξάρτητο από τις μεταβολές στις απόλυτες τιμές.

Παρακάτω παρατίθεται πως προσδιορίζονται οι σημαντικότερες μεταβλητές του μοντέλου.

Το σημαντικό στην περίπτωση μιας corn economy είναι ότι η οικονομία συμπεριφέρεται ουσιαστικά σαν μια μονοτομεακή οικονομία. Με άλλα λόγια:

Έστω ότι το ακαθάριστο προϊόν της εν λόγω corn economy είναι μια μονάδα του εμπορεύματος corn. Για την παραγωγή της μίας μονάδας corn απαιτούνται a_{cc} μονάδες corn. Με άλλα λόγια για το καθαρό προϊόν Y_c της corn economy ισχύει:

$$Y_c = 1 - a_{cc} \quad (1)$$

Παραπάνω όμως έγινε η υπόθεση, ότι το σύστημα είναι κλειστό, με άλλα λόγια στο a_{cc} συμπεριλαμβάνονται και οι εισροές σε ζωντανή εργασία²⁹¹. Κατά συνέπεια το

²⁹⁰ Βλ. V.Walsh, H. Gram (1980) σελ 89

²⁹¹ Τίποτε δεν αλλάζει επί της ουσίας αν υποθέσουμε ότι το σύστημα δεν είναι κλειστό. Όμως εξ ορισμού σε μια corn economy το ονομαστικό ωρομίσθιο εκφράζεται σε όρους του εμπορεύματος corn. Κατά συνέπεια το σύστημα τιμών του εν λόγω συστήματος θα μπορούσε να έχει τις δύο ακόλουθες μορφές:

Αν οι μισθοί προκαταβάλλονταν:

$p_c = p_c a_{cc}(1+r) + p_c d_c \ell_c (1+r) = p_c (a_{cc} + d_c \ell_c)(1+r)$, όπου d_c το πραγματικό ωρομίσθιο του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση. Το ονομαστικό ωρομίσθιο είναι σταθερό και η $w-r$ είναι της μορφής:

καθαρό προϊόν της corn economy αποτελεί ταυτόχρονα και το υπερπροϊόν της. Κατά συνέπεια για το ποσοστό κέρδους της εν λόγω οικονομίας ισχύουν τα παρακάτω:

Για το σύστημα τιμών μιας corn economy ισχύει:

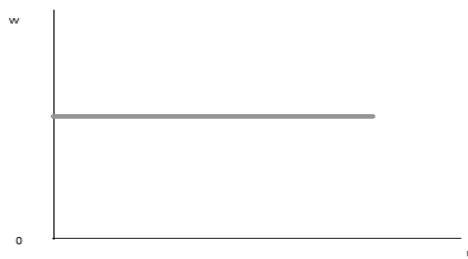
$$p_c = p_c a_{cc}(1+r) \quad (2)$$

Επομένως για το ποσοστό κέρδους r ισχύει:

$$1 = a_{cc}(1+r) \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{1}{a_{cc}} - 1 \quad (3)$$

Από την σχέση (2) είναι φανερό, ότι η το ποσοστό κέρδους είναι ανεξάρτητο από την τυποποίηση των τιμών²⁹². Είναι φανερό και από την σχέση (3) ότι το ποσοστό



Κατά συνέπεια το ωρομίσθιο παραμένει σταθερό σε κάθε πιθανή μεταβολή του ποσοστού κέρδους.

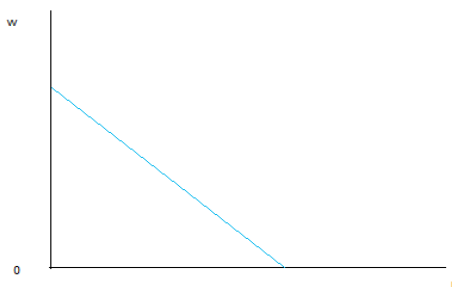
Κατά συνέπεια οποιαδήποτε αναφορά στην w - r δεν έχει ιδιαίτερο νόημα.

Στην περίπτωση τώρα που οι μισθοί δεν προκαταβάλλονται το σύστημα τιμών είναι το ακόλουθο:

$$p_c = p_c a_{cc}(1+r) + w\ell_c$$

Από το οποίο προκύπτει η λύση για το ονομαστικό ωρομίσθιο:

$$w = \frac{p(1 - a_{cc}(1+r))}{\ell}, \text{ όπου είναι φανερό ότι η } w\text{-}r \text{ καμπύλη είναι φθίνουσα και γραμμική συνεπώς:}$$



²⁹² Είναι δε αυτονόητο, ότι και οι τιμές δεν μεταβάλλονται με την μεταβολή του τυπικού εμπορεύματος.

κέρδους, ορίζεται σαν το λόγο δύο ομοιογενών φυσικών μεγεθών, του καθαρού προϊόντος- υπερπροϊόντος και των φθαρέντων μέσων παραγωγής.

5.1.2 Corn economies και επιλογή τεχνικής

Στην συνέχεια γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχουν δύο διαθέσιμες τεχνικές που σχηματίζουν μια corn economy. Οι δύο αυτές τεχνικές έστω ότι είναι η α και η β.

Εξετάζονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1. Η εργασία είναι αναπαραγόμενο μέσο παραγωγής
2. Οι μισθοί καταβάλλονται στην αρχή της περιόδου
3. Οι μισθοί καταβάλλονται στο τέλος της περιόδου

Στην συνέχεια αναλύονται ξεχωριστά:

5.1.3 Η εργασία είναι αναπαραγόμενο μέσο παραγωγής

Για το σύστημα τιμών ισχύει για κάθε τεχνική:

$$p_c^{(.)} = p_c^{(.)} a_{cc}^{(.)} (1 + r^{(.)}), (.) = a, b \quad (4)$$

Ζητούμενο στις corn economies όπως και στα χαραζοφιανά συστήματα είναι η επιλογή εκείνης της τεχνικής, η οποία συνεπάγεται το μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους.

Επομένως για το ποσοστό κέρδους της κάθε τεχνικής ισχύει:

$$r^{(.)} = \frac{1}{a_{cc}^{(.)}} - 1 \quad (4)$$

Κατά συνέπεια δύναται διαδοχικά να ισχύει:

$$a_{cc}^{(a)} < a_{cc}^{(b)} \quad (5)$$

$$a_{cc}^{(a)} = a_{cc}^{(b)} \quad (6)$$

$$a_{cc}^{(a)} > a_{cc}^{(b)} \quad (7)$$

Το οποίο με την σειρά του συνεπάγεται:

$$r^{(a)} > r^{(b)} \quad (8), \text{ στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική } \alpha$$

$$r^{(a)} = r^{(b)} \quad (9), \text{ στην περίπτωση αυτή είναι αδιάφορο ποια από τις δύο τεχνικές θα χρησιμοποιηθεί}$$

$$r^{(a)} < r^{(b)} \quad (10), \text{ στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική } \beta$$

Οι μισθοί καταβάλλονται στην αρχή της περιόδου

Για το σύστημα τιμών κάθε τεχνικής ισχύει²⁹³:

$$p_c^{(.)} = p_c^{(.)} a_{cc}^{(.)} (1+r^{(.)}) + p_c^{(.)} d_c^{(.)} \ell_c^{(.)} (1+r^{(.)}) = p_c^{(.)} (a_{cc}^{(.)} + d_c^{(.)} \ell_c^{(.)}) (1+r^{(.)}), (.) = a, b$$

Το οποίο μπορεί να ξαναγραφεί σαν:

$$p_c^{(.)} = p_c^{(.)} A_c^{(.)} (1+r^{(.)}), (.) = a, b, A_c^{(.)} \equiv (a_{cc}^{(.)} + d_c^{(.)} \ell_c^{(.)}) \quad (11)$$

Επομένως και σε αυτήν την περίπτωση επιλέγεται η τεχνική εκείνη που συνεπάγεται το μεγαλύτερο δυνατό ποσοστό κέρδους με άλλα λόγια, δύναται να ισχύει:

$$A_c^{(a)} < A_c^{(b)} \quad (12)$$

$$A_c^{(a)} = A_c^{(b)} \quad (13)$$

$$A_c^{(a)} > A_c^{(b)} \quad (14)$$

Το οποίο με την σειρά του συνεπάγεται:

$$r^{(a)} > r^{(b)} \quad (15), \text{ στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική } \alpha$$

$$r^{(a)} = r^{(b)} \quad (16), \text{ στην περίπτωση αυτή είναι αδιάφορο ποια από τις δύο τεχνικές θα χρησιμοποιηθεί}$$

²⁹³ Βλ. Υποσημείωση 3

$r^{(a)} < r^{(b)}$ (17), στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική β

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει, ότι και στην περίπτωση 2.1.

5.2 Χαραζοφιανά συστήματα Παραγωγής

Μέσω του προβλήματος μετασχηματισμού ο von Charasoff, εκτός του ίδιου του προβλήματος, δίνει και μια λύση στο πρόβλημα της επιλογής τεχνικής. Όπως έχει προηγουμένως αναφερθεί η επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής, είναι δυνατή σε μη διασπώμενα συστήματα απλής παραγωγής, σε γειτονικές όμως τεχνικές καθώς και σε corn economies. Μια άλλη περίπτωση μονοσήμαντης κατάταξης είναι και με το κριτήριο του von Neumann. Ωστόσο το σύστημα που χρησιμοποιεί ο von Neumann είναι ένα χαραζοφιανό σύστημα (απλής ή σύνθετης)²⁹⁴ παραγωγής.

5.2.1 Το μοντέλο

Ορίζεται η μήτρα A,

A^{295} , η nxn μήτρα των εισροών σε εμπορεύματα ανα μονάδα παραγόμενου προϊόντος, εν προκειμένω:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

ℓ , το 1xn διάνυσμα των εισροών σε εργασία ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος, με $\ell > 0$, εν προκειμένω

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$$

X το nx1 διάνυσμα του ακαθάριστου προϊόντος του συστήματος, εν προκειμένω

²⁹⁴ Καθώς ο ίδιος ο von Neumann δεν κάνει ρητά διάκριση μεταξύ τους.

²⁹⁵ Γ. Σταμάτης(1995) σελ. 537-555.

$$X=s=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον ορίζονται τα διανύσματα:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος σαν r , ορίζεται το ενιαίο (κοινό για όλα τα εμπορεύματα) ποσοστό κέρδους του συστήματος:

$$r, 0 \leq r < R_{\max}$$

Ο Charasoff υποθέτει, ότι

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{2j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{3j} = 0$$

Επομένως βάσει του γνωστού θεωρήματος των Perron Frobenius, η μέγιστη ιδιοτιμή μια μήτρας, βρίσκεται, ανάμεσα στο μέγιστο και το ελάχιστο των αθροισμάτων των γραμμών μιας μήτρας, συνεπώς:

$$0 < \lambda_m^A < 1$$

Επομένως, η εν λόγω τεχνική είναι παραγωγική²⁹⁶.

Ορίζεται σαν Y το $n \times 1$ διάνυσμα του καθαρού προϊόντος του συστήματος²⁹⁷ και συνεπάγεται

$$Y = (I - A)X - (I - A)s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \text{ και επομένως είναι παραγωγική.}$$

Ορίζεται σαν d το $1 \times n$ διάνυσμα του πραγματικού ωρομισθίου, $d \geq 0$

$$d = (0, d_2, 0)$$

και το γινόμενο διανυσμάτων $d\ell$, την μήτρα των πραγματικών μισθών του συστήματος:

$$d\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2\ell_1 & d_2\ell_2 & d_2\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο Charasoff υποθέτει ότι $\sum_{i=1}^3 d_2\ell_i = 1$, με άλλα λόγια, ότι το άθροισμα των στοιχείων της 2^{ης} γραμμής, είναι ίσα με τη μονάδα.

Στην συνέχεια ορίζεται η κατά μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένη, μήτρα των εισροών σε εμπορεύματα ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος, δηλαδή η $\bar{A} = A + d\ell$,

$$\bar{A} = A + d\ell = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d_2\ell_1 & d_2\ell_2 & d_2\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας $\bar{A}$ είναι μικρότερη της μονάδας, βάσει του γνωστού θεωρήματος των Perron Frobenius, ότι η μέγιστη ιδιοτιμή μια μήτρας, βρίσκεται, ανάμεσα στο μέγιστο και το ελάχιστο των αθροισμάτων των γραμμών μιας

²⁹⁶ Βλ. Γ. Σταμάτης, (1998), σελ 89.

²⁹⁷ το οποίο χρησιμοποιεί μια τεχνική απλής παραγωγής

μήτρας. Εν προκειμένω έχουμε: $0 < \bar{\lambda}_m^{\bar{A}} < 1$. Με άλλα λόγια η εν λόγω τεχνική είναι για το δεδομένο πραγματικό ωρομίσθιο $d \geq 0$, προσοδοφόρα²⁹⁸

Ορίζεται σαν $\bar{Y}$, το υπερπροϊόν της εν λόγω τεχνικής. Και έχουμε:

$$\bar{Y} = (I - \bar{A})X = (I - \bar{A})s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s_3, \text{ επομένως το υπερπροϊόν της τεχνικής είναι}$$

ίσο με s_3 , με μια μονάδα δηλαδή του εμπορεύματος 3.

Είναι φανερό, ότι πρόκειται για ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από μια διασπώμενη τεχνική απλής παραγωγής. Το σύστημα αυτό διασπάται σε δύο υποσυστήματα. Το ένα παράγει τα αναπαραγωγικά εμπορεύματα 1 και 2, ενώ το 2^ο υποσύστημα παράγει μόνο το μη αναπαραγόμενο εμπόρευμα 3. Ο Charasoff ονομάζει το αναπαραγωγικό υποσύστημα, Grundproduction και το μη αναπαραγωγικό Nebenproduction ή Mehrproduction, ή Luxusproduction²⁹⁹.

Εν συντομία αναφέρεται ότι³⁰⁰:

Η συνολική παραγωγή του αναπαραγωγικού υποσυστήματος είναι ίση με:

$$[s_1^T \bar{A}, s_2^T \bar{A}, s_3^T \bar{A}] = s_1 + s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Για την τιμή του υποπροϊόντος³⁰¹ ισχύει:

$$ps_3 = p(I - \bar{A})(s_1 + s_2)(1 + r_\mu) = p_3$$

Η αξία των συνολικών ενδιάμεσων εισροών σε μέσα παραγωγής και μισθιακά εμπορεύματα είναι $p_1 + p_2$. Συμβολίζοντας με r το γενικό ποσοστό κέρδους του υπό εξέτασης συστήματος, ισχύει:

²⁹⁸ Βλ. Γ. Σταμάτης, (1998), σελ 96- 97.

²⁹⁹ Βλ Γ. Σταμάτης, (1995) σελ 541.

³⁰⁰ το ίδιο, σελ 542.

³⁰¹ για το πώς εξάγονται οι σχέσεις, βλ. Γ. Σταμάτης, (1995), σελ.542.

$$r = \frac{p_3}{p_1 + p_2}$$

Ο Charasoff, ορίζει πρώτα το r και μετά το p . Δηλαδή προσδιορίζει το r πριν και ανεξάρτητα από τις τιμές. Αυτό γίνεται με την κατασκευή ενός πρότυπου αναπαραγωγικού συστήματος.

Στην συνέχεια υποστηρίζει, ότι υπάρχει ένα n για το οποίο τα μέσα παραγωγής από τα οποία αποτελείται το $\bar{A}s$, έχουν την ίδια σύνθεση³⁰². Επομένως:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{A}^{n+1} s_1 - \bar{A}^{n+1} s_2 &= 0 \\ \beta \bar{A}^{n+1} s_2 - \bar{A}^{n+1} s_3 &= 0 \end{aligned}, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ θετικές σταθερές.}$$

Επομένως για το ποσοστό κέρδους του πρότυπου αναπαραγωγικού συστήματος (r_π) ισχύει:

$$\bar{r} = \frac{p \bar{A}^{n+1} s_3}{p \bar{A}^{n+1} (s_1 + s_2)} = \frac{\beta}{1 + \alpha}$$

Αν το $\bar{r}$ παριστά το ποσοστό κέρδους του αναπαραγωγικού συστήματος, σύμφωνα με τον Charasoff, το ποσοστό κέρδους του πρότυπου αναπαραγωγικού συστήματος, ισούται με το ποσοστό κέρδους του αρχικού συστήματος παραγωγής³⁰³. Συνεπώς:

$$r = \bar{r}$$

Αφού, όπως προείπαμε υπάρχει ένα ενιαίο για όλα τα εμπορεύματα, ποσοστό κέρδους, με άλλα λόγια ένα γενικό ποσοστό κέρδους, τότε ισχύει:

$$r = \frac{\beta}{1 + \alpha}$$

Έτσι, αφού προσδιοριστεί το γενικό ποσοστό κέρδους, προσδιορίζονται και οι τιμές παραγωγής. Συνεπώς στην δεδομένη περίπτωση ισχύει:

$$\frac{p_2}{p_1} = \alpha, \frac{p_3}{p_1} = \beta.$$

³⁰² το ίδιο, σελ 543.

³⁰³ Βλ Γ. Σταμάτης, (1995), σελ. 544-545.

Με άλλα λόγια συνεπάγεται το διάνυσμα των σχετικών τιμών:

$$p = \delta[1, \alpha, \beta]$$

Ποιο σύντομα

Στην γενική περίπτωση ο προσδιορισμός του διανίσματος, αφού προσδιοριστεί το γενικό ποσοστό κέρδους με τον ίδιο τρόπο, γίνεται με την λύση του συστήματος:

$$p[I - \bar{A}(1+r)] = 0$$

Στην συνέχεια για $\lambda_m^{\bar{A}} = \frac{1}{1+r}$, δηλαδή για p αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $\bar{A}$ συνεπάγεται, ένα αυστηρά θετικό ή έστω ημιθετικό διάνυσμα τιμών, που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή³⁰⁴.

5.2.2 ΧΑΡΑΖΟΦΙΑΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Έστω τα πρότυπα χαραζοφιανά συστήματα $[\bar{A}, x]$, όπου $x, x \geq 0$, το ακαθάριστο προϊόν των τυπικών υποσυστημάτων και ταυτόχρονα στην περίπτωση της απλής παραγωγής τα επίπεδα δραστηριότητας του συστήματος.

Υπενθυμίζεται ότι στα χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής, το πραγματικό ωρομίσθιο εισάγεται εξωγενώς.

Επομένως το πρόβλημα της επιλογής τεχνικής στα πλαίσια χαραζοφιανών συστημάτων τίθεται σε νέες βάσεις. Στα συστήματα αυτά, τα γνωστά κριτήρια επιλογής δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο νόημα. Αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω του ότι το πραγματικό ωρομίσθιο εισάγεται εξωγενώς και δεδομένης της κοινής σύνθεσης εισροών-εκροών το ποσοστό κέρδους³⁰⁵. Ας δούμε το τελευταίο διεξοδικότερα.

Το $w-r$ κριτήριο δεν έχει κάποιο ιδιαίτερο νόημα καθώς δεν υπάρχει μια συνάρτηση μεταξύ w και r . Αντίθετα υπάρχει μόνο μια αντιστοιχία μεταξύ πραγματικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους. Επομένως για τα διάφορα δύναται να ισχύει κάθε

³⁰⁴ βέβαια και το r είναι πάντοτε θετικό.

³⁰⁵ Και ταυτόχρονα ο πρότυπος λόγος του συστήματος

φορά ένας διαφορετικός πρότυπος λόγος- ποσοστό κέρδους των χαραζοφιανών συστημάτων.

Επιπλέον τόσο το cost minimization και ο αλγόριθμος της αγοράς δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο νόημα, καθώς μόνο απο σύμπτωση³⁰⁶ μπορεί δύο χαραζοφιανά συστήματα να έχουν το ίδιο ποσοστό κέρδους (προτυπο λόγο).

Επομένως, το πρόβλημα της επιλογής τεχνικής στα χαραζοφιανά συστήματα, έγγυται στην επιλογή εκείνης της τεχνικής η οποία έχει και το μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους.

Στα χαραζοφιανά συστήματα οι τιμές παραγωγής ορίζονται απο την σχέση³⁰⁷:

$$p^{(c)}[I - A^{(c)}(1 + r^{(c)})] = 0, (.) = a, b.$$

Εκτός της τετριμμένης λύσης $p^{(c)} = 0$, υπάρχουν άλλες n λύσεις για την $\det |I - A^{(c)}(1 + r^{(c)})| = 0$

Εκ των οποίων μια μόνο συνεπάγεται απο την θετικότητα ή τουλάχιστον την ημιθετικότητα των τιμών παραγωγής. Και αυτή είναι η $\bar{r}$:

$$\bar{r}^{(c)} = \min[r_1^{(c)}, r_2^{(c)}, r_3^{(c)}, r_4^{(c)}, \dots, r_n^{(c)}]$$

Επομένως δύναται να ισχύουν διαζευκτικά:

$$p^{(a)}[I - A^{(a)}(1 + r^{(a)})] < p^{(b)}[I - A^{(b)}(1 + r^{(b)})]$$

$$p^{(a)}[I - A^{(a)}(1 + r^{(a)})] = p^{(b)}[I - A^{(b)}(1 + r^{(b)})]$$

$$p^{(a)}[I - A^{(a)}(1 + r^{(a)})] > p^{(b)}[I - A^{(b)}(1 + r^{(b)})]$$

Απο τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι ισχύει:

$$p^{(a)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(a)}}) < p^{(b)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(b)}})$$

³⁰⁶ Η φυσικά να είναι το ίδιο σύστημα

³⁰⁷ Είναι φανερό, ότι ο εν λόγω τρόπος υπολογισμού των τιμών παραγωγής σε χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής, μοιάζει αρκετά με αυτόν του προσδιορισμού των τιμών που αντιστοιχούν στο μέγιστο ποσοστό κέρδους του συστήματος.

$$p^{(a)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(a)}}) = p^{(b)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(b)}})$$

$$p^{(a)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(a)}}) > p^{(b)}(1 - \lambda_{\max}^{A^{(b)}})$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι ο Charasoff πρώτα προσδιορίζει το ποσοστό κέρδους του συστήματος, και εν συνεχεία προσδιορίζει τις τιμές παραγωγής. Επομένως για το ποσοστό κέρδους ισχύει:

$$\frac{p^{(\cdot)}[I - A^{(\cdot)}]x^{(\cdot)}}{p^{(\cdot)}A^{(\cdot)}x^{(\cdot)}} = \bar{r}$$

Με άλλα λόγια πρόκειται για έναν λόγο δυο ομοιογενών μεγεθών του υπερπροϊόντος –που λόγω του εξωγενους προσδιορισμού του πραγματικού ωρομισθίου, ταυτίζεται με το καθαρό προϊόν- και του φθαρέντος κεφαλαίου (που εν προκειμένω εμπεριέχει και τα φθαρέντα μισθιακά εμπορεύματα).

6 John von Neumann

6.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε αναφέρει από την εισαγωγή κιόλας της παρούσας διατριβής μια από τις λίγες περιπτώσεις μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών είναι αυτή του μοντέλου του John von Neumann.

Αρχικά θα παρουσιαστεί το μοντέλο του von Neumann στην αρχική του εκδοχή. Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί μια γενικευμένη εκδοχή, η οποία βασίζεται σε αυτήν του Γ.Σταμάτη, που το παρουσιάζει σαν ένα μοντέλο επιλογής τεχνικής. Τέλος θα γίνει η προσπάθεια να αποδειχθεί εάν και κατά πόσον ένα σύστημα συγκλίνει στην λύση που δίδεται από μοντέλο του von Neumann.

6.2 Η αρχική εκδοχή

Ο von Neumann υποστηρίζει «ότι αντικείμενο της εργασίας του είναι η λύση ενός τυπικού, οικονομικού συστήματος εξισώσεων»³⁰⁸, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Παράγονται εμπορεύματα μέσω εμπορευμάτων³⁰⁹
2. Επιτρέπεται να υπάρχουν περισσότερες τεχνικά δυνατές διαδικασίες παραγωγής, απ' ό,τι εμπορεύματα. «Το πρόβλημα είναι μάλλον να καθορίσουμε ποιες διαδικασίες πράγματι θα χρησιμοποιούνται και ποιες όχι».

Στο μοντέλο Γενικής Ισορροπίας του von Neumann, η εμπορεύματα παράγονται μέσω m διαδικασιών παραγωγής. Τίθεται το ερώτημα, ποιες διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν ως κερδοφόρες, και ποιες τιμές θα προκύψουν.

Για το μοντέλο του von Neumann γίνονται οι υποθέσεις ότι:³¹⁰

- a. Είναι δυνατόν $m > n$ και συνεπώς, το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με τη γνωστή λύση των εξισώσεων³¹¹.

³⁰⁸ J. von Neumann (1949) σελ 1.

³⁰⁹ Στην περίπτωση του μοντέλου του von Neumann τα εμπορεύματα είναι αναπαραγόμενα, καθώς όλα εισέρχονται άμεσα ή έμμεσα στην (ανα)παραγωγή της εργασίας.

³¹⁰ οι υποθέσεις a-g γίνονται ρητά από τον von Neumann v.N, ενώ οι h-i από τον D. G. Champernowne (1945), ενώ οι j-k από τον D. Simpson (1970) σελ.153-154.

³¹¹ εδώ μπορούμε να πούμε ότι ο von Neumann κάνει κάποια νύξη για την ύπαρξη μη τετράγωνων τεχνικών. Βλ και Bidard (1986)

- b. Υπάρχουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας (Σ.Α.Κ)
- c. Οι φυσικοί συντελεστές παραγωγής, συμπεριλαμβανομένου και της εργασίας, μπορούν να εκτείνονται σε απεριόριστες ποσότητες
- d. Οι διαδικασίες, οι οποίες παράγουν τα μισθιακά εμπορεύματα, είναι αυτές που τροφοδοτούν την κατανάλωση των εργατών
- e. Η φθορά «κεφαλαιουχικών αγαθών» περιγράφεται, με την εισαγωγή διαφορετικών βαθμίδων φθοράς, ως ξεχωριστά εμπορεύματα³¹² για κάθε μια από αυτές³¹³
- f. Η κάθε μια διαδικασία παραγωγής είναι διάρκειας μιας μονάδας χρόνου, ενώ διαδικασίες παραγωγής μεγαλύτερης διάρκειας, διασπώνται σε απλές διαδικασίες μοναδιαίας διάρκειαςΦ.
- g. Μπορεί να υπάρξει, η ειδική περίπτωση, όπου ένα εμπόρευμα μπορεί να παραχθεί μόνο από κοινού με ορισμένα άλλα (είναι δηλαδή δυνατή η ύπαρξη σύνθετης παραγωγής).
- h. Οι εργάτες καταναλώνουν όλο το εισόδημά τους και οι καπιταλιστές αποταμιεύουν και (επαν)επενδύουν όλο το εισόδημά τους
- i. Υπάρχει τέλειος ανταγωνισμός, όπου μεταφράζεται στην ύπαρξη ενός ενιαίου συντελεστή επιτοκίου (ποσοστού κέρδους)
- j. Τόσο η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσανυξημένη μήτρα των εισροών σε μέσα παραγωγής, η A ³¹⁴, όσο και η μήτρα των εκροών, η B , είναι διαστάσεων $n \times m$ ³¹⁵.
- k. Δεν υπάρχει εξωγενής ή τελική ζήτηση

Δεδομένου ότι τα εμπορεύματα παράγονται μέσω εμπορευμάτων, ο von Neumann θέλει να προσδιορίσει ποιές διαδικασίες θα χρησιμοποιηθούν, με ποιά ταχύτητα θα αυξάνεται η συνολική ποσότητα εμπορευμάτων (ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας),

³¹² Η εισαγωγή εμπορευμάτων γίνεται με την προσθήκη μιας γραμμής και μιας στήλης, στην κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσανυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών και στην μήτρα των εκροών.

³¹³ βλ. Michio Morishima Walras Economics (1970) ch. Capital and money reconsidered

³¹⁴ σε αντίθεση με τον ορισμό γραμμών και στηλών που υιοθετεί ο von Neumann στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τον έως τώρα γνωστό ορισμό γραμμών- στηλών. Όπου κάθε στοιχείο a_{ij} παριστά στην ποσότητα του εμπορεύματος i που εισέρχεται άμεσα ως μέσο παραγωγής /ή και ως μισθιακό εμπόρευμα στην παραγωγή μιας μονάδας του εμπορεύματος j .

³¹⁵ Όμως η ύπαρξη της κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσανυξημένης μήτρας των τεχνικών συντελεστών χαρακτηρίζει την ύπαρξη ενός αναπαραγωγικού συστήματος παραγωγής.

καθώς και ποιές τιμές που θα προκύψουν και ποίο θα είναι το ύψος του επιτοκίου (ποσοστού κέρδους).

Ορίζονται οι ορθογώνιες μήτρες A και B , διαστάσεων n (εμπορεύματα) $\times$ m (διαδικασίες). Άγνωστοι είναι το διάνυσμα των n τιμών (p), το ποσοστό κέρδους (r) καθώς και το διάνυσμα των m επιπέδων δραστηριότητας (x) και ο ρυθμός μεγέθυνσης του συστήματος (g)

Επομένως ισχύουν οι σχέσεις:

$$gAx \leq Bx \quad (1)$$

$$rpA \geq pB \quad (2)$$

Αν στις παραπάνω εξισώσεις ισχύουν αυστηρά οι ανισότητες, τότε πρέπει να ισχύουν για την (1) και την (2), το $p=0$ και το $x=0$ αντίστοιχα. Πράγμα που σημαίνει, στην πρώτη εξίσωση, ότι αν καταναλώνονται λιγότερα εμπορεύματα από όσα παράγονται τότε $p=0$, δηλαδή τα εμπορεύματα γίνονται ελεύθερα. Ενώ στην δεύτερη αν μια διαδικασία είναι μη κερδοφόρα τότε αυτή δεν χρησιμοποιείται, δηλαδή το $x=0$. Σε αυτήν την περίπτωση ο von Neumann εισάγει την περίπτωση ύπαρξης ελευθέρων εμπορευμάτων- των οποίων δηλαδή η τιμή είναι ίση με μηδέν-.

Στο σύστημα επομένως υπάρχουν $m+n$ εξισώσεις και $m+n+2$ αγνώστοι. Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό παίρνουμε σχετικά επίπεδα δραστηριότητας και σχετικές τιμές. Μας ενδιαφέρουν δηλαδή, όπως αναφέρει και ο v.N, μόνο οι αναλογίες $x_1: \dots : x_m$ και $p_1: \dots : p_n$. Έτσι οι αγνώστοι μειώνονται σε $m+n$. Όμως, κατά τον v.N επειδή οι (1) και (2) δεν είναι ισότητες, αλλά «μάλλον περίπλοκες ανισότητες», τίποτε δεν εγγυείται, ότι το σύστημα έχει όντως λύση, παρότι ο αριθμός των σχέσεων είναι ίσος, με αυτόν των αγνώστων.

Μάλιστα παρατηρεί μια δυική συμμετρία³¹⁶ των όρων x, g και p, r αντίστοιχα, των σχέσεων (1) και (2) καθώς και των όρων «μη χρησιμοποιούμενη διαδικασία» και ελεύθερα αγαθά αντίστοιχα.

³¹⁶ Αναφορά στην δικιότητα των τιμών με τις τεχνικές κάνουν και Ch.Bidard και N.Salvadori (1995), όπου ενδεικτικά αναφέρουμε τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουν:

Οι Bidard και Salvadori ορίζουν τον διανυσματικό χώρο που σχηματίζουν τα διανύσματα ℓA^h ($h=1,2,3,\dots,s$) και εξετάζουν κατά πόσον από αυτές προκύπτουν διανύσματα τιμών παραγωγής, που να ανήκουν στον ίδιο διανυσματικό χώρο. Δηλαδή προσπαθούν να σχετίσουν τις τιμές παραγωγής με την έμμεση (νεκρή) εργασία που απαιτήσε η παραγωγή των μέσων παραγωγής. Με άλλα λόγια ελέγχουν αν οι τιμές παραγωγής είναι προϊόν γραμμικού μετασχηματισμού της νεκρής εργασίας που απαιτήσε η παραγωγή των μέσων παραγωγής.

Οι Bidard και Salvadori εξετάζουν αν και κατά πόσον είναι δυνατόν από μια τεχνική $[A, \ell]$ να συνεπάγονται διανύσματα τιμών για κάθε ύψος του r , $-1 \leq r_i \leq R$. Δηλαδή ελέγχουν εάν οι τιμές είναι συνεχής συνάρτηση του r ή απλώς είναι μια αντιστοιχία (correspondence), ακόμα και στην περίπτωση όπου η διάσταση του υπο εξέτασιν διανυσματικού χώρου είναι μικρότερη από τον αριθμό των διαδικασιών. Αναφέρονται δηλαδή, στην περίπτωση όπου οι στήλες της A είναι γραμμικώς εξαρτημένες και συνεπώς αναφέρονται στην περίπτωση μιας ιδιάζουσας μήτρας A .

Στο σημείο αυτό εξετάζουμε το οικονομικό νόημα των προτάσεων των Bidard και Salvadori.

Πρόταση 1:

Υποστηρίζουν ότι στο διάστημα $-1 \leq r_i \leq R$ υπάρχουν s στον αριθμό (όσο και η διάσταση του E) γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τιμών παραγωγής, που αντιστοιχούν σε $s+1$ τιμές του r . Καθώς επίσης, ότι κάθε διάνυσμα $\begin{bmatrix} w_i \\ p_i(1+r_i) \end{bmatrix}, i=1, 2, 3, \dots, s+1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Δηλαδή υποστηρίζουν κάτι ήδη γνωστό από την βιβλιογραφία, ότι στο οικονομικά σημαντικό διάστημα των τιμών, δηλαδή στο $-1 \leq r \leq R$

Πρόταση 2:

Στην πρόταση αυτή, οι Bidard και Salvadori, υποστηρίζουν, ότι τα $s+1$ διανύσματα τιμών παραγωγής, που παράγονται από $s+1$ διακριτά ποσοστά κέρδους, είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε είναι απολύτως δυνατόν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα για κάθε ύψος του r , τα διανύσματα $p(r)$, ℓA^h ($h=1,2,\dots,s+1$) και το βαθμωτό w .

Πρόταση 3:

Στην 3η πρόταση οι Bidard και Salvadori υποστηρίζουν ότι όταν για δεδομένο r_i οι τιμές παραγωγής και το ονομαστικό ωρομίσθιο συμπίπτουν, τότε οι μήτρες A και F , συμπίπτουν, αν $\text{rank}[A]=\text{rank}[F]$.

Πρόταση 4:

Στην τέταρτη περίπτωση οι συγγραφείς παίρνουν την περίπτωση, όπου τα διανύσματα των τιμών είναι γραμμικώς εξαρτημένα, και μεταξύ τους υπάρχουν και κάποια s γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τιμών. Διατυπώνουν δηλαδή τις συνθήκες, όπου από μια τεχνική, $[A, \ell]$, με $A, \ell \geq 0$, μπορούν να

Σκοπός του von Neumann είναι να λύσει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$x \geq 0 \quad (1)$$

$$p \geq 0 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j > 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i > 0 \quad (4)$$

$$gAx \leq Bx \quad (5)$$

$$rpA \geq pB \quad (6)$$

Διαπιστώνει όμως, ότι υπάρχουν λύσεις των (1-6), οι οποίες είναι δυνατόν να ισχύουν για διαφορετικά $x_1: \dots : x_m$ και $p_1: \dots : p_n$. Αυτό όμως που προκαλεί εντύπωση είναι, ότι όλες τις λύσεις r και g «οφείλουν να έχουν την ίδια τιμή», δηλαδή να προσδιορίζονται μονοσήμαντα.

παραχθούν $s+1$ διανύσματα τιμών παραγωγής που συναρτώνται με τα αντίστοιχα $s+1$ ονομαστικά ωρομίσθια και ποσοστά κέρδους.

Πρόταση 5:

Στην πρόταση αυτή οι συγγραφείς προσπαθούν να διατυπώσουν την συνθήκη εκείνη η οποία εξασφαλίζει, βάση και των υποθέσεων της πρότασης 4, ότι από ένα ποσοστό κέρδους r_0 , συνεπάγονται το διάνυσμα των τιμών παραγωγής p_0 και το ονομαστικό ωρομίσθιο w_0 . Δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση(και όχι αντιστοιχία) που συνδέει το r με το διάνυσμα p και το βαθμωτό w .

Πρόταση 6:

Στην έκτη πρόταση έχουμε μια σύνθεση- γενίκευση των 5 παραπάνω προτάσεων, δηλαδή για έναν τυχαίο αριθμό από δείκτες (-διαδικασίες) μπορούμε να μεταβούμε σε μια κανονική τεχνική και μια σχέση μεταξύ r , w και r για τις οικονομικά σημαντικές τιμές του r .

Στην συνέχεια ο von Neumann προτείνει έναν «απλό τρόπο», ώστε να προσδιορίσει αμέσως τα r και g .³¹⁷ Υποθέτει μάλιστα για λόγους απλούστευσης ότι:

Ισχύει πάντοτε το $A+B>0$, όπου $A, B \geq 0$

Συνεχίζοντας στον προσδιορισμό των r και g , υποθέτει μια υποθετική λύση x, g και p, r των (1-4). Ο von Neumann αποκλείοντας τις περιπτώσεις των αυστηρών ανισοτήτων στις (5) και (6), όπου τα $x=p=0$ θα παραβίαζαν τις σχέσεις 3 και 4 αντίστοιχα.

Ορίζει το ποσοστό κέρδους και το ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος ως εξής:

$$g = \underset{j=1,2,\dots}{Min} \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad (7)$$

$$r = \underset{j=1,2,\dots}{Max} \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad (8)$$

Είναι εμφανές, ότι η (7) και (8) δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{0}{0}$, η οποία συν τοις άλλοις αντιβαίνει στις (1-4) και (7). Με αυτόν τον τρόπο, απλοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις ως εξής:

$$g = \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad (9)$$

$$r = \frac{\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j} \quad (10)$$

³¹⁷ είναι εμφανής η ομοιότητα του συλλογισμού του με την λύση που δίνει ο von Charasoff για τον υπολογισμό του ποσοστού κέρδους πριν και ανεξάρτητα από τις τιμές.

Όμως στις (7) και (8), τα x, p θεωρούνται δεδομένα. Επομένως ο von Neumann έχει να λύσει τις $(i-v_i)$ ως προς x_j και p_i

Στην συνέχεια προχωράμε στην λύση των σχέσεων:

$$x' \geq 0 \quad (11)$$

$$p' \geq 0 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j' > 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i' > 0 \quad (14)$$

$$gAx' \leq Bx \quad (15)$$

$$rp'A \geq pB' \quad (16)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\Phi(x_j, p_i) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} x_j' p_i'}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j' p_i'} \quad (17)$$

Έστω πάλι ότι τα x και p , οι υποθετικές λύσεις, και x' και p' τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν όμως τις συνθήκες (1-4) και (a-d) αντίστοιχα.

Στην συνέχεια παρατηρεί, ότι η $\Phi(X, P')$ παίρνει την ελάχιστη της τιμή ως προς P' , εάν $P' = P$ (15), και ότι η $\Phi(X', P)$ παίρνει την μέγιστη της τιμή ως προς X' , εάν $X' = X$ (16).

Έτσι το ζήτημα τίθεται από τον v.N ως εξής:

«Ορίζουμε την (X', P') όπου το πεδίο ορισμού της φράζεται από τις a-d. Έτσι ζητούμε»: «Να βρεθεί ένα σαγμοειδές σημείο $X' = X$, $P' = P$, όπου δηλαδή η (X, P') παίρνει την ελάχιστη του τιμή ως προς P' και την μέγιστη της η (X', P) ως προς X' ».

Από τις (5) (15^{*}) και (8) καθώς και (6), (16^{*}) και (17) προκύπτει:

$$\Phi(x_j, p_i) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} x_j ' p_i '}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j ' p_i '} = r \quad (18)$$

$$\Phi(x_j, p_i) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} x_j ' p_i '}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j ' p_i '} = g \quad (19)$$

Επομένως για τον von Neumann: «το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί, εάν δηλαδή η

03 - Norah Jones - Light as a Feather.mp3 $\Phi(X', P')$ έχει ένα σαγμοειδές σημείο $X'=X$, $P'=P$ ώστε $r=g=\Phi(X,P)=$ η τιμή στο σαγμοειδές σημείο»³¹⁸.

Στην συνέχεια, και λόγω της ομογένειας της $\Phi(X', P')$ ως προς τα X' και P' , το πρόβλημα δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την τυποποίηση των επιπέδων δραστηριότητας και των τιμών αντίστοιχα με :

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (21)$$

Στην συνέχεια ο von Neumann χρησιμοποιώντας, και αποδεικνύοντας ένα λήμμα σταθερού σημείου, φτάνει και στο βασικό συμπέρασμά του, ότι υπάρχει μία τουλάχιστον λύση των x, p, r, g , όπου τα g, r έχουν την ίδια αριθμητική τιμή. Με άλλα

³¹⁸ Βλ. John von Neumann (1937) σελ5

λόγια το ποσοστό κέρδους και ο υλικός ρυθμός μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ίσοι και μονοσήμαντα προσδιορισμένοι για όλες τις σχετικές δυνατές διαδικασίες.

Φθάνει στο συμπέρασμα ότι ο μέγιστος (καθαρά τεχνικά δυνατός) συντελεστής μεγέθυνσης της οικονομίας είναι ίσος με τον ελάχιστο συντελεστή επιτοκίου.

6.3 Μια γενικευμένη εκδοχή

Στην συνέχεια παρουσιάζεται, όπως αναφέραμε και παραπάνω, μια ακόμα εκδοχή βασισμένη, σε αυτήν του Γ. Σταμάτη, στο άρθρο του « Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς ή πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής». Στο άρθρο αυτό³¹⁹, αποδεικνύεται ότι «...υπάρχει ένα μέγιστο ποσοστό κέρδους, το οποίο είναι ίσο με τον ως προς τις επενδύσεις μέγιστο υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος».

Έτσι τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

Έστω A , η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα προσαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας και B η μήτρα των εκροών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας³²⁰. Και οι δύο μήτρες, είναι διαστάσεων $n \times m$, όπου $n < m$. Έτσι το υπό εξέταση σύστημα, χαρακτηρίζεται από την τεχνολογία $[A, B]$. Επομένως το σύστημα αποτελείται από $\binom{m}{n}$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής, οι οποίες δύνανται να παράξουν και τα n εμπορεύματα.

Στην συνέχεια ορίζονται οι τεχνικές $[A^{(d)}, B^{(d)}]$, $d \in D = \{1, 2, \dots, \binom{m}{n}\}$, όπου $A^{(d)}$ και $B^{(d)}$, η κατά τα μισθιακά εμπορεύματα $n \times n$ προσαυξημένη μήτρα των τεχνικών συντελεστών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας και η μήτρα των εκροών, ανά μονάδα άμεσης εργασίας, αντίστοιχα. Επιπλέον, καμία από δυο αυτές μήτρες δεν έχει

³¹⁹ Γ. Σταμάτης, (1996) σελ. 207-230.

³²⁰ Υποθέτουμε, ότι καμία στήλη και γραμμή της A και της B δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων γραμμών και στηλών της A και της B αντίστοιχα.

μηδενικές στήλες³²¹, δηλαδή δεν υπάρχουν εισροές χωρίς εκροές και τούμπαλιν. Επιπλέον, για την $B^{(d)}$ ισχύει, ότι καμία της γραμμή δεν είναι μηδενική, με άλλα λόγια, ότι δύναται να παράγει, όλα τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα³²². Γίνεται για μία ακόμα φορά η υπόθεση, ότι και στις $A^{(d)}$ και $B^{(d)}$ δεν υπάρχουν γραμμικώς εξαρτώμενες γραμμές και στήλες, δηλαδή οι μήτρες αυτές δεν είναι ιδιάζουσες. Επιπλέον, όλες οι τεχνικές $[A^{(d)}, B^{(d)}]$ διαφέρουν ανά δύο κατά μία διαδικασία παραγωγής.

Επιπλέον λόγω του, ότι $m > n$, δύναται να υπάρχουν και τεχνικές $[A^{(f)}, B^{(f)}]$, που διαφέρουν από κάποια άλλη τεχνική $[A^{(g)}, B^{(g)}]$, κατά μία ή περισσότερες ή όλες τις n διαδικασίες παραγωγής³²³.

Εκτός από τις διαθέσιμες $\binom{m}{n}$, τεχνικές παραγωγής, υπάρχουν -στην περίπτωση που υπάρχουν διαχωρίσιμες³²⁴ ή διασπώμενες τεχνικές- και σ , έστω στο πλήθος, τεχνικές που περιλαμβάνουν τα ανεξάρτητα τμήματα των αρχικών $\binom{m}{n}$ τεχνικών. Στην περίπτωση που είναι διασπώμενες παράγει k στον αριθμό εμπορεύματα, όπου k , $0 \leq k < n$, χρησιμοποιώντας k διαδικασίες παραγωγής. Αντίθετα, στην περίπτωση που είναι διαχωρίσιμες, παράγει k εμπορεύματα, όπου k , $0 \leq k \leq n$, χρησιμοποιώντας k διαδικασίες παραγωγής.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε, ότι υπάρχουν $\xi = \binom{m}{n} + \sigma$ διαθέσιμες τεχνικές, οι οποίες δύνανται να παράξουν από ένα μέχρι και τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα.

Επιπλέον γίνεται η υπόθεση, ότι καμία διαδικασία παραγωγής δεν είναι πλήρως αυτοματοποιημένη³²⁵, Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα αναπαραγωγικό εμπόρευμα. Έτσι αποκλείεται η περίπτωση ένα σύστημα να διαλύεται σε δύο ή

³²¹ $a_j \geq 0$ και $b_j \geq 0$.

³²² $b_{ij} \geq 0$.

³²³ $g, f \in D$ και $g \neq f$.

³²⁴ Διαχωρίσιμες εννοούμε τις τεχνικές, που δύνανται να παράγει ένα ακαθάριστο προϊόν, που περιέχει όλα τα n δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα, σε θετικές ποσότητες, χρησιμοποιώντας λιγότερες από τις n διαδικασίες παραγωγής.

³²⁵ Δηλαδή η άμεση εργασία εισέρχεται άμεσα ή έμμεσα σε όλες τις διαδικασίες παραγωγής.

περισσότερα ,μεταξύ τους ανεξάρτητα, υποσυστήματα, τα οποία παράγουν διαφορετικά -το ένα από το άλλο- εμπορεύματα.

Επιπλέον γίνεται η υπόθεση, ότι οι τεχνικές ,για τις οποίες γίνεται λόγος στο άρθρο, είναι τετράγωνες.

Είναι δυνατόν να υπάρχουν, είτε τεχνικές απλής παραγωγής, είτε τεχνικές σύνθετης παραγωγής³²⁶. Στην περίπτωση της απλής παραγωγής μπορούμε να έχουμε είτε διασπώμενες, είτε μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής . Αντίθετα μια τεχνική σύνθετης παραγωγής, είναι δυνατόν και αυτή να είναι διασπώμενη, ή μη διασπώμενη. Όμως στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής έχουμε 4 υποπεριπτώσεις τεχνικών. Είτε αυτές είναι μη διαχωρίσιμες και μη διασπώμενες, είτε διαχωρίσιμες και μη διασπώμενες, είτε διαχωρίσιμες και διασπώμενες, είτε μη διαχωρίσιμες και διασπώμενες.

Γίνεται επιπλέον η παραδοχή, ότι μια τεχνική γίνεται να διασπάται απλά, δηλαδή σε δύο τμήματα, είτε πολλαπλά δηλαδή τ φορές σε τ+1 τμήματα.

Τελευταία υπόθεση που γίνεται είναι αυτή ότι, κάθε τεχνική είναι r_0 -προσοδοφόρα³²⁷. Στην περίπτωση που είναι μη διασπώμενη ή διασπώμενη, ισχύει αντίστοιχα:

$$[B^{(d)} - (1+r_0) A^{(d)}] > 0 \quad (22)$$

και

$$[B^{(d)} - (1+r_0) A^{(d)}] \geq 0 \quad (23)$$

Βέβαια $(1+r_0) A^{(d)} \geq 0 \Rightarrow -1 > r_0$, όπου r_0 ένα βαθμωτό.

Για λόγους απλούστευσης δεχόμαστε, ότι $-1 < r_0 \leq 0$.

Έτσι για μη διασπώμενες και διασπώμενες τεχνικές έχουμε αντίστοιχα:

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} > 0 \quad (24)$$

και

³²⁶ στο άρθρο αυτό υποτίθεται η ύπαρξη «ομαλά» συμπεριφερόμενων διασπώμενων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής.

³²⁷ Βλ. Γ.Σταμάτη (1996) σελ 151-203

$$[B^{(d)} - A^{(d)}]^{-1} \geq 0 \quad (25)$$

Στην συνέχεια ορίζεται το $1 \times n$ διάνυσμα p^v , των τιμών των n δυνάμεων να παραχθούν εμπορευμάτων, από τις ξ διαθέσιμες τεχνικές παραγωγής. Σε κάθε τεχνική αντιστοιχεί ένα μόνο διάνυσμα p^v για το οποίο ισχύει:

$$p^v \geq 0 \quad (26)$$

Επιπλέον ορίζεται το $m \times 1$ διάνυσμα, x^v , των m επιπέδων δραστηριοτήτων του συστήματος. Κάθε τέτοιο διάνυσμα έχει k θετικές και $m-k$ μηδενικές συνιστώσες. Με άλλα λόγια

$$x^v \geq 0 \quad (27)$$

Έτσι σε κάθε x^v αντιστοιχεί μια τεχνική παραγωγής, ενώ σε κάθε τεχνική παραγωγής αντιστοιχεί ένα διάνυσμα τιμών p^v .

Βάσει όλων αυτών, προσδιορίζεται το ποσοστό κέρδους αφού τυποποιήσουμε, με οποιοδήποτε τρόπο τα διανύσματα των τιμών, ώστε να είναι πλήρως προσδιορισμένα, τότε βάσει της τεχνολογίας $[A, B]$ έχουμε, για το ποσοστό κέρδους $r^v(p^v, x^v)$ της τεχνικής v ³²⁸:

$$r^v(p^v, x^v) = \frac{p^v B x^v}{p^v A x^v} - 1 \quad (28), \text{ με } p^v, x^v \geq 0.$$

Έτσι στην συνέχεια τίθεται το πρόβλημα στην τελική του μορφή. Ποιο συγκεκριμένα, να βρεθεί εκείνη η τεχνική³²⁹ για την οποία το $r^v(p^v, x^v)$ να είναι μέγιστο.

Στην συνέχεια ο συγγραφέας, αφού ορίσει τα:

- $\Delta x^v = \Delta x^a = x^\beta - x^a$
- $\Delta p^v = \Delta p^a = p^\beta - p^a$
- $\Delta r^v = \Delta r^a = r^\beta - r^a$

³²⁸ αφού έχουμε ξ διαφορετικές τεχνικές παραγωγής, επομένως έχουμε και ξ διαφορετικές τιμές για το p^v , οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Με άλλα λόγια το $r^v(p^v, x^v)$ είναι ,σε τελευταία ανάλυση, διακριτή συνάρτηση του x^v .

³²⁹, δηλαδή ψάχνουμε εκείνο το x^v και εκείνες τις k από τις m διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής, οι οποίες συνεπάγονται το μέγιστο ποσοστό κέρδους.

- $x^v = x^a, p^v = p^a, r^v = r^a$

Για λόγους συντομίας αναφέρεται το αποτέλεσμα μίας μεταβολή του r^v :

$$\Delta r^a = \frac{\Delta p^a B x^a + p^a B \Delta x^a + \Delta p^a B \Delta x^a}{p^a A x^a + \Delta p^a A x^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a} - \frac{(1+r^a)[\Delta p^a A x^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a]}{p^a A x^a + \Delta p^a A x^a + p^a A \Delta x^a + \Delta p^a A \Delta x^a} \quad (29)$$

Στην συνέχεια εξάγονται οι ακόλουθες συνθήκες, ώστε το r^v να είναι μέγιστο:

- $\Delta r^a \leq 0$
- Μετά από πράξεις, προκύπτει από την σχέση για την μεταβολή του r^v :

$$p^a [B - (1+r^a)A] \Delta x^a + \Delta p^a [B - (1+r^a)A] x^a + \Delta p^a [B - (1+r^a)A] \Delta x^a \leq 0$$

Η συνθήκη αυτή όμως, έχει και ένα οικονομικό νόημα. Έτσι, για να είναι το ποσοστό κέρδους της τεχνικής v , μέγιστο, πρέπει τα υπερκέρδη που δημιουργούνται από μια μεταβολή Δx^a , και αντίστοιχα από μια μεταβολή Δp^v , -από την μετάβαση από την μια τεχνική σε μία άλλη- πρέπει να είναι μικρότερα ή ίσα του μηδενός.

Στην συνέχεια, και βάσει των ορισμών για τις μεταβολές των Δx^v και Δp^v , παίρνουμε, αφού συμβολίσουμε ως $C \equiv [B - (1+r^z)A]$, την ακόλουθη συνθήκη:

$$p^b C x^b \leq p^a C x^a \quad (30)$$

και για $p^b C x^a = 0$ η³³⁰:

$$p^b C x^b \leq p^b C x^a \quad (31)$$

Στην συνέχεια, αφού προσδιορίστηκαν οι συνθήκες με τις οποίες το ποσοστό κέρδους είναι για μία τεχνική, είναι μέγιστο, εξετάζεται και το ζήτημα του προσδιορισμού του υλικού ρυθμού μεγέθυνσης του συστήματος.

Ορίζεται³³¹ πλέον το $x^* m \times 1$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριοτήτων του συστήματος. Το διάνυσμα αυτό έχει k θετικές συνιστώσες και $m-k$ μηδενικές. Δηλαδή τα μηδενικά στοιχεία στο διάνυσμα δραστηριοτήτων είναι αυτά που αποκλείουν τις $m-k$ διαδικασίες παραγωγής, που δεν μεγιστοποιούν το ποσοστό

³³⁰ η απόδειξη αυτού βρίσκεται στο υπό εξέταση άρθρο, και έτσι θα ήταν περιττό να αναφερθούμε σε αυτήν.

³³¹ τα σύμβολα x και p είναι διαφορετικά διανύσματα από αυτά που εμφανίστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου.

κέρδους, και κατά συνέπεια δεν χρησιμοποιούνται. Έτσι αν στις μήτρες A και B αποκλειστούν οι διαδικασίες παραγωγής, που αντιστοιχούν σε μηδενικές συνιστώσες του διάνυσματος x^* , προκύπτουν οι $k \times k$ μήτρες A^* και B^* . Επιπλέον ορίζεται, το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^k$ διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας που αντιστοιχούν στην μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνικής, $[A^*, B^*]$. Ομοίως ορίζουμε και το $1 \times k$ p διάνυσμα των τιμών³³² που αντιστοιχεί στην τεχνική $[A^*, B^*]$. Το οποίο είναι θετικό, δηλαδή

$$p > 0 \quad (32)$$

Συνεπώς για το ποσοστό κέρδους r^* ισχύει:

$$r^*(p, x) = \frac{pB^*x}{pA^*x} - 1 \quad (33)$$

Συνεπάγεται ότι:

$$p^*[B^* - (1 + r^*)A^*]x = 0 \quad (34)$$

και επειδή το x είναι μη προσδιορισμένο και θετικό ισχύει:

$$p^*[B^* - (1 + r^*)A^*] = 0 \quad (35)^{333}$$

Στην συνέχεια γίνεται η υπόθεση, ότι στην τεχνική $[A^*, B^*]$ αντιστοιχεί ένας ενιαίος για τα k πράγματι παραχθέντα εμπορεύματα, ενιαίος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης μ^* , ο οποίος να είναι ίσος με τον μέγιστο ρυθμό μεγέθυνσης. Επομένως:

$$r^* = \mu^* \quad (36)$$

Σχηματίζεται το σύστημα φυσικών ποσοτήτων:

$$B^*x = (1 + \mu^*)A^*x \quad (37)$$

Θεωρείται ότι $(B^* - A^*)^{-1} > 0$

Και για το σύστημα τιμών παίρνουμε ότι:

³³² το οποίο είναι πλήρως προσδιορισμένο, εξαιρέσει ενός βαθμωτού.

³³³ πρόκειται δηλαδή για το γνωστό μας σύστημα τιμών.

$$p(I - r^* H^*) = 0 \quad (38)$$

$$, \text{ όπου } H^* = A^* (B^* - A^*)^{-1} (\geq 0)$$

Αντίστοιχα παίρνουμε για το σύστημα των φυσικών ποσοτήτων:

$$(I - \mu^* Z^*) = 0 \quad (39)$$

$$, \text{ όπου } Z^* = B^* - A^*)^{-1} A^* (\geq 0)$$

Όμως το p και το x είναι αριστερό και δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας H^* και Z^* αντίστοιχα.

Συνεπώς³³⁴:

$$r^* = \frac{1}{\lambda_{H^*}} > 0 \quad (40)$$

και

$$\mu^* = \frac{1}{\lambda_{Z^*}} > 0 \quad (41)$$

Άρα υπάρχει λύση στο σύστημα του von Neumann , όταν $r^* = \mu^*$. Όμως, όπως αναφέρεται παραπάνω, είναι δυνατόν να υπάρχουν παραπάνω από μία μεγιστοποιούσες το ποσοστό κέρδους τεχνικές. Συνεπώς υπάρχουν παραπάνω από ένα αντίστοιχα x^* , τα οποία μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους. Το σύστημα που περιγράφεται είναι πρότυπο, αφού εισροές, εκροές και υπερπροϊόν, έχουν την ίδια σύνθεση, και πρότυπο λόγο ίσο με μ^* , πράγμα που φαίνεται από το σύστημα φυσικών ποσοτήτων³³⁵.

³³⁴ όπου λ_{H^*} και λ_{Z^*} οι μέγιστες ιδιοτιμές των μητρών H^* και Z^* αντίστοιχα

³³⁵ είναι σαφής η ομοιότητα του με το σύστημα του Charasoff και μάλιστα είναι όμοιος ο τρόπος προσδιορισμού του ποσοστού κέρδους.

Στην συνέχεια το άρθρο, πραγματεύεται το πρόβλημα του von Neumann σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης³³⁶. Η τελευταία μέθοδος, όμως δεν είναι η κατάλληλη για την πραγμάτευση του προβλήματος αυτού.³³⁷ Η πραγμάτευση του, δεν θα παρουσιαστεί στο παρόν κείμενο, αφού μπορεί εύκολα να βρεθεί στο πρωτότυπο άρθρο. Είναι αρκετό να αναφερθεί ότι στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, δεν αναζητούμε τον μέγιστο υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, αλλά τον μέγιστο ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης. Δηλαδή για να είναι πλήρης ο παραπάνω τρόπος επίλυσης, και να απαντάει στο πρόβλημα του von Neumann, πρέπει επιπλέον να αποδείξει κάποιος, ότι ο μέγιστος υλικός ρυθμός μεγέθυνσης ισούται με τον μέγιστο ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος. Τέλος για να υπάρχει λύση, στο πρότυπο αυτό σύστημα, πρέπει επιπλέον να ισχύει εκτός του $r^* = \mu^*$ και $p=p^* > 0$ και $x=x^* > 0$

Στην συνέχεια στο άρθρο, δύνεται η λύση του συστήματος, στις περιπτώσεις:

- διασπώμενων και μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής

Έτσι, θα αναφερθούμε στη λύση για κάθε δυνατό είδος τεχνικών. Υποθέτοντας, ότι

πλέον υπάρχουν $\xi = \binom{m}{n}$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής, οι οποίες

δύνανται να παράξουν και τα n εμπορεύματα. Αναλυτικότερα η τεχνολογία του συστήματος αποτελείται από³³⁸:

- $\zeta, \zeta \geq 0$ το πλήθος διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(a)}, B^{(a)}]$

³³⁶ Μεγιστοποιείται το ποσοστό κέρδους ($r^v = \frac{p^v Bx^v}{p^v Ax^v} - 1$), ως προς x^v και ο ονομαστικός ρυθμός

οικονομικής μεγέθυνσης $r^v = \frac{p^v Bx^v}{p^v Ax^v} - 1$, ως προς p^v .

³³⁷ Η λύση του προβλήματος σαν πρόβλημα μεγιστοποίησης- μεγιστοποίησης, προϋποθέτει, ότι το ποσοστό κέρδους είναι συνεχής συνάρτηση.

³³⁸ Γ. Σταμάτης, (1996) σελ. 231-232.

- $\eta, \eta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων μη διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\beta)}, B^{(\beta)}]$
- $\theta, \theta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\gamma)}, B^{(\gamma)}]$
- $\iota, \iota \geq 0$ το πλήθος μη διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\delta)}, B^{(\delta)}]$
- $\kappa, \kappa \geq 0$ το πλήθος διπλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\epsilon)}, B^{(\epsilon)}]$

όπου

$$\zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa = \xi$$

Στην περίπτωση λοιπόν, που υπάρχει λύση στο πρόβλημα του von Neumann και η τεχνολογία χαρακτηρίζεται, από την ύπαρξη και των 5 ειδών τεχνικών, έχουμε για το r^* και το μ^* :

$$r^* = \mu^* = \min[\lambda_{H^{(a)}}, \lambda_{H^{(\beta)}}, \lambda_{H^{(\gamma)}}, \lambda_{H^{(\delta)}} \lambda_{H^{(\epsilon)}}] = \min[\lambda_{Z^{(a)}}, \lambda_{Z^{(\beta)}}, \lambda_{Z^{(\gamma)}}, \lambda_{Z^{(\delta)}} \lambda_{Z^{(\epsilon)}}]$$

Επομένως, η λύση στο μοντέλο του von Neumann –όταν βέβαια αυτή υπάρχει-, θα είναι, για κάθε είδος τεχνικών, μια εκ των πέντε, αντίστοιχα που αναφέρθηκαν στην παραπάνω σχέση.

Στα πλαίσια του συστήματος του von Neumann, επιλέγονται εκείνα τα διανύσματα επιπέδων δραστηριοτήτων για τα οποία ισχύει:

$$(42) \quad x^v : r = \max[r^{v_1}, r^{v_2}, \dots, r^{v_s}] : r = g = \min[g^{v_1}, g^{v_2}, \dots, g^{v_s}]$$

Λεκτικά ειπωμένο επιλέγεται εκείνο το(α) μέγιστο(α) από τα ποσοστά κέρδους της κάθε τεχνικής ως προς το x^v το(τα) οποίο(α) είναι ίσο(α) με τον (τους) ελάχιστο(ους) ρυθμούς μεγέθυνσης της ίδιας τεχνικής ως προς το p^v ³³⁹.

Στην συνέχεια θα διαπιστωθεί, αν η κατάταξη των τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση των τιμών. Θα γίνει σαφές με άλλα λόγια αν η κατάταξη των τεχνικών είναι μονοσήμαντη σύμφωνα με το κριτήριο του von Neumann. Για λόγους απλούστευσης θα υποθέσουμε ότι το σύστημα δεν μεγεθύνεται αλλά μένει διαχρονικά σταθερό. Ως εκ τούτου $g \equiv 0$. Στην συνέχεια θα εξεταστεί η

³³⁹ Βλ. Γ. Σταμάτης (1995) 224

συμπεριφορά ενός συστήματος σαν αυτό του von Neumann στις παρακάτω περιπτώσεις:

6.4 Απλής παραγωγής

6.4.1 Περίπτωση 1: Οι τεχνικές που συγκρίνονται είναι μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Για το διάνυσμα τιμών της κάθε τεχνικής, ισχύει³⁴⁰:

$$(43) \quad p^{(\cdot)} = p^{(\cdot)} A(1+r^{(\cdot)})$$

Από την σχέση (16) προκύπτει:

$$\frac{1}{(1+r^{(\cdot)})} p^{(\cdot)} = p^{(\cdot)} A$$

είναι φανερό, ότι

$$\lambda_m^{A^{(\cdot)}} = \frac{1}{(1+r^{(\cdot)})} \Leftrightarrow$$

$$(44) \quad r^{(\cdot)} = \frac{1 - \lambda_m^{A^{(\cdot)}}}{\lambda_m^{A^{(\cdot)}}}$$

³⁴⁰ Στο Σταμάτης (1995) σελ 543, το ποσοστό κέρδους ορίζεται με την ακόλουθη διαδικασία:

Πολλαπλασιάζοντας με το διάνυσμα τιμών της κάθε τεχνικής με το ανάλογο διάνυσμα δραστηριοτήτων του συστήματος, X^v , παίρνουμε για το ποσοστό κέρδους για κάθε τεχνικής r^v :

$$r^v = \frac{p^v X^v}{p^v A X^v} - 1, \forall v = ij, i, j = 0, 1, 2, 3, m : i \neq j$$

Ωστόσο στα πλαίσια της δικής μας ανάλυσης θα ακολουθηθεί μια περισσότερο συμβατική παρουσίαση

Με άλλα λόγια στην περίπτωση αυτή ισχύει, ότι και σε ένα χαραζοφιανό μοντέλο απλής παραγωγής. Δηλαδή το μέγεθος $\frac{1}{(1+r^{(.)})}$ αποτελεί την μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας $A^{(.)}$.

Στα χαραζοφιανά συστήματα απλής παραγωγής ξέρουμε ότι το ποσοστό κέρδους είναι ανεξάρτητο από την τυποποίηση πολύ απλά γιατί είναι συνάρτηση της μέγιστης ιδιοτιμής της μήτρας των τεχνικών συντελεστών. (βλ. σχέση 17).

Είναι φανερό ότι ένα χαραζοφιανό σύστημα απλής παραγωγής δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύστημα παραγωγής σαν αυτό του von Neumann στην περίπτωση μιας μη μεγεθυνόμενης οικονομίας³⁴¹.

Όπως και στα χαραζοφιανά συστήματα απλής παραγωγής, είναι αρκετό για να αποφανθούμε ποια τεχνική θα επιλεγεί, να γίνει η κατάταξη τους βάσει του ποσοστού κέρδους που αποφέρει η κάθε μια. Φυσικά ο προσδιορισμός του ποσοστού κέρδους είναι ιδιαίτερα απλός και προκύπτει άμεσα από την σχέση (17).

Ωστόσο θα γίνει προσπάθεια να ελεγχθεί εκ νέου αν το σύστημα αυτό θα συγκλίνει στην τεχνική με το μέγιστο δυνατό r .

Το τελευταίο θα γίνει με την κατασκευή ενός ιδιότυπου αλγορίθμου της αγοράς³⁴²

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{(a,1)} &= \tilde{p}^{(a,0)} A^{(b)} (1+r^{(a)}) \\ \tilde{p}^{(a,2)} &= \tilde{p}^{(a,1)} A^{(b)} (1+r^{(a)}) \Leftrightarrow \\ (45) \quad \tilde{p}^{(a,t)} &= \tilde{p}^{(a,t-1)} A^{(b)} (1+r^{(a)})\end{aligned}$$

³⁴¹ Θα ήταν απολύτως δυνατόν να εισάγουμε στην έως τώρα θεώρηση μας και την περίπτωση των μεγεθυνόμενων οικονομιών. Το τελευταίο θα έκανε όμως πιο περίπλοκη την παρούσα ανάλυση, χωρίς να μας δίνει κάτι επιπλέον. Στην περίπτωση ωστόσο που επιθυμούσαμε να δοθεί ένας δυναμικός χαρακτήρας στην παρούσα ανάλυση αυτό θα γινόταν με την εισαγωγή του συστήματος των φυσικών ποσοτήτων, ήτοι:

$$\begin{aligned}x^{(.)} &= A^{(.)} x^{(.)} (1+g) \Leftrightarrow \\ [I - A^{(.)} (1+g)] x^{(.)} &= 0 \Leftrightarrow \\ C(g) x^{(.)} &= 0, C(g) \equiv [I - A^{(.)} (1+g)]\end{aligned}$$

³⁴² Βλ. Levhari(1965), Bidard(1991) και Garegnani(1966) καθώς και Π.Βουγιουκλάκη(1995)

Υποθέτουμε ότι:

$$(46) \quad \tilde{p}^{(a,0)} = \tilde{p}^{(a)}$$

(47) $\lim_{t \rightarrow \infty} p^{(a,t)} = p^{(b)}$, με άλλα λόγια οι τιμές της τεχνικής (α) μετά από t χρονικές στιγμές³⁴³ συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής β.

Από την (20) και από την (21),(22) και την (16) προκύπτει³⁴⁴:

$$(48) \quad \tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)} = [\tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)}] [A^{(b)}(1+r^{(a)})]^t$$

Ωστόσο για να ισχύει η (7) πρέπει να ισχύει η :

$$(49) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [A^{(b)}(1+r^{(a)})]^t = 0$$

Με άλλα λόγια η μήτρα $[A^{(b)}(1+r)]^t$ πρέπει να είναι συγκλίνουσα. Από τα θεωρήματα Perron Frobenius γνωρίζουμε ότι:

Η (28) ισχύει αν ισχύει:

$$(50) \quad \lambda_m^{A^{(b)}}(1+r^{(a)}) < 1 \Leftrightarrow \lambda_m^{A^{(b)}} < \frac{1}{(1+r^{(a)})} \Leftrightarrow \lambda_m^{A^{(b)}} < \lambda_m^{A^{(a)}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να συγκλίνει ο αλγόριθμος της αγοράς σε μια τεχνική, πρέπει αυτή για την δεδομένη τιμή του r, να είναι r-παραγωγική³⁴⁵.

Με άλλα λόγια η τεχνική β θα επιλεγεί στην περίπτωση κατά την οποία η τεχνική β είναι $r^{(a)}$ -παραγωγική, για το ποσοστό κέρδους και κατ' επέκταση για τις τιμές παραγωγής της τεχνικής α.

Με άλλα λόγια η τεχνική με το r είναι εκείνη η τεχνική η οποία δύναται να είναι r-παραγωγική για το ποσοστό κέρδους οποιασδήποτε άλλης τεχνικής.

³⁴³ Η διαφορετικά ειδομένο μετά από t αλλαγές t τεχνικών οι τιμές συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής (β)

³⁴⁴ Π.Βουγιουκλάκης (1995) σελ.228-233

³⁴⁵ Βλ. Γ. Σταμάτης (1996) σελ.151-168

Κατά συνέπεια στα πλαίσια του συστήματος του von Neumann η επιλογή της τεχνικής είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση όπως και σε κάθε χαραιοφιανό σύστημα απλής παραγωγής. Όποιο και αν είναι το τυπικό εμπόρευμα, η κατάταξη των τεχνικών μένει αμετάβλητη, καθώς το ποσοστό κέρδους του συστήματός είναι συνάρτηση της ιδιοτιμής της μήτρας των τεχνικών συντελεστών (βλ. σχέση (17)) και μόνο. Οποιαδήποτε αλλαγή των απολύτων τιμών στην σχέση (21), με άλλα λόγια να πολλαπλασιαστούν από δεξιά με ένα διάνυσμα στήλης, που παριστά το τυπικό εμπόρευμα, και τα δύο μέλη της σχέσης 21, αφήνει ανεπηρέαστη την σχέση (21), αφού η ισότητα εξακολουθεί να ισχύει.

6.4.2 Περίπτωση 2: Οι τεχνικές που συγκρίνονται είναι διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Έστω ότι η μήτρα τεχνικών συντελεστών είναι της μορφής:

$$A^{(.)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & A_{12}^{(.)} \\ 0 & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$$

Για το διάνυσμα τιμών ισχύει:

$$(51) \quad \begin{bmatrix} p_I^{(.)} & p_{II}^{(.)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_I^{(.)} & p_{II}^{(.)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & A_{12}^{(.)} \\ 0 & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix} (1+r^{(.)}), (.) = a, b$$

Από την σχέση (24) προκύπτει:

$$\frac{1}{(1+r^{(.)})} p^{(.)} = p^{(.)} A$$

είναι φανερό, ότι

$$\lambda_m^{A^{(.)}} = \frac{1}{(1+r^{(.)})} \Leftrightarrow$$

$$(52) \quad r^{(.)} = \frac{1 - \lambda_m^{A^{(.)}}}{\lambda_m^{A^{(.)}}}$$

Ωστόσο η μέγιστη ιδιοτιμή της μήτρας $A^{(.)}$ είναι η μέγιστη ιδιοτιμή των μητρών που βρίσκονται επί της κυρίας διαγωνίου της μήτρας $A^{(.)}$. Κατά συνέπεια:

$$(53) \quad \lambda_m^{A^{(i)}} = \max[\lambda_m^{A_{11}^{(i)}}, \lambda_m^{A_{22}^{(i)}}]$$

Η έως τώρα ανάλυση συμπίπτει με αυτήν του προσδιορισμού του μέγιστου ποσοστού κέρδους σε διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής. Ωστόσο στην περίπτωση των χαραζοφιανών διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής δεν χρειάζεται να γίνει λόγος για περιπτώσεις, όπου το μέγιστο ποσοστό κέρδους του βασικού υποσυστήματος είναι μεγαλύτερο από αυτό του μη βασικού υποσυστήματος και τούμπαλιν. Και οι λόγος είναι ο εξής, το πραγματικό ωρομίσθιο είναι εξωγενώς δεδομένο και τέτοιο ώστε να διασφαλίζεται:

- Ότι οι τιμές όλων των παραγόμενων εμπορευμάτων είναι θετικές και τέτοιες ώστε το ποσοστό κέρδους να είναι θετικό και ενιαίο για κάθε τεχνική³⁴⁶.

Κατά συνέπεια το διάνυσμα των τιμών παραγωγής είναι θετικό, με άλλα λόγια:

$$(54) \quad \begin{bmatrix} p_I^{(i)} & p_{II}^{(i)} \end{bmatrix} > 0$$

Με άλλα λόγια και στην περίπτωση αυτή, το ποσοστό κέρδους δίδεται από την σχέση (25) σε συνδυασμό με την (26).

Είναι βέβαια φανερό ότι το ύψος του ποσοστού κέρδους και κατά συνέπεια η κατάταξη των τεχνικών, παραμένει αμετάβλητη με την τυποποίηση. Με άλλα λόγια αν υποθέσουμε την ύπαρξη δύο τεχνικών, έστω της Α και της Β και προς στιγμήν υποθέσουμε ότι η β επιλέγεται έναντι της α τότε η μεταξύ τους κατάταξη δεν αλλάζει:

Με άλλα λόγια:

$r^{(a)} < r^{(b)}$, που λόγω της (7) γίνεται:

$$(55) \quad \frac{p^{(a)}x}{p^{(a)}A^{(a)}x} < \frac{p^{(b)}x}{p^{(b)}A^{(b)}x}, \forall x \geq 0$$

³⁴⁶ Υπενθυμίζεται ότι, το ποσοστό κέρδους στα χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής ορίζεται ως:

$$r^{(i)} = \frac{p^{(i)}x}{p^{(i)}A^{(i)}x}, \forall p > 0$$

Όπως στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, θα γίνει προσπάθεια να ελεγχθεί εκ νέου αν το σύστημα θα συγκλίνει στην τεχνική με το μέγιστο δυνατό r .

Το τελευταίο θα γίνει με την κατασκευή ενός ιδιότυπου αλγορίθμου της αγοράς³⁴⁷

$$\begin{aligned}\tilde{p}^{(a,1)} &= \tilde{p}^{(a,0)} A^{(b)} (1+r^{(a)}) \\ \tilde{p}^{(a,2)} &= \tilde{p}^{(a,1)} A^{(b)} (1+r^{(a)}) \Leftrightarrow \\ (56) \quad \tilde{p}^{(a,t)} &= \tilde{p}^{(a,t-1)} A^{(b)} (1+r^{(a)})\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι:

$$(57) \quad \tilde{p}^{(a,0)} = p^{(a)}$$

$$(58) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p^{(a,t)} = p^{(b)}, \text{ με άλλα λόγια οι τιμές της τεχνικής (α) μετά από } t \text{ χρονικές στιγμές}^{348} \text{ συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής } \beta.$$

Από την (20) και από την (21),(22) και την (16) προκύπτει³⁴⁹:

$$(59) \quad \tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)} = [\tilde{p}^{(a)} - \tilde{p}^{(b)}] [A^{(b)} (1+r^{(a)})]^t$$

Ωστόσο για να ισχύει η (59) πρέπει να ισχύει η :

$$(60) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [A^{(b)} (1+r^{(a)})]^t = 0$$

Με άλλα λόγια η μήτρα πρέπει να είναι συγκλίνουσα. Από τα θεωρήματα Perron Frobenius γνωρίζουμε ότι:

Η (28) ισχύει αν ισχύει:

$$(61) \quad \lambda_{\max}^{A^{(b)}} (1+r) < 1 \Leftrightarrow \lambda_{\max}^{A^{(b)}} < \frac{1}{(1+r)}$$

³⁴⁷ Βλ. Levhari(1965), Bidard(1991) και Garegnani(1966) καθώς και Π.Βουγιουκλάκη(1995).

³⁴⁸ Ή διαφορετικά ειπωμένο μετά από t αλλαγές t τεχνικών οι τιμές συγκλίνουν σε αυτές της τεχνικής (β)

³⁴⁹ Π.Βουγιουκλάκης(1995) σελ.228-235

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να συγκλίνει ο αλγόριθμος της αγοράς σε μια τεχνική, πρέπει αυτή για την δεδομένη τιμή του r , να είναι r -παραγωγική³⁵⁰.

Με άλλα λόγια η τεχνική β θα επιλεγεί στην περίπτωση κατά την οποία η τεχνική β είναι -παραγωγική, για το ποσοστό κέρδους και κατ' επέκταση για τις τιμές παραγωγής της τεχνικής α .

Με άλλα λόγια η τεχνική με το r είναι εκείνη η τεχνική η οποία δύναται να είναι r -παραγωγική για το ποσοστό κέρδους οποιασδήποτε άλλης τεχνικής.

6.5 Σύνθετης παραγωγής

6.5.1 Περίπτωση 1. Η τεχνική είναι μη διασπώμενη και μη διαχωρίσιμη

Έστω ότι η τεχνική $[A^{(b)}, B^{(b)}]$ είναι μη διασπώμενη και κατά συνέπεια παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα.

Από το Γ.Σταμάτης (1996)σελ232-234 ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

1. Η κάθε τεχνική είναι τετράγωνη
2. Οι μήτρες A, B είναι μη ιδιάζουσες
3. Ισχύει $a_{ij}, b_{ij} \geq 0, \forall i, j = 1, 2, 3 \dots n$
4. Κάθε τεχνική είναι μη διασπώμενη και κατά συνέπεια κάθε $(A^{(a)} + B^{(a)})$ είναι μη διασπώμενη
5. Συνεπεία των προϋποθέσεων 2-4 κάθε τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ παράγει μόνο βασικά εμπορεύματα.
6. Κάθε τεχνική είναι προσοδοφόρα και κατά συνέπεια υπάρχουν για αυτήν βιώσιμα συστήματα.³⁵¹
7. Η μη διασπώμενη τεχνική $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ είναι μη διαχωρίσιμη.

³⁵⁰ Βλ. Γ. Σταμάτης (1996) σελ.156-157

³⁵¹ Για την απόδειξη βλ. Γ.Σταμάτης (1996) σελ.234

Στην περίπτωση αυτή και βασιζόμενοι στις ως άνω προϋποθέσεις, αφού υποθέσουμε, σύμφωνα με την «χαραζοφιανή» φύση του μοντέλου, ότι $p \geq 0, x \geq 0$ προσδιορίζουμε την μεγιστοποιούσα(ες) το ποσοστό κέρδους τεχνική(ες) $[A^{(i)}, B^{(i)}]$.

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται το ποσοστό κέρδους για την εν λόγω τεχνική και οι τιμές παραγωγής, από τις σχέσεις:

$$r^* = \frac{1}{\lambda_{H^*}} > 0 \quad (62)$$

Και

$$p = p^{(i)} > 0 \quad (63)$$

Στην συνέχεια εξετάζεται αν υπάρχει κάποιο πρότυπο σύστημα με πρότυπο λογο μ ίσο με το $r^{(i)}$. Σύμφωνα με τον Γ.Σταμάτη ένας τέτοιος πρότυπος λόγος υπάρχει καθώς και ένα διάνυσμα $x^{(i)}, x^{(i)} > 0$

6.5.2 Περίπτωση 2. Οι τεχνικές είναι μη διασπώμενες αλλά διαχωρίσιμες

6.5.2.1 Υποπερίπτωση 1. Οι τεχνικές παράγουν μόνο βασικά εμπορεύματα.

Έστω ότι στην περίπτωση αυτή οι τεχνολογία $[A, B]$ συνίσταται μόνο σε μη διασπώμενες και διαχωρίσιμες τεχνικές στις οποίες ισχύουν οι προϋποθέσεις 1-6 της περίπτωσης 1. Την θέση της προϋπόθεσης 7 παίρνει η 7.α.

7.α. Η τεχνικές του είδους $[A^{(b)}, B^{(b)}]$ είναι διαχωρίσιμες

Κριτήριο για αν μια τεχνική είναι διαχωρίσιμη είναι εάν η τεχνική που μεγιστοποιεί το ποσοστό κέρδους είναι μια από τις τετράγωνες τεχνικές, πού χρησιμοποιούν η διαδικασίες παραγωγής (ξ στον αριθμό), ή είναι ένα μέρος από αυτές³⁵². Αυτό που ελέγχεται με άλλα λόγια αν το μέρος της μεγιστοποιούσας τεχνικής είναι περισσότερο κερδοφόρο από την ίδια.

³⁵²Βλ. Γ.Σταμάτης (1996) σελ 237

Αυτό που γίνεται είναι να σπάσει η τεχνική $[A^{(.)}, B^{(.)}]$ σε δύο μέρη και να συγκριθεί, πιο από τα δύο είναι περισσότερο κερδοφόρο³⁵³.

Κατά συνέπεια σχηματίζουμε όμοια με τις προηγούμενες τις μήτρες, $(B^{(.)} - A^{(.)})^{-1}, H^{(.)}, Z^{(.)}$, όμοια με την παράγραφο 3³⁵⁴.

Αν η τεχνική $[A^{(.)}, B^{(.)}]$ είναι περισσότερο κερδοφόρα, από κάθε ένα από τα δύο μέρη της, τότε η λύση είναι και σε αυτήν την περίπτωση η :

$$\begin{aligned} r^{(.)} &= \frac{1}{\lambda_{H^{(.))}} = \mu^{(.)} = \frac{1}{\lambda_{Z^{(.))}} \\ x &= x^{(.)} > 0 \\ p &= p^{(.)} > 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Ο τρόπος με τον οποίο εξετάζεται η αν το πρώτο μέρος της τεχνικής $[A^{(.)}, B^{(.)}]$ είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο μέρος ή από την ίδια την τεχνική είναι ο εξής:

Το σύστημα τιμών για το πρώτο μέρος της τεχνικής είναι:

$$[p_I, p_{II}] \begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & 0 \\ B_{21}^{(.)} & 0 \end{bmatrix} = [p_I, p_{II}] \begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & 0 \\ A_{21}^{(.)} & 0 \end{bmatrix} (1 + r_I) \Leftrightarrow p_I B_{11}^{(.)} + p_{II} B_{21}^{(.)} = (1 + r_I)(p_I A_{11}^{(.)} + p_{II} A_{21}^{(.)}) \quad (65)$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι:

$$p_{II} = 0 \quad (66)$$

³⁵³ Τέτοια είδη τεχνικών όπως βλέπουμε από το Γ.Σταμάτης(1996) σελ. 249 είναι:

1. $\begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & A_{12}^{(.)} \\ 0 & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & B_{12}^{(.)} \\ B_{21}^{(.)} & B_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & 0 \\ A_{21}^{(.)} & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & B_{12}^{(.)} \\ B_{21}^{(.)} & B_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & 0 \\ 0 & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & B_{12}^{(.)} \\ B_{21}^{(.)} & B_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$

³⁵⁴ Επαναλαμβάνεται ότι $A^{(.)}(B^{(.)} - A^{(.)})^{-1} \equiv H^{(.)}, Z^{(.)} \equiv (B^{(.)} - A^{(.)})^{-1}A^{(.)}$, Βλ. . Γ.Σταμάτης (1996) σελ 221

Και

$$p_I B_{11}^{(\cdot)} = p_I A_{11}^{(\cdot)}(1+r_I) \Leftrightarrow p_I [I - r_I H_I^{(\cdot)}] = 0, H_I^{(\cdot)} \equiv A_{11}^{(\cdot)}[B_{11}^{(\cdot)} - A_{11}^{(\cdot)}]^{-1} \quad (67)$$

Όμως η μήτρα $H_I^{(\cdot)}$ έχει μικρότερη μέγιστη ιδιοτιμή από την μήτρα $H^{(\cdot)}$ αυτό με την σειρά του συνεπάγεται ότι το πρώτο μέρος της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$ είναι περισσότερο κερδοφόρο από την ίδια την τεχνική. Με άλλα λόγια δηλαδή ισχύει:

$$\lambda_m^{H^{(\cdot)}} > \lambda_m^{H_I^{(\cdot)}} \quad (68)$$

Και κατά συνέπεια:

$$r^{(\cdot)} < r_I \quad (69)$$

Αν τώρα το πρώτο μέρος της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$ είναι περισσότερο κερδοφόρο από το δεύτερο τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lambda_m^{H_I} > \lambda_m^{H_{II}} \quad (70)$$

Και κατά συνέπεια:

$$r_I < r_{II} \quad (71)$$

Όμοια με την παράγραφο 3 θα εξετάσουμε τι ισχύει και για τον πρότυπο λόγο του συστήματος της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$, του πρώτου μέρους της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$ και του δεύτερου μέρους αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι ο λόγος αυτός πρέπει να είναι ίσος με τα αντίστοιχα ποσοστά κέρδους για τις τεχνικές. Ωστόσο καθώς στην παρούσα διατριβή δεν αποτελεί αντικείμενο ιδιαίτερης μελέτης η περίπτωση της μεγεθυνόμενης οικονομίας, μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι

$$g = 0 \quad (72)$$

Κατά συνέπεια μπορούμε να θέσουμε εκτός συζήτησης τον πρότυπο λόγο του συστήματος και να επικεντρωθούμε μόνο στην επιλογή εκείνης της τεχνικής, η οποία συνεπάγεται το μέγιστο δυνατό ποσοστό κέρδους. Το τελευταίο γίνεται για λόγους απλοποίησης και δεν

θίγει στο ελάχιστο το χαρακτήρα του μοντέλου ως μοντέλο επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής³⁵⁵.

Ωστόσο η λύση αυτή του μοντέλου του von Neumann ενέχει και μηδενικές λύσεις (βλ. $p_{II} = 0$) των πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων. Όπως υπογραμμίζει ο Γ. Σταμάτης (στο 1996 σελ.241) μηδενικές τιμές εμπορευμάτων μπορούν να εμφανιστούν μόνο τότε, δηλαδή μόνο στην περίπτωση, όπου οι τεχνικές δεν είναι τετράγωνες, στην περίπτωση δηλαδή όπου παράγονται μεν όλα τα εμπορεύματα που δύναται να παραχθούν, χρησιμοποιείται ωστόσο ένας μικρότερος αριθμός διαδικασιών από αυτόν των εμπορευμάτων.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε, ότι στην περίπτωση μη διασπώμενων διαχωρίσιμων τεχνικών σύνθετης παραγωγής υπάρχει λύση, όταν:

1. Ένα από τα δύο μέρη στα οποία (δια)χωρίζεται η τεχνική συνεπάγεται το μεγαλύτερο ποσοστό κέρδους
2. Για αυτό το μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους μέρος υπάρχει ένα πρότυπο σύστημα, το οποίο έχει πρότυπο λόγο ίσο με το ποσοστό κέρδους.

6.5.2.2 Υποπερίπτωση 2. Οι τεχνικές παράγουν και μη βασικά εμπορεύματα που δεν εισέρχονται στην παραγωγή μη βασικών εμπορευμάτων

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι αρχικές προϋποθέσεις εξαιρέσει των σημείων 5-7. Στην περίπτωση αυτή, οι μήτρες εισροών και εκροών είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & A_{12}^{(.)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & B_{12}^{(.)} \\ B_{21}^{(.)} & B_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$$

³⁵⁵ Αν υποθέταμε την ύπαρξη ενός μεγεθυνόμενου συστήματος παραγωγής, θα είχαμε επιπλέον τις σχέσεις:

$$(I - \mu_1 Z_I) x_I = 0, Z_I = (B_{11} - A_{11})^{-1} A_{11} \text{ από την οποία συνεπάγεται:}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_m^{Z_I}} \text{ καθώς και } x_I > 0$$

Ωστόσο οι μήτρες H_I και Z_I είναι όμοιες κατά συνέπεια:

$$\lambda_m^{H_I} = \lambda_m^{Z_I} \text{ και ισοδύναμα:}$$

$$r_I = \mu_1 = r = g$$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα του von Neumann καθώς:

1. Είτε η πλέον κερδοφόρα τεχνική χρησιμοποιεί όλες τις διαδικασίες παραγωγής και ως εκ τούτου είναι τετράγωνη
2. Είτε είναι μέρος μιας τεχνικής ,η οποία χρησιμοποιεί όλες τις η διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής, και για να παράξει τα η δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα χρησιμοποιεί λιγότερες απο η τεχνικές

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις δεν υπάρχει πρότυπο σύστημα, καθώς και στις δύο περιπτώσεις δεν υπάρχει κοινή σύνθεση εισροών και εκροών³⁵⁶.

6.5.3 Περίπτωση 3. Οι τεχνικές είναι διασπώμενες και απλά διαχωρίσιμες

6.5.3.1 Υποπερίπτωση 1. Οι τεχνικές παράγουν μόνο βασικά εμπορεύματα

Έστω η τεχνική $[A^{(.)}, B^{(.)}]$ είναι μια τετράγωνη διασπώμενη και διαχωρίσιμη τεχνική σύνθετης παραγωγής. Η μορφή των μητρών $A^{(.)}$ και $B^{(.)}$ είναι η εξής:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(.)} & A_{12}^{(.)} \\ 0 & A_{22}^{(.)} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} B_{11}^{(.)} & B_{12}^{(.)} \\ 0 & B_{22}^{(.)} \end{bmatrix}$$

Κατά συνέπεια η τεχνική «σπάει» σε δύο μέρη:

1. Στο τμήμα $[A_{11}^{(.)}, B_{11}^{(.)}]$, το οποίο παράγει k εμπορεύματα μέσω k διαδικασιών παραγωγής
2. Και σε ένα δεύτερο τμήμα $\left\{ \begin{bmatrix} A_{12}^{(.)} \\ A_{22}^{(.)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{12}^{(.)} \\ B_{22}^{(.)} \end{bmatrix} \right\}$ το οποίο μέσω (n-k) διαδικασιών παράγει η εμπορεύματα. Πρόκειται σαφώς για μια μη τετράγωνη τεχνική παραγωγής

Βάσει των 2 παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η τεχνική $[A^{(.)}, B^{(.)}]$ είναι διαχωρίσιμη.

Από το Γ.Σταμάτης (1996) σελ 246 βλέπουμε ότι:

$$[B^{(.)} - A^{(.)}]^{-1} \geq 0 \quad (73)$$

³⁵⁶ Βλ. Γ.Σταμάτη (1996) σελ 245

Από την στοιχειώδη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι:

$$[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}]^{-1} = \begin{bmatrix} [B_{11}^{(\cdot)} - A_{11}^{(\cdot)}]^{-1} & -[B_{11}^{(\cdot)} - A_{11}^{(\cdot)}]^{-1}[B_{12}^{(\cdot)} - A_{12}^{(\cdot)}][B_{22}^{(\cdot)} - A_{22}^{(\cdot)}]^{-1} \\ 0 & [B_{22}^{(\cdot)} - A_{22}^{(\cdot)}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Όμοια με τον Γ.Σταμάτη υποθέτουμε ότι τόσο το πρώτο μέρος της τεχνικής όσο και το δεύτερο είναι προσοδοφόρα και κατά συνέπεια παραγωγικά³⁵⁷:

$$[B_{11}^{(\cdot)} - A_{11}^{(\cdot)}]^{-1} \geq 0 \quad (75)$$

$$[B_{22}^{(\cdot)} - A_{22}^{(\cdot)}]^{-1} \geq 0 \quad (76)$$

Ομοίως με τις παραπάνω περιπτώσεις σχηματίζουμε τις όμοιες μήτρες $H^{(\cdot)} \equiv A^{(\cdot)}[B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}]^{-1}$ και $Z^{(\cdot)} \equiv [B^{(\cdot)} - A^{(\cdot)}]^{-1}A^{(\cdot)}$. Και οι δύο μήτρες είναι της μορφής:

$$H^{(\cdot)} = \begin{bmatrix} H_{11}^{(\cdot)} & H_{12}^{(\cdot)} \\ 0 & H_{22}^{(\cdot)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Και } Z^{(\cdot)} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(\cdot)} & Z_{12}^{(\cdot)} \\ 0 & Z_{22}^{(\cdot)} \end{bmatrix}$$

Το γεγονός ότι οι μήτρες αυτές είναι όμοιες συνεπάγεται ως γνωστόν ότι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Όμως το ίδιο συμβαίνει και για τις υπομήτρες που βρίσκονται επί τις κυρίας διαγωνίου (δηλαδή είναι όμοιες και έχουν ως εκ τούτου τις ίδιες ιδιοτιμές). Κατά συνέπεια ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lambda_m^{H^{(\cdot)}} = \lambda_m^{Z^{(\cdot)}} \quad (77)$$

$$\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} = \lambda_m^{Z_{11}^{(\cdot)}} \quad (78)$$

$$\lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} = \lambda_m^{Z_{22}^{(\cdot)}} \quad (79)$$

Από το σύστημα τιμών προκύπτει, όπως και στις παραπάνω περιπτώσεις:

³⁵⁷ Στην περίπτωση του μοντέλου του von Neumann (και κατά συνέπεια σε κάθε χαραζοφιανό μοντέλο παραγωγής) η έννοια του παραγωγικού μιας τεχνικής και του προσοδοφόρου συμπίπτουν, καθώς στα μοντέλα αυτά, λόγω του ότι η εργασία αναπαράγεται μέσα στο σύστημα, το καθαρό προϊόν και το υποπροϊόν είναι έννοιες ταυτόσημες.

$$r^{(\cdot)} = \frac{1}{\lambda_m^{H^{(\cdot)}}} = \max\left[\frac{1}{\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}}} (= r_I^{(\cdot)}), \frac{1}{\lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}}} (= r_{II}^{(\cdot)})\right] = \min[\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}}, \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}}] \quad (80)$$

Κατά συνέπεια δύναται να ισχύει διαζευκτικά:

$$\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} < \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} \Leftrightarrow r_I^{(\cdot)} > r_{II} \quad (81)$$

$$\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} > \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} \Leftrightarrow r_I^{(\cdot)} < r_{II} \quad (82)$$

$$\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} = \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} \Leftrightarrow r_I^{(\cdot)} = r_{II} \quad (83)$$

Ας εξετάσουμε κατά πόσον στις 3 παραπάνω περιπτώσεις το σύστημα του von Neumann έχει λύση³⁵⁸.

Περίπτωση 1. $\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} < \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} \Leftrightarrow r_I^{(\cdot)} > r_{II}$

Στην περίπτωση αυτή το πρώτο τμήμα της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$ είναι η πλέον κερδοφόρα τεχνική. Υπάρχει πρότυπο σύστημα για το οποίο ισχύει:

$$r^{(\cdot)} = r_I^{(\cdot)} = \mu^{(\cdot)} = \mu_1^{(\cdot)} \quad (84), \text{ και το οποίο παράγει τα}$$

εμπορεύματα 1 έως k ³⁵⁹

Περίπτωση 2. $\lambda_m^{H_{11}^{(\cdot)}} > \lambda_m^{H_{22}^{(\cdot)}} \Leftrightarrow r_I^{(\cdot)} < r_{II}$

Στην περίπτωση αυτή το δεύτερο τμήμα της τεχνικής $[A^{(\cdot)}, B^{(\cdot)}]$ είναι η πλέον κερδοφόρα τεχνική. Υπάρχει πρότυπο σύστημα για το οποίο ισχύει:

$$r^{(\cdot)} = r_{II}^{(\cdot)} = \mu^{(\cdot)} = \mu_{II}^{(\cdot)} \quad (85), \text{ στην περίπτωση αυτή είναι}$$

δυνατόν να υπάρξουν και μηδενικές τιμές των πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων³⁶⁰.

³⁵⁸ Επειδή από την βιβλιογραφία (βλ. Γ.Σταμάτης 1996 σελ 249) έχει ήδη αποδειχθεί σε ποιες περιπτώσεις το σύστημα του von Neumann, αρκούμαστε στο να επαναλάβουμε απλά τα αποτελέσματα της εν λόγω ανάλυσης.

³⁵⁹ Υπενθυμίζουμε ότι η μήτρα $A_{11}^{(\cdot)}$ είναι διαστάσεων $k \times k$.

³⁶⁰ Είναι δηλαδή μια κλασική περίπτωση ύπαρξης συστημάτων παραγωγής που χρησιμοποιώντας λιγότερες διαδικασίες παραγωγής, από ότι τα παραγόμενα εμπορεύματα, δύνανται να παράξουν όλα τα

Περίπτωση 3. $\lambda_m^{H_{11}^{(c)}} = \lambda_m^{H_{22}^{(c)}} \Leftrightarrow r_I^{(c)} = r_{II}$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα του von Neumann.

Κατά συνέπεια υπάρχει πάντοτε λύση όταν ισχύει η περίπτωση 1. Ποιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής, υπάρχει πάντοτε λύση στο πρόβλημα του von Neumann όταν το πρώτο μέρος της τεχνικής είναι το πλέον κερδοφόρο. Ποιο συγκεκριμένα όταν ισχύει:

$$r^{(c)} = \mu^{(c)} = \frac{1}{\lambda_m^{H^{(c)}}} = \max\left[\frac{1}{\lambda_m^{H_{11}^{(c)}}} (= r_I^{(c)})\right] = \min[\lambda_m^{H_{11}^{(c)}}] \quad (86)$$

6.5.3.2 Υποπερίπτωση 2. Οι διαχωρίσιμες απλά διασπώμενες τεχνικές παράγουν και μη βασικά εμπορεύματα

6.5.3.2.1 Περίπτωση 1. Στο πρώτο τμήμα παράγονται μη βασικά εμπορεύματα και στο δεύτερο βασικά και μη βασικά εμπορεύματα που δεν εισέρχονται στην ίδια την παραγωγή τους

Για την λύση του προβλήματος ισχύει, ότι πραγματευθήκαμε και στην προηγούμενη περίπτωση.

6.5.3.2.2 Περίπτωση 2. Στο πρώτο τμήμα παράγονται μόνο βασικά εμπορεύματα και στο δεύτερο βασικά και μη βασικά εμπορεύματα που δεν εισέρχονται στην ίδια την παραγωγή τους

Στην περίπτωση αυτή η $A^{(c)}$ είναι προφανώς της μορφής:

$$A^{(c)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(c)} & A_{12}^{(c)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από το Γ.Σταμάτης 1996 σελ 253 για την λύση της υποπερίπτωσης αυτής ισχύει:

$$r^{(c)} = \mu^{(c)} = \frac{1}{\lambda_m^{H^{(c)}}} = \max\left[\frac{1}{\lambda_m^{H_{11}^{(c)}}} (= r_I^{(c)})\right] = \min[\lambda_m^{H_{11}^{(c)}}] \quad (87)$$

εν λόγω εμπορεύματα. Η ύπαρξη των μηδενικών αυτών τιμών εμπορευμάτων που αναφέραμε προηγουμένως μόνο τυχαία μπορεί να είναι. Βλ. Γ.Σταμάτη 1996 σελ. 241-242.

6.5.4 Η λύση για κάθε δυνατό είδος τεχνικών

Έτσι, θα αναφερθούμε στη λύση για κάθε δυνατό είδος τεχνικών. Υποθέτοντας, ότι πλέον υπάρχουν $\xi = \binom{m}{n}$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής, οι οποίες δύνανται να παράξουν και τα n εμπορεύματα. Αναλυτικότερα η τεχνολογία του συστήματος αποτελείται από³⁶¹:

- $\zeta, \zeta \geq 0$ το πλήθος διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}]$
- $\eta, \eta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων μη διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\beta)}, B^{(\beta)}]$
- $\theta, \theta \geq 0$ το πλήθος διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\gamma)}, B^{(\gamma)}]$
- $\iota, \iota \geq 0$ το πλήθος μη διαχωρίσιμων απλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\delta)}, B^{(\delta)}]$
- $\kappa, \kappa \geq 0$ το πλήθος διπλά διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, $[A^{(\epsilon)}, B^{(\epsilon)}]$

όπου

$$\zeta + \eta + \theta + \iota + \kappa = \xi$$

Στην περίπτωση λοιπόν, που υπάρχει λύση στο πρόβλημα του von Neumann και η τεχνολογία χαρακτηρίζεται, από την ύπαρξη και των 5 ειδών τεχνικών, έχουμε για το r^* και το μ^* :

$$r^* = \mu^* = \min[\lambda_{H^{(\alpha)}}, \lambda_{H^{(\beta)}}, \lambda_{H^{(\gamma)}}, \lambda_{H^{(\delta)}}, \lambda_{H^{(\epsilon)}}] = \min[\lambda_{Z^{(\alpha)}}, \lambda_{Z^{(\beta)}}, \lambda_{Z^{(\gamma)}}, \lambda_{Z^{(\delta)}}, \lambda_{Z^{(\epsilon)}}]$$

Επομένως, η λύση στο μοντέλο του von Neumann –όταν βέβαια αυτή υπάρχει-, θα είναι, για κάθε είδος τεχνικών, μια εκ των πέντε, αντίστοιχα που αναφέρθηκαν στην παραπάνω σχέση.

6.6 Συμπεράσματα για το μοντέλο του von Neumann

Στο σημείο αυτό, ολοκληρώνοντας θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε επιγραμματικά και μερικά από τα συμπεράσματα του ίδιου του συγγραφέα, όπως παρουσιάζονται στο εν λόγω άρθρο:

³⁶¹ Γ. Σταμάτης, (1996) σελ. 231-232.

1. Το πρόβλημα του von Neumann είναι μάλλον ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, παρά ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης. Σε αυτό στόχο αποτελεί η μεγιστοποίηση του κέρδους.
2. Μηδενικές τιμές πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων ενέχουν πάντα τυχαίες λύσεις. Αφού, όπως προείπαμε, για να υπάρχει λύση πρέπει να ισχύει $p^* > 0$
3. Η προσέγγιση του προβλήματος, σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, δεν απαντά στο ερώτημα του von Neumann , αφού προσδιορίζει, όχι τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, αλλά τον ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης. Τίποτα όμως δεν μπορεί να μας εγγυηθεί, ότι οι ρυθμοί αυτοί είναι μεταξύ τους ίσοι.
4. Σε αντίθεση με το μοντέλο του von Neumann , στο υπό εξέταση άρθρο σε συγκεκριμένες συνθήκες είναι δυνατόν να μην υπάρχει ισορροπία
5. Ένα άλλο ζήτημα που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι αυτό των μηδενικών τιμών εμπορευμάτων. Η ύπαρξη όμως μηδενικών τιμών είναι δυνατή στην περίπτωση διασπώμενων ή διαχωρίσιμων τεχνικών παραγωγής, όπου η μεγιστοποιούσα το ποσοστό κέρδους τεχνική, παράγει να μην τα n εμπορεύματα, χρησιμοποιώντας, όμως λιγότερες από n διαδικασίες παραγωγής. Πρόκειται δηλαδή για μια «τυχαία» λύση. Το τελευταίο διαφωτίζει περισσότερο και το προηγούμενο (το δεύτερο δηλαδή) συμπέρασμα. Οι μηδενικές τιμές των εμπορευμάτων όμως, σχετίζονται με τον όρο «ελεύθερα αγαθά». Όμως τα ελεύθερα αγαθά, είναι συνήθως μη παραγόμενα εμπορεύματα, στα οποία συνήθως η προσφορά τους εκτείνεται είτε σε απεριόριστες είτε σε μεγαλύτερες από τις αναγκαίες ποσότητες. Το τελευταίο όμως, αντιβαίνει στο κύριο χαρακτηριστικό του υπό εξέταση συστήματος, δηλαδή στο ότι όλα τα εμπορεύματα είναι (ανα)παραγόμενα. Άρα το γεγονός, ότι στο μοντέλο του von Neumann υπάρχουν εμπορεύματα τα οποία δύναται να παραχθούν και πράγματι παράγονται, αλλά ωστόσο έχουν μηδενικές τιμές, οφείλεται στην αξίωσή να υπάρχει ένα ενιαίο για όλα τα εμπορεύματα ποσοστό κέρδους. Επομένως η ύπαρξη μηδενικών τιμών είναι αποτέλεσμα της μαθηματικής πραγμάτευσης του ζητήματος, και δεν χρήζει οικονομικής ερμηνείας στο παρόν υπόδειγμα.
6. Το σύστημα ,που προκύπτει από το μοντέλο του von Neumann ,είναι ένα πρότυπο σύστημα, το οποίο αποτελεί μάλλον μαθηματική συνθήκη για την ύπαρξη ενός μέγιστου υλικού ρυθμού μεγέθυνσης, για όλα τα παραγόμενα εμπορεύματα. Ενώ δεν υπάρχει κανένας λόγος, τα απαραίτητα για την παραγωγή εμπορεύματα,

δηλαδή η ζήτηση στην περίπτωση μας, να έχει την σύνθεση ενός πρότυπου εμπορεύματος. Πρόκειται, εν ολίγοις, για «μια χωρίς οικονομικό νόημα μαθηματική συνθήκη».

7. Τέλος στο σύστημα του von Neumann ,η συνήθης αξίωση για την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης, στο σύστημα γενικής ισορροπίας δείχνει να μην ικανοποιείται. Αυτό γίνεται ξεκάθαρο, αν αναλογιστούμε το γεγονός, ότι δύνανται να υπάρχουν παραπάνω από μια μεγιστοποιούσες το ποσοστό κέρδους και τον υλικό ρυθμό μεγέθυνσης του συστήματος, τεχνικές.
8. Τέλος, όταν οι υπό εξέταση τεχνικές είναι πολυδιασπόμενες, τότε στο μοντέλο του von Neumann , όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός διασπασιμότητας του συστήματος, τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των πράγματι παραχθέντων εμπορευμάτων σε σχέση με τα δυνάμενα να παραχθούν εμπορεύματα.

Συμπερασματικά, το άρθρο « Μια γενική λύση του μοντέλου γενικής ισορροπίας και οικονομικής μεγέθυνσης του John von Neumann για, διαχωρίσιμες ή μη διαχωρίσιμες και απλώς ή πολλαπλώς διασπώμενες τεχνικές παραγωγής», προσδίδει μια νέα οπτική στο μοντέλο του von Neumann . Αποδεικνύει την ύπαρξη ενός μέγιστου ποσοστού κέρδους, όχι με την χρήση ενός Fixed Point Theorem, αλλά με την εξέταση γραμμικών συστημάτων παραγωγής, που ανταποκρίνονται σ' όλες τις δυνατές περιπτώσεις³⁶². Επιπλέον θέτει το πρόβλημα, όχι σαν ένα κοινό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης-μεγιστοποίησης, αλλά σαν ένα πρόβλημα επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής³⁶³. Επιπλέον ασχολείται και με το πρόβλημα της ύπαρξης μηδενικών τιμών εμπορευμάτων. Τέλος αποδεικνύει, ότι πέρα από την περίπτωση ύπαρξης παραπάνω του ενός σημείων ισορροπίας, είναι δυνατή και η μη ύπαρξη αυτής.

³⁶² με την χρήση των θεωρημάτων Peron-Frobenius για διασπώμενες και μη διασπώμενες μήτρες

³⁶³ το οποίο δεν αρκείται στην πραγμάτευση των μαθηματικών συνθηκών ύπαρξης της ισορροπίας, αλλά ασχολείται και με τα συνεπαγόμενα οικονομικά ζητήματα που ανακύπτουν

7 (Re-)Switch points

Στην παραπάνω σύντομη ιστορική αναδρομή στο ζήτημα της επιλογής τεχνικών παραγωγής, είδαμε ότι έγινε λόγος για το φαινόμενο της αλλαγής (Switching) και εναλλαγής (reswitching) τεχνικών για δεδομένο ύψος του ποσοστού κέρδους. Τα σημεία όπου λαμβάνουν χώρα τα παραπάνω φαινόμενα, τα σημεία δηλαδή όπου το σύστημα μεταβαίνει από μια τεχνική σε μια άλλη, ονομάζονται switch και reswitch points αντίστοιχα. Τα σημεία αυτά, έχουν τις εξής ιδιότητες για δύο τεχνικές παραγωγής, έστω την $[A^{(a)}, \ell^{(a)}]$ και την $[A^{(b)}, \ell^{(b)}]$:

- Το ποσοστό κέρδους των δύο τεχνικών είναι ίσο:

$$r^{(a)} = r^{(b)} \quad (1)$$

- Οι δύο τεχνικές έχουν το ίδιο ονομαστικό ωρομίσθιο:

$$w^{(a)} = w^{(b)} \quad (2)$$

- Οι δύο τεχνικές έχουν το ίδιο διάνυσμα τιμών παραγωγής³⁶⁴

$$p^{(a)} = p^{(b)} \quad (3)$$

- Όσον αφορά την ένταση κεφαλαίου στα switch points δεν είναι η ίδια στις δύο τεχνικές, στην γενική περίπτωση. Ο λόγος προφανής καθώς:

$$w^{(\cdot)} = w_{\max}^{(\cdot)} - K_q r \Rightarrow (4)$$

Από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει:

$$w_{\max}^{(a)} - K_q^{(a)} r = w_{\max}^{(b)} - K_q^{(b)} r \Rightarrow$$

$$w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)} = (K_q^{(a)} - K_q^{(b)}) r \Rightarrow$$

$$\frac{w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)}}{r} = K_q^{(a)} - K_q^{(b)} \quad (5)$$

³⁶⁴ Στην περίπτωση των μη γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής, όπως είναι γνωστό από την βιβλιογραφία βλ. K.Baradwaj (1970) σελ.412

Από την σχέση (5) βλέπουμε ότι κανένας λόγος δεν υπάρχει για τον οποίον η ένταση κεφαλαίου πρέπει να είναι ίση ανάμεσα στα δύο συστήματα. Το τελευταίο μπορεί να συμβεί στις ειδικές περιπτώσεις όπου³⁶⁵ :

1. Το ποσοστό κέρδους είναι ίσο με το μηδέν και η διάφορα από τα μέγιστα ποσοστά κέρδους των δύο τεχνικών διάφορη του μηδένος
2. Το ποσοστό κέρδους είναι διάφορο του μηδενός και η διάφορα από τα μέγιστα ποσοστά κέρδους των δύο τεχνικών ίση με το μηδέν
3. Τοσο το ποσοστό κέρδους όσο και η διάφορα από τα μέγιστα ποσοστά κέρδους των δύο τεχνικών είναι ίσα με το μηδέν.
4. Μια τέταρτη εκδοχή όπου η ένταση κεφαλαίου δύναται να είναι ίση στα (re)switch points είναι οι τιμές να έχουν τυποποιηθεί με το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa.

Από την παρουσίαση του τυπικού εμπορεύματος του Sraffa, γνωρίζουμε ότι η παραγόμενη w-r σχέση είναι η ακόλουθη³⁶⁶:

$$w = 1 - \frac{r}{R} \quad (6)$$

Με άλλα λόγια η περίπτωση κατά την οποία οι εντάσεις κεφαλαίου είναι ίσες ανάμεσα στις δύο τεχνικές είναι να έχουν το ίδιο μέγιστο ποσοστό κέρδους, ή ισοδύναμα την ίδια ιδιοτιμή.

- Τα switch points³⁶⁷, όπως θα δούμε στην συνέχεια δύνανται να μετατοπίζονται, να εμφανίζονται, ή να εξαφανίζονται με την τυποποίηση,

³⁶⁵ Καθώς αν $K^{(a)}_q - K^{(b)}_q = 0$ τότε:

$$\frac{w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)}}{r} = 0 \Leftrightarrow$$

- Είτε $r=0$ και $w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)} \neq 0$
- Είτε $r \neq 0$ και $w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)} = 0$
- Είτε $r = 0$ και $w_{\max}^{(a)} - w_{\max}^{(b)} = 0$

³⁶⁶ Βλ. και παρούσα διατριβή σελ.106, καθώς και Στεφανοπούλου Ζ. (2009), Rocncaglia A (1978) και Ahmad S (1986)

³⁶⁷ Bl και Bhaduri A, (1970)

ακόμα και στην απλουστευμένη περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής.

Τα reswitch points, από την άλλη μεριά έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τα switch points καθώς και σε αυτά ισχύουν οι ίδιες τιμές παραγωγής, το ίδιο ποσοστό κέρδους και ονομαστικό ωρομίσθιο. Επιπλέον ισχύουν όσα προαναφέρθηκαν για την ένταση κεφαλαίου του συστήματος.

Επιπλέον στην περίπτωση της σύνθετης (joint production) παραγωγής είναι δυνατόν να εμφανιστούν ψευδή σημεία (εν)αλλαγής των τεχνικών (fake (re)switch points). Στα εν λόγω σημεία τέμνονται δύο ή περισσότερες αλλά όχι όλες οι $w-r$ ευθείες των υπο σύγκριση τεχνικών. Τα σημεία αυτά έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Έχουν το ίδιο ποσοστό κέρδους
2. Έχουν το ίδιο ονομαστικό ωρομίσθιο, αλλά:
3. Δεν έχουν το ίδιο διάνυσμα τιμών παραγωγής
4. Δεν μπορεί να ειπωθεί τίποτα για την ένταση κεφαλαίου, καθώς δύναται να διαφέρει ανάμεσα στις υπο σύγκριση τεχνικές (σημ. τυπικά υποσυστήματα όπως θα φανεί στην παρούσα διατριβή).

Όμως είναι γνωστό από την βιβλιογραφία³⁶⁸, ότι ακόμα και στην περίπτωση όπου συγκρίνονται μη γειτονικές τεχνικές απλής παραγωγής είναι δυνατόν στα fake switch points να μην συνεπάγονται το ίδιο διάνυσμα τιμών παραγωγής.

Βάσει των παραπάνω και όπως θα δειχθεί στην συνέχεια³⁶⁹ τα σημεία αυτά, όπως και τα πραγματικά (reswitch), και αντίθετα με τα όσα υποστηρίζουν οι C.Bidard και E.Klimovsky, τα σημεία αυτά είναι πραγματικά switch point, στα οποία σε όρους των $w-r$ και cost minimization criterion, συντελείται μια μετάβαση από μια τεχνική σε μία άλλη.

Ένα ζήτημα που τίθεται σχετικά με τα switch points είναι και ποίς ο μέγιστος αριθμός τους. Στο ερώτημα αυτό δόθηκε απάντηση πρώτη φορά από την K. Baradwaj το 1970³⁷⁰.

³⁶⁸ Βλ. K. Baradwaj (1970) σελ .412

³⁶⁹ Επίσης βλ. K.Manoudakis(2009)

³⁷⁰ Βλ.K.Baradwaj (1970) σελ 209-229

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν δυο τεχνικές απλής παραγωγής, έστω $[A, \ell]$ και $[B, h]$. Όπου A είναι η μήτρα των τεχνικών συντελεστών, διαστάσεων $m \times n$ και το ℓ ένα $m \times 1$ διάνυσμα των εισροών σε ζωντανή εργασία. Ομοίως η B είναι μια $n \times n$ μήτρα των τεχνικών συντελεστών και h ένα $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε εργασιακή δύναμη.

Οι τεχνικές αυτές για την Bharadwaj έχουν s κοινά παραγόμενα εμπορεύματα. Κατά συνέπεια η τεχνική $[A, \ell]$ παράγει $(m-s)$ εμπορεύματα που χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σε αυτήν. Ομοίως η $[B, h]$ παράγει $(n-s)$ εμπορεύματα που χρησιμοποιούνται αποκλειστικά σε αυτήν.

Η Bharadwaj ψάχνει τιμές του ποσοστού κέρδους, όπου ισούνται οι τιμές παραγωγής των δυο τεχνικών καθώς και τα ονομαστικά ωρομίσθια, ήτοι τα σημεία (εν)αλλαγής. Κάνει επιπλέον την διαπίστωση, ότι στην περίπτωση που δυο τεχνικές διαφέρουν κατά περισσότερες από μια διαδικασίες παραγωγής και οι τιμές τυποποιηθούν με ένα κοινό στις δυο τεχνικές τυπικό εμπόρευμα, τότε (οι τιμές) ενδέχεται να διαφέρουν ανάμεσα στις δυο τεχνικές στα switch points³⁷¹.

Η τιμή του ποσοστού κέρδους στα switch points εξάγεται, λύνοντας το πολυώνυμο:

$$F(r) = p[A^+ - B^+]e_r + w[\ell^+ - h^+]e_i = 0, e_i = 1, 2, \dots, m+n-s \quad (1)^{372} \quad (8)$$

Ta switch points επομένως είναι οι επαναλαμβανόμενες λύσεις (τιμές) του πολυωνύμου (1), οι οποίες περιορίζονται εντός του οικονομικά σημαντικού πεδίου τιμών του ποσοστού κέρδους:

$$1 \leq r \leq 1+R, R = \min[R_A, R_B]$$

Κατά συνέπεια:

$$r : p(r) > 0 \quad (9)$$

Το γενικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι για n βασικά εμπορεύματα κοινά σε δυο υπό σύγκριση τεχνικές, ο μέγιστος αριθμός των σημείων εναλλαγής είναι n . Η υπόθεση της ύπαρξης γειτονικών τεχνικών είναι μάλλον απίθανη για την Bharadwaj,

³⁷¹ Έχοντας εντοπίσει στην περίπτωση της απλής παραγωγής την ύπαρξη των fake switch point, η οποία με σαφήνεια διατυπώθηκε αργότερα από τους Ch.Bidard και E.Klimovksy (2000) για την περίπτωση της σύνθετης παραγωγής.

³⁷² Η Bharadwaj αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι οι μήτρες A και B καθώς και τα διανύσματα ℓ και h είναι διαφορετικών διαστάσεων, για να μπορέσει να λύσει το πολυώνυμο (1) προσωξάνει την μήτρα $A(B)$ και το ℓ (h) κατά τις διαδικασίες που παράγουν τα εμπορεύματα που παράγει αποκλειστικά η τεχνική $[B, h]([A, \ell])$ ως μη βασικά. Κατά συνέπεια $rank[A^+, B^+] = m + (n - s)$

αφού θεωρεί μη ρεαλιστική την ύπαρξη τεχνικών που χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό και είδος των βασικών εμπορευμάτων και ταυτόχρονα διαφέρουν σε μια μόνο μέθοδο παραγωγής είναι μάλλον απίθανο να συμβεί.

7.1 Μη βασικά εμπορεύματα

Για την Bharadwaj η περίπτωση δύο τεχνικών, οι οποίες διαφέρουν σε μια ή περισσότερες διαδικασίες παραγωγής των κοινών βασικών εμπορευμάτων, τα switch points βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω.

Ιδιαίτερη σημασία δίδεται από την Bharadwaj σε δυο περιπτώσεις:

3. Εάν υπάρχει εναλλακτική διαδικασία παραγωγής για ένα μη βασικό εμπόρευμα, τότε θα υπάρξουν αλλαγές στην μέθοδο παραγωγής των μη βασικών εμπορευμάτων
4. Τα μη βασικά εμπορεύματα μπαίνουν στο τυπικό εμπόρευμα, και ως εκ τούτου εισέρχονται έμμεσα στον προσδιορισμό των τιμών παραγωγής των βασικών εμπορευμάτων.

7.1.1 Περίπτωση 1.

Έστω ότι για ένα μη βασικό εμπόρευμα, υπάρχει μια εναλλακτική μέθοδος παραγωγής. Έστω ότι ένα κοινό για τις δύο τεχνικές μη βασικό εμπόρευμα λειτουργεί ως numeraire.

Στην περίπτωση αυτή, οι δυο τεχνικές διαφέρουν μόνο κατά την διαδικασία παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος, για το οποίο γίνεται λόγος. Ως εκ τούτου ο αριθμός των σημείων εναλλαγής θα δίδεται από την διάσταση της επαυξημένης μήτρας $[A^+ - B^+]$.

7.1.2 Περίπτωση 2

Έστω ότι δυο τεχνικές διαφέρουν κατά μια διαδικασία παραγωγής για ένα βασικό εμπόρευμα. Επιπλέον γίνεται η υπόθεση τα μη βασικά εμπορεύματα, εμπεριέχονται στο τυπικό εμπόρευμα. Η Bharadwaj εξετάζει πως τα παραπάνω θα επηρεάσουν τον αριθμό των σημείων εναλλαγής.

Η Bharadwaj κάνει τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

3. Εάν το μη βασικό εμπόρευμα που εξετάζουμε δεν χρησιμοποιείται στην δική του παραγωγή, τότε ο μέγιστος αριθμός των σημείων εναλλαγής είναι ίσος με τον αριθμό των διαδικασιών παραγωγής της εν λόγω τεχνικής
4. Εάν το μη βασικό εμπόρευμα, χρησιμοποιείται στην ίδια την δική του παραγωγή, τότε με το μη βασικό εμπόρευμα σαν numeraire, οι τιμές των βασικών εμπορευμάτων δεν μπορεί να είναι θετικές.

Στην συνέχεια εξετάζει την περίπτωση όπου τόσο βασικά, όσο και μη βασικά εμπορεύματα εμπεριέχονται στο τυπικό εμπόρευμα. Και διαπιστώνει ότι:

3. Όσα εκ των μη βασικών εμπορευμάτων τα οποία εισέρχονται έμμεσα ή άμεσα στην ίδια την δική τους παραγωγή και ταυτόχρονα στο τυπικό εμπόρευμα, προστίθενται στον αριθμό των λύσεων για το πολυώνυμο (1)
4. Οι λύσεις που προστίθενται στις λύσεις του ποσοστού κέρδους, δεν λαμβάνονται υπόψη καθώς ισούνται με των αριθμό αναπαραγωγής για τα μη βασικά εμπορεύματα. Με άλλα λόγια διαπιστώνεται, σε συμφωνία και με το Srafa, ότι οι τιμές παραγωγής για κάθε εμπόρευμα θα είναι ίσες με μηδέν.

Συγκεφαλαιώνοντας μπορούν να εξαχθούν, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

5. Στα switch points, διαφέρουν οι δυο υπό εξέτασιν τεχνικές κατά μια διαδικασία παραγωγής ενός βασικού εμπορεύματος. Στην περίπτωση αυτή ο μέγιστος αριθμός των switch points είναι ίσος με τον αριθμό των εμπορευμάτων που εισέχονται άμεσα και έμμεσα στην διαδικασία όλων των εμπορευμάτων των δυο υπό εξέτασιν τεχνικές.
6. Στην περίπτωση όπου δυο τεχνικές διαφέρουν κατά μια μέθοδο παραγωγής ενός μη βασικού εμπορεύματος, ο μέγιστος αριθμός των switch points είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των βασικών εμπορευμάτων των δυο τεχνικών, συν τον αριθμό των μη βασικών εμπορευμάτων που εισέρχονται άμεσα και έμμεσα στην διαδικασία παραγωγής του μη βασικού εμπορεύματος κατά το οποίο διαφέρουν οι δύο τεχνικές.
7. Η επιλογή του τυπικού εμπορεύματος, δεν επηρεάζει τον αριθμό των switch points
8. Η κατάταξη των εμπορευμάτων σε βασικά και μη βασικά εμπορεύματα για ένα συστημα παραγωγής, χρησιμοποιεί περισσότερες πληροφορίες από ότι η κατάταξή ενός συστήματος σε διασπώμενο ή μη διασπώμενο.

7.2 Ψευδή σημεία (εν)αλλαγής

Βασιζόμενοι στο άρθρο των Ch.Bidard και E.Klimovsky's "Switches and Fake switches in methods of production", θα (από)δειχθεί αν τα σημεία αυτά είναι στην πραγματικότητα και αντίθετα από ότι πιστεύουν ο Bidard και η Klimovsky αν πραγματικά σημεία (εν)αλλαγής (real switch points)³⁷³.

7.2.1 (Προ)υποθέσεις

Έστω ότι παράγονται n εμπορεύματα μέσω m διαθέσιμων διαδικασιών παραγωγής. Ισχύει με άλλα λόγια

$$n < m \quad (1)$$

Τα συστήματα παραγωγής που δημιουργούνται από τις διαδικασίες αυτές χρησιμοποιούν γραμμικές τεχνικές σύνθετης παραγωγής. Κατά συνέπεια δημιουργούνται $m+1$ διαφορετικές τετράγωνες τεχνικές παραγωγής και $m+1$ $w-r$ σχέσεις.

Οι $m+1$ $w-r$ σχέσεις, έχουν εξαχθεί για μια κοινή για όλα τα τυπικά υποσυστήματα τυποποίηση των τιμών..

Βάσει όλων των παραπάνω υποθέσεων θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη των fake switch points³⁷⁴.

³⁷³ Βλ. και Schefold (1989) καθώς και Bidard (1984)

³⁷⁴ Πρωτού όμως συνεχίσουμε στην απόδειξη της ύπαρξης ή μη των fake switch points, θα γίνει μια σύντομη αναφορά, στο πως οι Bidard και Klimovsky περιγράφουν τα εν λόγω fake switch points: Αρχικά ας δούμε πως ορίζουν οι και Klimovsky τα switch points στην περίπτωση της απλής παραγωγής :

“Let there $k+1$ commodities and $k+1$ methods of production. A switch point is a level r^* of the rate of profits such that the $k+1$ methods are equally profitable for some price-and-wage vector.” Bidard Ch. and Ed. Klimovsky (2004). Αυτός ο ορισμός των Bidard-Klimovsky για τα switch points δείχνει να ευσταθεί στην περίπτωση της απλής παραγωγής.

Απλοποιώντας τα δεδομένα, όμοια με τους C. Bidard και E. Klimovsky, εξετάζουμε την ειδική περίπτωση 2 εμπορευμάτων (X,Y), τα οποία παράγονται από 3 διαθέσιμες μεθόδους παραγωγής, έστω τις 1,2,3. Κατά συνέπεια προκύπτουν τρεις τετράγωνα τεχνικές παραγωγής, οι οποίες αποτελούνται από τις μεθόδους (1,2) (1,3), (2,3). Κατά συνέπεια σχηματίζονται οι μήτρες εισροών και εκροών $A_{ij}, B_{ij}, i \neq j = 1, 2, 3$, αντίστοιχα.

Έστω ότι οι τιμές παραγωγής τυποποιούνται από οποιοδήποτε κοινό τυπικό εμπόρευμα για τις 3 τεχνικές. Ως συνήθως προκύπτουν οι w-r σχέσεις καμπύλες. Στην περίπτωση αυτή για δεδομένο r, δύο από τις τρεις w-r καμπύλες τέμνονται σε ένα δεδομένο σημείο. Κατά συνέπεια για τους Bidard και Klimovsky:

Τα σημεία που τέμνονται οι εν λόγω τεχνικές δεν είναι αληθινά αλλά ψευδή σημεία (εν)αλλαγής, αφού αντιτείνουν στο ορίσμό της 2^{ης} υποσημείωσης που είδαμε παραπάνω

Ωστόσο στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής:

“In a multiple-product system, let r^* be a switch point. The price-and-wage vector is the same for all of the k+1 systems. Therefore, whatever the numeraire is, the k+1 wage-profits curves have a common point (r^*, W^*) .”

Στην βιβλιογραφία αλλά και σε προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι το σημείο που τέμνονται όλες οι w-r ευθείες ονομάζεται switch point και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Όλα τα εναλλακτικά τυπικά υποσυστήματα σε ένα switch point έχουν το ίδιο ποσοστό κέρδους και το ίδιο ονομαστικό ωρομίσθιο
- Όλα τα τυπικά υποσυστήματα (τυποποιημένα φυσικά καθ' ίδιο τρόπο) συνεπάγονται το ίδιο διάνυμα τιμών παραγωγής για το δεδομένο ποσοστό κέρδους.
- Στα switch points όλα τα τυπικά υποσυστήματα έχουν την ίδια τιμακή ένταση κεφαλαίου

Όπως είναι φυσικό τις ίδιες ιδιότητες έχουν και τα reswitch points.

Στο αντίποδα τα fake switch points όπου τέμνονται δύο ή περισσότερες αλλά σε καμία περίπτωση όλες οι w-r καμπύλες που αντιστοιχούν σε τυπικά υποσυστήματα. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι οι παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύουν για όλα τα τυπικά υποσυστήματα αλλά για μερικά από αυτά.

Ένα fake switch point μπορεί να εντοπιστεί κάτω πάνω η πέρα από την περιβάλλουσα των w-r καμπυλών. Όταν ένα fake switch βρίσκεται κάτω από την περιβάλλουσα των w-r καμπυλών δεν υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο πρόβλημα καθώς βρίσκεται στο σημείο τομής δυο υποδεέστερων τεχνικών οι οποίες εξ' ορισμού δεν επιλέγονται. Το πρόβλημα ανακύπτει όταν τα fake switch point βρίσκονται στην εξωτερική περιβάλλουσα των w-r καμπυλών.

Εάν το “fake switch point” είναι πάνω στην περιβάλλουσα των $w-r$ καμπυλών, τότε σύμφωνα με τους Bidard και Klimovsky συντελείται μια μετάβαση σε ένα σημείο όπου δεν υπάρχει αλλαγή τεχνικών.

Επιπλέον τα πραγματικά σημεία (εν)αλλαγής για τους Bidard και Klimovsky δεν εμφανίζονται ή εξαγανίζονται με την αλλαγή της τυποποίησης των τιμών παραγωγής.

Με άλλα λόγια το $w-r$ κριτήριο δεν είναι για τους Bidard-Klimovsky ένα κριτήριο μονοσήμαντης κατάταξης τεχνικών παραγωγής, λόγω του ότι συνεπάγεται την μετάβαση σε ένα σημείο, στο οποίο κατ'αυτούς δεν μπορεί να ειπωθεί τίποτα για το ποια τεχνική είναι εν τέλει η πλέον κερδοφόρα.

Οι Bidard και Klimovsky προσπαθούν να αποδείξουν την ύπαρξη των fake switch points, κινούμενοι στο ακόλουθο αναλυτικό πλαίσιο:

Οι τιμές τυποποιούνται με ένα τυπικό εμπόρευμα έστω το u , $u \geq 0$

Για δεδομένο r , $r_0 > 0$, τέτοιο ώστε η διεύθυνση του καθαρού προϊόντος να είναι η ίδια με αυτή του τυπικού προϊόντος.

Έστω ότι το r ,

$$r_0 > 0: b_i - a_i(1 + r_0) = w_0 u, m = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2)$$

, ένα τέτοιο r υπάρχει εάν το τυπικό εμπόρευμα βρίσκεται στην γωνία που σχηματίζεται από τα διανύσματα:

$$b_i - a_i \text{ and } b_i - a_i(1 + R). \quad (3)$$

Οι Bidard και Klimovsky υποστηρίζουν ότι το r_0 είναι ένα fake switch point, και ο λόγος είναι γιατί για r_0 , κάθε σύστημα το οποίο περιέχει την παραπάνω διαδικασία I μπορεί να παράξει w_0 μονάδες του τυπικού εμπορεύματος.

.

7.2.2 Real και “Fake” switch points

Ο κύριος στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να (απο)δείξει ότι τα «fake switch points» είναι στην πραγματικότητα real switch points³⁷⁵. Το τελευταίο θαδειχθεί τόσο σε όρους του αριθμητικού παραδείγματος των Bidard και Klimovsky όσο και στην γενική περίπτωση με την χρή ενός μη διασπώμενου συστήματος σύνθετης παραγωγής.

7.2.3 Το αριθμητικό παράδειγμα

Υπενθυμίζονται τα αριθμητικά δεδομένα του αριθμητικού παραδείγματος των Bidard και Klimovsky:

Έστω οι μήτρες $A \geq 0$ και $B \geq 0$, με $A+B > 0$, είναι οι $n \times m$ μήτρες των εισροών και των εκροών αντίστοιχα. Έστω ℓ , $\ell > 0$ το $1 \times m$ διάνυσμα των εισροών σε ζωναντή εργασία

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 20 & 20 & 30 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 21 & 23 & 36 \\ 27 & 25 & 34 \end{bmatrix}, \ell = [1, 1, 1]$$

Για τις τιμές παραγωγής προκύπτει:

$$p_{ij} = p_j A_{ij} (1+r) + w \ell_{ij}, i \neq j, i, j=1, 2, 3$$

Κατά συνέπεια για τις τιμές παραγωγής και για τις παραγόμενες $w-r$ σχέσεις προκύπτει:

$$p_{12} = [a, a] \\ w_{12} = a(8 - 40r)$$

³⁷⁵ Για να είμαστε περισσότερο ακριβείς θα ήταν ορθότερο να πούμε ότι όσο ψευδή είναι τα fake switch points, άλλο τόσο ψευδή είναι και τα real switch points

$$p_{13} = [b(3+10r), b(5-10r)]$$

$$w_{13} = b(38-220r)$$

$$p_{23} = [c(1+10r), c(3-10r)]$$

$$w_{23} = c(18-100r)$$

Οι τιμές για κάθε τεχνική ij τυποποιούνται ως εξής:

$$p_{1,ij} = 1$$

Κατα συνέπεια για την w-r κάθε τεχνικής ισχύει:

$$w_{12} = (8-40r)$$

$$w_{13} = \frac{(38-220r)}{3+10r}$$

$$w_{23} = \frac{(18-100r)}{1+10r}$$

Τα αποτελέσματα για τις τιμές παραγωγής είναι για την πρώτη τυποποίηση των τιμών με $p(x)=1$:

$p(x)=1$

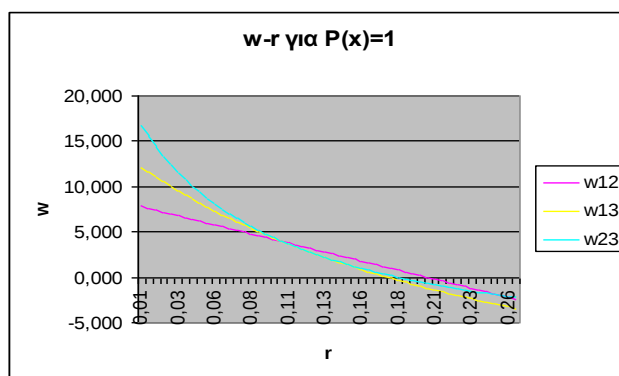
r	w12	w13	w23
0,005	7,800	12,098	16,667
0,01	7,600	11,548	15,455
0,015	7,400	11,016	14,348
0,02	7,200	10,500	13,333
0,025	7,000	10,000	12,400
0,03	6,800	9,515	11,538
0,035	6,600	9,045	10,741
0,04	6,400	8,588	10,000

0,045	6,200	8,145	9,310
0,05	6,000	7,714	8,667
0,055	5,800	7,296	8,065
0,06	5,600	6,889	7,500
0,065	5,400	6,493	6,970
0,07	5,200	6,108	6,471
0,075	5,000	5,733	6,000
0,08	4,800	5,368	5,556
0,085	4,600	5,013	5,135
0,09	4,400	4,667	4,737
0,095	4,200	4,329	4,359
0,1	4,000	4,000	4,000
0,105	3,800	3,679	3,659
0,11	3,600	3,366	3,333
0,115	3,400	3,060	3,023
0,12	3,200	2,762	2,727
0,125	3,000	2,471	2,444
0,13	2,800	2,186	2,174
0,135	2,600	1,908	1,915
0,14	2,400	1,636	1,667
0,145	2,200	1,371	1,429
0,15	2,000	1,111	1,200

0,155	1,800	0,857	0,980
0,16	1,600	0,609	0,769
0,165	1,400	0,366	0,566
0,17	1,200	0,128	0,370
0,175	1,000	-0,105	0,182
0,18	0,800	-0,333	0,000
0,185	0,600	-0,557	-0,175
0,19	0,400	-0,776	-0,345
0,195	0,200	-0,990	-0,508
0,2	0,000	-1,200	-0,667
0,205	-0,200	-1,406	-0,820
0,21	-0,400	-1,608	-0,968
0,215	-0,600	-1,806	-1,111

Πίνακας 1

Καθώς και η w-r σχέση:



Σχήμα 1

Σχετικά με την ένταση κεφαλαίου σε όρους τιμών παραγωγής ισχύουν τα ακόλουθα³⁷⁶:

Από την σχέση των τιμών παραγωγής προκύπτει:

$$w = K_q(R-r) \Rightarrow K_q = \frac{w}{R-r} \quad (4)$$

, όπου K_q η τιμιακή ένταση κεφαλαίου του τυπικού υποσυστήματος q .

Κατά συνέπεια για τις τιμιακές εντάσεις κεφαλαίου K_{ij} , $i \neq j$, $i, j=1,2,3$ ισχύει:

$$K_{12} = \frac{8-40r}{0,2-r}$$

$$K_{13} = \frac{\frac{38-220r}{3+10r}}{\frac{19}{110}-r}$$

$$K_{23} = \frac{\frac{18-100r}{1+10r}}{\frac{9}{50}-r}$$

Για τις εντάσεις κεφαλαίου προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για $p(x)=1$:

r	k12	k13	k23
0,005	40,000	73,631	95,238
0,01	40,000	73,948	90,909
0,015	40,000	74,284	86,957
0,02	40,000	74,643	83,333
0,025	40,000	75,026	80,000
0,03	40,000	75,435	76,923

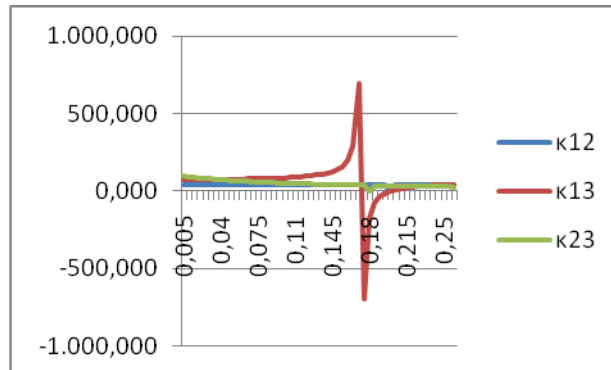
³⁷⁶ Γ.Σταμάτης (1997a)

0,035	40,000	75,875	74,074
0,04	40,000	76,347	71,429
0,045	40,000	76,856	68,966
0,05	40,000	77,407	66,667
0,055	40,000	78,005	64,516
0,06	40,000	78,656	62,500
0,065	40,000	79,367	60,606
0,07	40,000	80,147	58,824
0,075	40,000	81,008	57,143
0,08	40,000	81,961	55,556
0,085	40,000	83,022	54,054
0,09	40,000	84,212	52,632
0,095	40,000	85,556	51,282
0,1	40,000	87,083	50,000
0,105	40,000	88,837	48,780
0,11	40,000	90,870	47,619
0,115	40,000	93,255	46,512
0,12	40,000	96,092	45,455
0,125	40,000	99,524	44,444
0,13	40,000	103,759	43,478
0,135	40,000	109,116	42,553
0,14	40,000	116,111	41,667
0,145	40,000	125,628	40,816
0,15	40,000	139,333	40,000
0,155	40,000	160,769	39,216
0,16	40,000	199,048	38,462

0,165	40,000	286,863	37,736
0,17	40,000	696,667	37,037
0,175	40,000	-696,667	36,364
0,18	40,000	-174,167	n/a
0,185	40,000	-77,407	35,088
0,19	40,000	-36,667	34,483
0,195	40,000	-14,218	33,898
0,2	0,000	0,000	33,333
0,205	40,000	9,812	32,787
0,21	40,000	16,992	32,258
0,215	40,000	22,473	31,746

Πίνακας 2

And the relation:



Σχήμα 2

Για τυποποίηση των τιμών με:

$$p_{2,ij}=1$$

Για την w-r σχέση κάθε τεχνικής ισχύει:

$$w_{12} = (8 - 40r)$$

$$w_{13} = \frac{(38 - 220r)}{5 - 10r}$$

$$w_{23} = \frac{(18 - 100r)}{3 - 10r}$$

Τα αποτελέσματα για βάσει της τυποποίησης $p(y)=1$ είναι τα εξής για το w :

$p(y)=1$				
r	w_{12}	w_{13}	w_{23}	
0,005	7,800	7,455	5,932	
0,01	7,600	7,306	5,862	
0,015	7,400	7,155	5,789	
0,02	7,200	7,000	5,714	
0,025	7,000	6,842	5,636	
0,03	6,800	6,681	5,556	
0,035	6,600	6,516	5,472	
0,04	6,400	6,348	5,385	
0,045	6,200	6,176	5,294	
0,05	6,000	6,000	5,200	
0,055	5,800	5,820	5,102	
0,06	5,600	5,636	5,000	
0,065	5,400	5,448	4,894	
0,07	5,200	5,256	4,783	
0,075	5,000	5,059	4,667	
0,08	4,800	4,857	4,545	
0,085	4,600	4,651	4,419	
0,09	4,400	4,439	4,286	
0,095	4,200	4,222	4,146	
0,1	4,000	4,000	4,000	

0,105	3,800	3,772	3,846
0,11	3,600	3,538	3,684
0,115	3,400	3,299	3,514
0,12	3,200	3,053	3,333
0,125	3,000	2,800	3,143
0,13	2,800	2,541	2,941
0,135	2,600	2,274	2,727
0,14	2,400	2,000	2,500
0,145	2,200	1,718	2,258
0,15	2,000	1,429	2,000
0,155	1,800	1,130	1,724
0,16	1,600	0,824	1,429
0,165	1,400	0,507	1,111
0,17	1,200	0,182	0,769
0,175	1,000	-0,154	0,400
0,18	0,800	-0,500	0,000
0,185	0,600	-0,857	-0,435
0,19	0,400	-1,226	-0,909
0,195	0,200	-1,607	-1,429
0,2	0,000	-2,000	-2,000
0,205	-0,200	-2,407	-2,632
0,21	-0,400	-2,828	-3,333
0,215	-0,600	-3,263	-4,118

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.

Και διαγραμματικά η w-r σχέση:

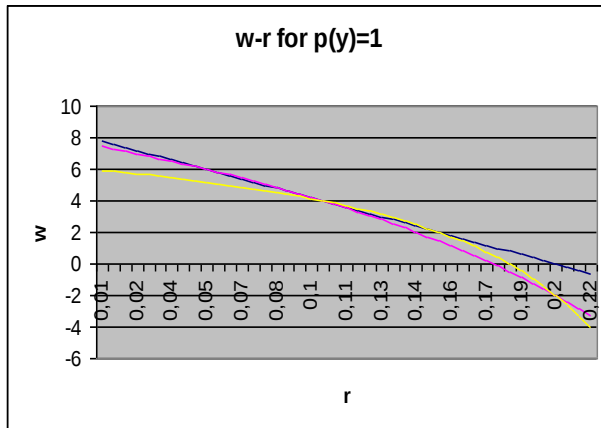


Figure 3

Ομοίως βασιζόμενοι στο σύστημα των τιμών παραγωγής προκύπτει για την τιμιακή ένταση κεφαλαίου:

$$w = K_q(R - r) \Rightarrow K_q = \frac{w}{R - r}$$

, όπου K_q η τιμιακή ένταση κεφαλαίου του τυπικού υποσυστήματος q .

Οι τιμιακές εντάσεις κεφαλαίου είναι για την περίπτωση αυτή K_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ οι ακόλουθες:

$$K_{12} = \frac{8 - 40r}{0,2 - r}$$

$$K_{13} = \frac{\frac{38 - 220r}{33} - r}{\frac{5 - 10r}{210} - r}$$

$$K_{23} = \frac{\frac{18-100r}{3-10r}}{\frac{15}{90}-r}$$

Για τις εντάσεις κεφαλαίου προκύπτει για την δεδομένη περίπτωση:

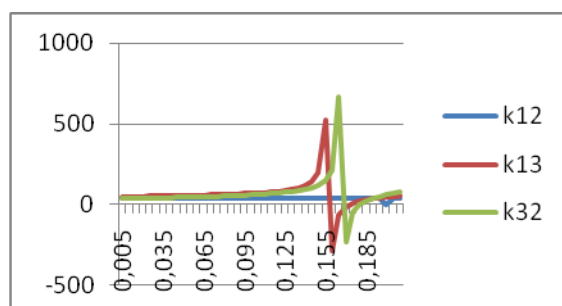
r	k12	k13	k32
0,005	40	48,99701	36,69404
0,01	40	49,65326	37,41746
0,015	40	50,33414	38,17235
0,02	40	51,04167	38,96104
0,025	40	51,77809	39,7861
0,03	40	52,54602	40,65041
0,035	40	53,34842	41,5572
0,04	40	54,18876	42,51012
0,045	40	55,07104	43,5133
0,05	40	56	44,57143
0,055	40	56,98122	45,68992
0,06	40	58,02139	46,875
0,065	40	59,12858	48,13394
0,07	40	60,31262	49,47526
0,075	40	61,58568	50,90909
0,08	40	62,96296	52,44755

0,085	40	64,4638	54,10536
0,09	40	66,11313	55,90062
0,095	40	67,94381	57,85593
0,1	40	70	60
0,105	40	72,34264	62,37006
0,11	40	75,05828	65,01548
0,115	40	78,27427	68,00349
0,12	40	82,18623	71,42857
0,125	40	87,11111	75,42857
0,13	40	93,59886	80,2139
0,135	40	102,6955	86,1244
0,14	40	116,6667	93,75
0,145	40	141,5079	104,2184
0,15	40	200	120
0,155	40	527,5362	147,7833
0,16	40	-288,235	214,2857
0,165	40	-64,5862	666,6667
0,17	40	-14,1414	-230,769
0,175	40	8,615385	-48
0,18	40	21,875	0
0,185	40	30,76923	23,71542
0,19	40	37,30715	38,96104

0,195	40	42,43736	50,42017
0,2	Δ.Ο.	46,66667	60
0,205	40	50,29092	68,64989
0,21	40	53,49487	76,92308

Πίνακας 4

Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 4

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση της τυποποίησης των τιμών με $p(x)=1$ υπάρχει μόνο ένα Switch point. Αντίθετα όταν οι τιμές τυποποιούνται με $p(Y)=1$ υπάρχουν 3 Switch points (για τα οποία θα αποφανθούμε αργότερα αν είναι real ή fake) για $r=0.05, r=0.1, r=0.15$.

Τυποποιώντας τις τιμές με $p(x)=1$ υπάρχει μόνο ένα switch point στο $r=0.1$. αλλά τα πράγματα είναι διαφορετικά αν οι τιμές παραγωγής τυποποιηθούν με $p(Y)=1$. Υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση ένα “real” switch point για $r=0,1$ και δυο “fake” switch points για $r=0.05$ και $r=0.15$.

Έγινε φανερό σε όρους του αριθμητικού παραδείγματος ότι το switch point $r=0.1$ δεν επηρεάζεται από την μεταβολή της τυποποίησης, σε αντίθεση με τα switch points για $r=0.05, r=0.15$, τα οποία εμφανίζονται μόνο αν οι τιμές τυποποιηθούν με την $p(Y)=1$.

Βασιζόμενοι στο $w-r$ κριτήριο, δεν υπάρχει κάποιος σημαντικός λόγος, ένεκα του οποίου τα “fake” switch points να μην συνεπάγονται μια μετάβαση από μια λιγότερο κερδοφόρα τεχνική σε μια περισσότερο. Με άλλα λόγια για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο εάν το r (το οποίο αντιστοιχεί σε ένα “fake” switch point) δεν επιλέγονταν τότε θα επιλέγονταν υπήρχε μια τεχνική η οποία δεν αποφέρει τα μεγαλύτερα δυνατά κέρδη για τους καπιταλιστές.

Είναι γνωστό από την βιβλιογραφία³⁷⁷, ότι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν τα χαρακτηριζόμενα ως real switch points να εμφανίζονται ή να εξαφανίζονται ή και να μετατοπίζονται για δεδομένο ποσοστό κέρδους ακόμα και στην trivial περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής.

Οι Bidard και Klimovsky, υποστηρίζουν ότι τα fake switch points μπορούν να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται μόνο στην ειδική περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Ωστόσο, όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, από την Bharadwaj’s³⁷⁸ γνωρίζουμε ότι είναι δυνατόν δυο τεχνικές να συνεπάγονται ένα διαφορετικό διάνυσμα τιμών στα switch points, στην περίπτωση που τεχνικές παραγωγής δεν είναι γειτονικές

Στην περίπτωση αυτή, δεν μεταβάλλεται μόνο το διάνυσμα των τιμών παραγωγής στα switch points αλλά επίσης επηρεάζεται και η εμφάνιση (εξαφάνιση) για τα switch points από την μεταβολή της τυποποίησης των τιμών παραγωγής.

Δανειζόμενοι τον ορισμό των H.Kurz και N.Salvadori³⁷⁹ για την ύπαρξη μιας ελαχιστοποιούσας το κόστος τεχνικής παραγωγής, η οποία όπως είδαμε δεν είναι δυνατόν να αποφέρει κάποια άλλη τεχνική επιπλέον κέρδη³⁸⁰:

$$\begin{aligned} p_i &\leq (1+r)p_i A_{ii} + w l_{ii} \\ p_i &= p_i A_{ii} (1+r) + w l_{ii} \\ p_i d &= 1 \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια εισάγουμε τις τιμές που προκύπτουν για $R_{i_{\max}}$, στο κριτήριο της μεγιστοποίησης των κερδών για την τεχνική $[A_{ii}, l_{ii}]$. Εάν η συνθήκη (3) ικανοποιείται

³⁷⁷ Th Mariolis, (1994)

³⁷⁸ Kr. Bharadwaj (1970)

³⁷⁹ H.D.Kurz and Neri Salvadori, (1995)

³⁸⁰ Ch. Bidard (1990)

τότε δεν προκύπτουν υπερκέρδη και η τεχνική is $[A_i, I_i]$ επιλέγεται ως η ελαχαιστοποιούσα το κόστος.

Στην περίπτωση τώρα της σύνθετης παραγωγής οι παραπάνω συνθήκες θα γίνουν::

$$\begin{aligned} \rho_i B_{ii} &\leq (1+r)\rho_i A_{ii} + wI_{ii} (1) \\ \rho_i B_i &= \rho_i (1+r)\rho_i A_i + wI_i (2) \\ \rho_i d &= 1(3) \end{aligned} \quad , \text{ όπου } r = R_{i_{\max}}$$

Για τις ακόλουθες τυποποιήσεις τιμών:

$$\rho_{1,ij} = 1$$

Προκύπτουν για την w-r κάθε τεχνικής stand:

$$w_{12} = (8 - 40r) (4)$$

$$w_{13} = \frac{(38 - 220r)}{3 + 10r} (5)$$

$$w_{23} = \frac{(18 - 100r)}{1 + 10r} (6)$$

Αρχικά για την τεχνική (12) και για $r = R_{\max(12)} = 0,2$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

Το διάνυσμα τιμών της τεχνικής (12) είναι το $p_{12} = [1, 1]$.

Εφαρμόζοντας την συνθήκη (1) για τις τεχνικές (13) και (23) προκύπτει:

$$\rho_{12} B_{13} \leq (1+r)\rho_{12} A_{13} + wI_{13} (9) \text{ και}$$

$$\rho_{12} B_{23} \leq (1+r)\rho_{12} A_{23} + wI_{23} (10)$$

$$\rho_{12} B_{23} \leq (1+r)\rho_{12} A_{23} + wI_{23} (10)$$

Αρχικά εξετάζουμε την φορά της συνθήκης (9) για $r=0.1$:

$$[48 \ 70] = [48 \ 70]$$

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε την φορά της συνθήκης (10) στο switch point $r=0.1$:

$$[48 \ 70] = [48 \ 70]$$

Προκύπτει ότι στο switch point $r=0.1$ οι τιμές παραγωγής των τεχνικών (13) και (23) are είναι ίσες με αυτές της τεχνικής (12) και για τυποποίηση με $p_1=1$.

Για τυποποίηση με :

$$p_{2,ij}=1$$

Για την w - r κάθε τεχνικής προκύπτει:

$$w_{12} = (8 - 40r)$$

$$w_{13} = \frac{(38 - 220r)}{5 - 10r}$$

$$w_{23} = \frac{(18 - 100r)}{3 - 10r}$$

Αρχικά για την τεχνική (12) προκύπτει για $r = R_{\max(12)} = 0,2$

$$p_{12} = [1,1]_{381}$$

Αρχικά εξετάζουμε τι συμβαίνει στο switch point $r=0.1$. σύμφωνα με το cost minimization criterion ισχύει:

$$p_{12}B_{13} = p_{12}A_{13}(1+r) + w_{13}\ell_{13} \rightarrow [40, 70] = [48, 70]$$

Επομένως η τεχνική (13) ελαχιστοποιεί το κόστος καθώς δεν συναπάγονται επιπλέον κόστη από την χρήση απο την χρήση της τεχνικής αυτής.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει για την τεχνική (23):

$$p_{12}B_{23} = p_{12}A_{23}(1+r) + w_{23}\ell_{23} \rightarrow [48, 70] = [48, 70]$$

Η τεχνική (13) ελαχιστοποιεί το κόστος καθώς δεν προκύπτουν επιπλέον κόστη. Με άλλα λόγια και οι τρεις τεχνικές ελαχιστοποιούν το κόστος.

Είναι φανερό ότι στο “real” switch point $r=0.1$ και οι τρεις τεχνικές είναι ισάξιες. Στο αριθμητικό παράδειγμα των Bidard και Klimovsky προκύπτει:

$$p_{12} = p_{13} = p_{23} = [1,1]$$

³⁸¹Το διάνυσμα $[1,1]$ ισχύει για κάθε r , $0 \leq r \leq 0.2$

Επιπλέον εξετάζουμε τι συμβαίνει στο “fake” switch point $r=0.05$. Σύμφωνα με το cost minimization criterion προκύπτει:

$$p_{12}B_{13} \geq p_{12}A_{13}(1+r) + w_{13}\ell_{13} \rightarrow [40, 70] \geq [48, 69]$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή τίποτε δεν μπορεί να ειπωθεί σχετικά με το εάν η τεχνική (23) ελαχιστοποιεί το κόστος ή όχι. Με άλλα λόγια το cost minimization criterion δεν μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε μια κυρίαρχη -σε όρους Bidard- τεχνική.

Με τον ίδιο τρόπο για την τεχνική (23) ισχύει:

$$p_{12}B_{23} \geq p_{12}A_{23}(1+r) + w_{23}\ell_{23} \rightarrow [40, 70] \geq [47.2, 68.2]$$

Και σε αυτήν την περίπτωση τίποτε δεν μπορεί να ειπωθεί για το αν η τεχνική (23) ελαχιστοποιεί το κόστος ή όχι. Με άλλα λόγια το cost minimization criterion δεν μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή της ελαχιστοποιούσας το κόστος τεχνικής.

Τα διανύσματα τιμών για τις τεχνικές αυτές είναι:

$$\begin{aligned} p_{12} &= [1, 1] \\ p_{13} &= [0.778, 1] \\ p_{23} &= [0.6, 1] \end{aligned}$$

Στο “fake” switch point $r=0.15$, βάσει πάλι στο cost minimization criterion ισχύει:

$$p_{12}B_{13} < p_{12}A_{13}(1+r) + w_{13}\ell_{13} \rightarrow [40, 70] < [47.429, 70.428]$$

Επομένως η τεχνική (13) δεν συνεπάγεται επιπλέον κόστη.

Ομοίως για την τεχνική (23):

$$p_{12}B_{23} \leq p_{12}A_{23}(1+r) + w_{23}\ell_{23} \rightarrow [48, 70] \leq [48, 71]$$

Επομένως η τεχνική (23) ελαχιστοποιεί το κόστος αφού δεν αποφέρει επιπλέον κέρδη. Με άλλα λόγια η τεχνική (23) είναι η ελαχιστοποιούσα το κόστος.

Τέλος για το διάνυσμα των τιμών παραγωγής για τις παραπάνω τεχνικές ισχύει:

$$\begin{aligned} p_{12} &= [1, 1] \\ p_{13} &= [1.285, 1] \\ p_{23} &= [1.667, 1] \end{aligned}$$

Συνεπάγεται, ότι στα “fake switch” points οι τεχνικές, οι οποίες τέμνονται, δεν έχουν το ίδιο διάνυσμα τιμών παραγωγής³⁸². Το τελευταίο όμως σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει ότι στα εν λόγω σημείο δεν συντελείται μια μετάβαση από την μια τεχνική στην άλλη.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στην γενική περίπτωση για τα “fake” switch points

7.2.4 Η γενική περίπτωση

Σε όρους του w-r κριτηρίου, μια μη διασπώμενη παραγωγική τεχνική σύνθετης παραγωγής³⁸³ joint production technique, έστω η (a) επιλέγεται έναντι της (b) όταν ισχύει:

$w^a > w^b$, το οποίο συνεπάγεται:

$$\ell^a[B^a - A^a(1+r)]^{-1}y < \ell^b[B^b - A^b(1+r)]^{-1}y, \text{ για τυποποίηση με } y, y \geq 0^{384}.$$

Με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση περισσότερων των δύο τεχνικών:

$$w^a > w^b > w^c$$

$$\ell^a[B^a - A^a(1+r)]^{-1}y < \ell^b[B^b - A^b(1+r)]^{-1}y < \ell^c[B^c - A^c(1+r)]^{-1}y$$

$$p'y = 1, i=a,b,c.$$

Αρχικά για την περίπτωση ενός “real” switch points (κατά τους Bidard και Klimovsky), ισχύει:

$$w^a = w^b = w^c$$

$$\ell^a[B^a - A^a(1+r)]^{-1}y = \ell^b[B^b - A^b(1+r)]^{-1}y = \ell^c[B^c - A^c(1+r)]^{-1}y$$

Για να είναι η ύπαρξη ενός switch point ανεξάρτητο από την τυποποίηση, πρέπει να ισχύει:

$$\ell^a[B^a - A^a(1+r)]^{-1} = \ell^b[B^b - A^b(1+r)]^{-1} = \ell^c[B^c - A^c(1+r)]^{-1},$$

³⁸² Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να αναφέρουμε, ότι όχι μόνο στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής αλλά και στην περίπτωση των μη γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής το w-r κριτήριο και το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους δεν συνάδουν.

³⁸³ Με άλλα λόγια ισχύει: $[B - A(1+r)]^{-1} \geq 0$

³⁸⁴ Το Y μπορεί να είναι κάθε nx1 διάνυσμα, που παριστά ένα οποιοδήποτε τυπικό εμπόρευμα

Με άλλα λόγια είναι αναγκαίο όλα τα διανύσματα $\ell^i [B^i - A^i(1+r)]^{-1}$, για $i=1,2,3$ να είναι ίσα³⁸⁵.

Αντίθετα στην περίπτωση των “fake” switch points ισχύει:

$$w^a = w^b \neq w^c$$

$$\ell^a [B^a - A^a(1+r)]^{-1}y = \ell^b [B^b - A^b(1+r)]^{-1}y \neq \ell^c [B^c - A^c(1+r)]^{-1}y$$

Έστω ότι το fake switch point – βρίσκεται στην εξωτερική περιβάλλουσα των w-r καμπυλών, τότε ισχύει:

$$w^a = w^b > w^c$$

$$\ell^a [B^a - A^a(1+r)]^{-1}y = \ell^b [B^b - A^b(1+r)]^{-1}y < \ell^c [B^c - A^c(1+r)]^{-1}y$$

Είναι φανερό, ότι στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με το w-r κριτήριο, το σύστημα λειτουργεί είτε με την τεχνική α είτε με την τεχνική β. Εάν το σύστημα λειτουργεί με την (c) τότε αυτό λειτουργεί κάτω από τις παραγωγικές του δυνατότητες³⁸⁶.

Παρόλα αυτά τα fake switch points, σύμφωνα με το w-r κριτήριο είναι πραγματικά σημεία εναλλαγής –παρότι οι Bidard και Klimovsky- υποστηρίζουν το αντίθετο. Το γεγονός ότι οι τιμές παραγωγές δεν είναι ίσες σε αυτά τα σημεία για όλες τις τεχνικές δεν δείχνει να επηρεάζει την τελική επιλογή των τεχνικών παραγωγής. Είδαμε ότι τα «fake switch points» εμφανίζονται και εξαφανίζονται με την τυποποίηση των τιμών³⁸⁷. Το τελευταίο ωστόσο δεν είναι κάτι καινούριο καθώς το φαινόμενο αυτό όπως έχουμε δει στην παρούσα εργασία, αλλά και στην βιβλιογραφία μπορεί να εντοπιστεί ακόμα και στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής³⁸⁸, και αυτό γιατί η τυποποίηση των τιμών επηρεάζει την σχετική θέση των w-r καμπυλών³⁸⁹. Όμως σύμφωνα με το cost minimization criterion δεν είναι

³⁸⁵ Ομοίως δύο τεχνικές $i=a,b$ οι οποίες συγκρίνονται, μπορούν να καταταχθούν ανεξάρτητα από την τυποποίηση αν τα διανύσματα $\ell^i [B^i - A^i(1+r)]^{-1}$ είναι απολύτως ή κατά τάξη συγκρίσιμα.

³⁸⁶ Βάσει της γνωστής σχέσης $w = \pi_c - K_n r$, στην περίπτωση, όπου ισχύει $w^a = w^b > w^c$ σταθερών όλων των άλλων η παραγωγικότητα της εργασίας θα πρέπει να μειωθεί (καθώς για δεδομένο r η ένταση κεφαλαίου είναι σταθερή). Το τελευταίο ωστόσο δεν δείχνει να είναι μια ορθολογική συμπεριφορά.

³⁸⁷ Η ύπαρξη ενός πραγματικού σημείου (εν)αλλαγής στο $r=0.1$ δεν δείχνει να σχετίζεται με την φύση του ως πραγματικό switch point αλλά περισσότερο με την ιδιότητα του ως πρότυπο λόγο των πρότυπων-τυπικών υποσυστημάτων που συγκρίνονται

³⁸⁸ Βλ. Θ.Μαριόλης (1994)

³⁸⁹ Το τελευταίο ανάγει την σύγκριση τεχνικών σε μια σύγκριση τυπικών υποσυστημάτων.

δυνατόν να αποφανθούμε ποια τεχνική θα επιλεγεί. Το τελευταίο δεν πρέπει να μας προκαλεί εντύπωση καθώς γνωρίζουμε από την βιβλιογραφία³⁹⁰ ότι στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής το $w-r$ κριτήριο δεν συμβαδίζει με αυτό της ελαχιστοποίησης του κόστους.

7.2.5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα ανάλυση ως τώρα έγινε η προσπάθεια να (απο)δειχθεί σε όρους του αριθμητικού παραδείγματος των Bidard και Klimovsky, ότι η ύπαρξη των “Fake” switch points, δεν επιρρεάζει τα γνωστά γύρω από την επιλογή των τεχνικών.

Το γεγονός ότι στα switch points αυτά, δεν υπάρχει το ίδιο διάνυσμα τιμών, δεν επιρρεάζει στο ελάχιστο την επιλογή της τεχνικής. Σύμφωνα με το $w-r$ και το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους, ανεξαρτήτως αν αυτά συμβαδίζουν, εν τέλει επιλέγεται κάποια τεχνική³⁹¹.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό, σύμφωνα με οποίο τα εν λόγω switch points χαρακτηρίζονται ψευδή, είναι το γεγονός ότι τα σημεία αυτά εμφανίζονται ή εξαφανίζονται με μια αλλαγή στην τυποποίηση των τιμών, όπως άλλωστ ε είναι γνωστό από την βιβλιογραφία.

Το γεγονός ότι στο παραπάνω αριθμητικό παράδειγμα το switch point $r=0.1$ δεν επιρρεάζεται από μια αλλαγή στην τυποποίηση των τιμών οφείλεται στο γεγονός, ότι:

Το σημείο $r=0.1$ αποτελεί τον πρότυπο λόγο μεταξύ του υπερπροϊόντος και των μέσων παραγωγής, για κάθε τυποποίηση των τιμών.

Σύμφωνα με την οικονομική θεωρία στο σημείο $r=0.1$ ο πρότυπος αυτός λόγος είναι ίσος σε όλα τα τυπικά υποσυστήματα³⁹².

Με άλλα λόγια και εκφρασμένο σε μαθηματικούς όρους στην περίπτωση που ισχύει το παραπάνω τότε οι γραμμές και οι στήλες της μήτρας $A+B$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες

Κατα συνέπεια και βάσει όλων των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αριθμητικό παράδειγμα που πραγματεύτηκαν οι Bidard και Klimovksy αποτελεί μια ειδική περίπτωση και σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί τον κανόνα.

³⁹⁰ Βλ. Γ. Σταμάτης (1997)

³⁹¹ Το τελευταίο αποδείχτηκε σε όρους του παραπάνω αριθμητικού παραδείγματος

³⁹² Όπως είναι ξεκάθαρο γίνεται αναφορά σε τυπικά υποσυστήματα, για περισσότερα βλ. Γ. Σταμάτης (1999) and Γ. Σταμάτης (1995)

8 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ (ΜΗ ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΜΕΝΕΣ) ΕΙΣΡΟΕΣ

8.1 Εισαγωγή

Ως τώρα είχαμε δει την περίπτωση που περιγράφεται από τους νεορικαρδιανούς οικονομολόγους ως επί το πλείστον. Την περίπτωση δηλαδή όπου υπάρχει μόνο μια μη αναπαραγόμενη εισροή, η εργασία.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε την ύπαρξη ενός ακόμα μη αναπαραγόμενου συντελεστή παραγωγής. Για λόγους ιστορικής συμβατότητας με τους κλασικούς οικονομολόγους και τον Adam Smith θεωρούμε ότι ο νέος αυτός συντελεστής είναι η γη.

Η ύπαρξη ενός δεύτερου μη αναπαραγόμενου συντελεστή, ήταν μια φανερή αδυναμία της νεορικαρδιανής θεωρίας, η οποία εύστοχα είχε εντοπιστεί από πολλούς οικονομολόγους νεοκλασικούς και μη.

Παρακάτω θα εξεταστεί, το πώς προσδιορίζονται οι τιμές παραγωγής και το αν έχει νόημα να μιλάει κάποιος για κατάταξη τεχνικών παραγωγής στα πλαίσια του κριτηρίου της μεγιστοποίησης των κερδών.

8.2 Υποθέσεις Υποδείγματος

1. Η τεχνολογία είναι γραμμική και κατά συνέπεια χαρακτηρίζεται από Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας. Από κάθε διαδικασία παράγεται αυστηρά ένα μόνο εμπόρευμα. Με άλλα λόγια μιλάμε για μια γραμμική τεχνική απλής παραγωγής.
2. Παράγονται n εμπορεύματα μέσω n διαδικασιών παραγωγής. Κατά συνέπεια μιλάμε για τετράγωνες τεχνικές παραγωγής
3. Παράγεται ένα ακαθάριστο προϊόν, με την από κοινού χρήση δυο μη αναπαραγόμενων συντελεστών, οι οποίοι απασχολούνται πλήρως -της

εργασίας (L) και της γης (T)- και των n παραγόμενων εμπορευμάτων (έχουν ταυτόχρονα και τον ρόλο των μέσων παραγωγής) σε σταθερές αναλογίες. Τα μέσα παραγωγής φθείρονται εξ' ολοκλήρου.

4. Την οικονομία που περιγράφεται την χαρακτηρίζει τέλειος ανταγωνισμός, πράγμα που σημαίνει την ύπαρξη ενιαίων αμοιβών των παραγωγικών συντελεστών. Πιο συγκεκριμένα το ποσοστό κέρδους, το ονομαστικό ωρομίσθιο και η αμοιβή του παραγωγικού συντελεστή γη (ας την ονομάσουμε ενοίκιο) είναι ενιαία, ή με μαθηματικούς όρους απλά βαθμωτά.
5. Όλες οι διαδικασίες έχουν την ίδια διάρκεια.
6. Η οικονομία δεν μεγθύνεται
7. Όπως είναι αυτονόητο η τεχνική είναι παραγωγική και r -προσοδοφόρα
8. Η τεχνική που εξετάζουμε είναι μη διασπώμενη

8.3 Προσδιορισμός των τιμών παραγωγής

Βάσει των παραπάνω προϋποθέσεων για το σύστημα των τιμών παραγωγής της τεχνικής ισχύει, αφού ορίσουμε επιπλέον σαν T το $1 \times n$ διάνυσμα των εισροών σε γή, W το βαθμωτό που παριστά την αμοιβή του παραγωγικού συντελεστή γη³⁹³:

$$p = pA(1+r) + w\ell + WT \quad (88)$$

Το σύστημα (1) αποτελείται από n σχέσεις και περιέχει $n+3$ αγνώστους³⁹⁴. Κατά συνέπεια οι τιμές σε αυτήν την περίπτωση προσδιορίζονται διαφορετικά. Αναλυτικότερα εισάγοντας μια εξίσωση τυποποίησης οι βαθμοί ελευθερίας μειώνονται σε 2. Έστω ότι η τυποποίηση γίνεται με το τυπικό εμπόρευμα $q, q \geq 0$

$$pq = 1 \quad (89)$$

Ορίζοντας εξωγενώς μια από τις τρεις μεταβλητές της κατανομής του εισοδήματος w, r, W , μειώνονται οι άγνωστοι σε $n+1$. Κατά συνέπεια υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας που πρέπει να εξαλειφεί. Ο εναπομένον βαθμός ελευθερίας μπορεί

³⁹³ Βλ και Bidard (1999), Kurz/Salvadori (1994), Schefold (1974)

³⁹⁴ Σε αντίθεση με την περίπτωση της μιας μη αναπαραγόμενης εισροής, όπου οι άγνωστοι είναι $n+2$.

εξαλειφεί μόνον αν θεωρηθεί σταθερή μια ακόμα μεταβλητή της κατανομής του εισοδήματος, ή αν παρθούν σχετικές τιμές.

Κατά συνέπεια για την λύση της σχέσης (1) χρησιμοποιώντας και την σχέση (2) ισχύει:

$$pq = (w\ell + WT)[I - A(1+r)]^{-1}q \quad (90)$$

Για να λυθεί λοιπόν η σχέση (3) πρέπει να δοθούν εξωγενώς δύο εκ των μεταβλητών κατανομής του εισοδήματος.

Από την σχέση (3) μπορούν να προσδιοριστούν και οι μεταβλητές της κατανομής του εισοδήματος.

Αρχικά για το ποσοστό κέρδους ισχύει από την σχέση (3):

$$r = \frac{\{p[I - A] - w\ell - WT\}q}{pAq} \quad (91)$$

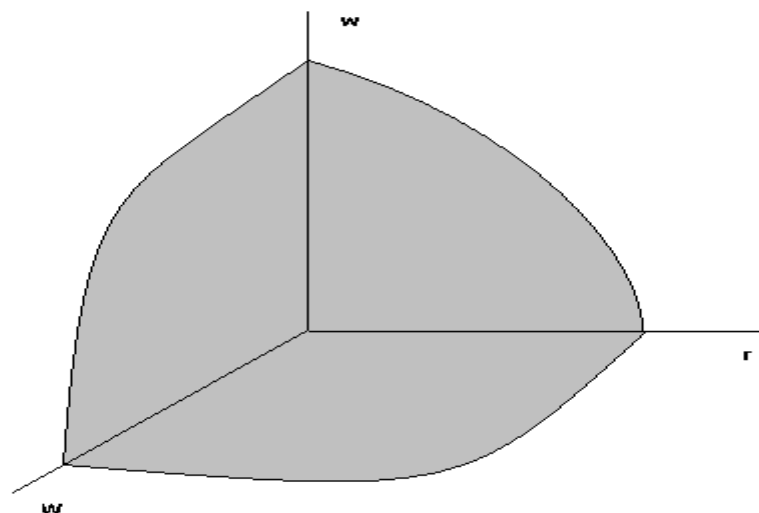
Για την αμοιβή του παραγωγικού συντελεστή γη ισχύει:

$$W = \frac{\{p[I - A(1+r)] - w\ell\}q}{Tq} \quad (92)$$

Ενώ για το ονομαστικό ωρομίσθιο ισχύει αντίστοιχα:

$$W = \frac{\{p[I - A(1+r)] - WT\}q}{\ell q} \quad (93)$$

Αν προσπαθήσουμε να βάλουμε σε ένα διάγραμμα τις μεταβλητές της κατανομής του



εισοδήματος θα είναι της μορφής³⁹⁵:

Πρόκειται για μια εκ διαμέτρου αντίθετη κατάσταση από την κλασική w-r σχέση που ίσχυε στην περίπτωση της μιας μη αναπαραγόμενης εισροής. Πλέον δεν υπάρχει μια σχέση μεταξύ ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους, αλλά μια σχέση ποσοστού κέρδους ονομαστικού ωρομισθίου και ενοικίου.

8.4 Κατάταξη τεχνικών με δύο μη αναπαραγόμενες εισροές

Στην συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση όπου υπάρχουν δύο διαθέσιμες τεχνικές, οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη δύο μη αναπαραγόμενων εισροών, της εργασίας και της γης. Κατά συνέπεια υποθέτουμε την ύπαρξη των τεχνικών $[A^{(i)}, \ell^{(i)}, T^{(i)}], (i) = a, b$, οι οποίες υπακούουν στις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.

Στην περίπτωση των τεχνικών παραγωγής με την ύπαρξη μιας αναπαραγόμενης εισροής είχαμε το w-r κριτήριο, για το οποίο για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους μπορεί διαζευκτικά να ισχύει:

Σύμφωνα λοιπόν με το w-r κριτήριο για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω r^* , $0 \leq r < \min[R_m^{(a)}, R_m^{(b)}]$ δύναται να ισχύουν διαζευκτικά:

- (1) $w^{(a)} < w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα
- (2) $w^{(a)} = w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες
- (3) $w^{(a)} > w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

Ωστόσο στην περίπτωση της ύπαρξης δύο μη αναπαραγόμενων εισροών τα πράγματα είναι διαφορετικά. Δεν μπορούμε πλέον να αναφερόμαστε σε ένα w-r κριτήριο αλλά σε ένα w-r-W κριτήριο. Πιο συγκεκριμένα για να αποφανθούμε ποια τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να θεωρηθεί όχι μια μόνο μεταβλητή κατανομής του εισοδήματος σταθερή, αλλά δύο. Ποιο συγκεκριμένα αυτό που

³⁹⁵ Πρόκειται για το αριθμητικό παράδειγμα στο J.S.Metcalf and Ian Steedman (1972) σελ.156, στο οποίο έχουμε αυθαίρετα επιλέξει σαν τιμή του εμπορεύματος 2 την μονάδα.

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι μόνο σχετικές τιμές των ήδη τυποποιημένων τιμών εμπορευμάτων και συντελεστών παραγωγής. Με άλλα λόγια από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} p^{(.)} &= p^{(.)} A^{(.)} (1+r^{(.)}) + w^{(.)} \ell^{(.)} + W^{(.)} T^{(.)} \Leftrightarrow \\ \frac{p^{(.)}}{W^{(.)}}} &= \frac{p^{(.)}}{W^{(.)}}} A^{(.)} (1+r^{(.)}) + \frac{w^{(.)}}{W^{(.)}}} \ell^{(.)} + T^{(.)} \Leftrightarrow \\ p^{(.)} &= p^{(.)} A^{(.)} (1+r^{(.)}) + w^{(.)} \ell^{(.)} + T^{(.)} \Leftrightarrow p^{(.)} = \frac{p^{(.)}}{W^{(.)}} , w^{(.)} = \frac{w^{(.)}}{W^{(.)}}} \end{aligned}$$

Αφού πολλαπλασιάσουμε με το τυπικό εμπόρευμα q προκύπτει:

$$w^{(.)} = \frac{p^{(.)} q - T^{(.)} [I - A^{(.)} (1+r^{(.)})]^{-1} q}{\ell^{(.)} [I - A^{(.)} (1+r^{(.)})]^{-1} q}, (.) = a, b$$

Και αν υποθέσουμε πάλι ότι $p^{(.)} q = 1$ προκύπτει:

$$w^{(.)} = \frac{1 - T^{(.)} [I - A^{(.)} (1+r^{(.)})]^{-1} q}{\ell^{(.)} [I - A^{(.)} (1+r^{(.)})]^{-1} q}, (.) = a, b \quad (4)$$

Κατά συνέπεια για μια δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους, έστω r^* , $0 \leq r < \min[R_m^{(a)}, R_m^{(b)}]$ δύναται να ισχύουν διαζευκτικά:

- (1) $w^{(a)} < w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα
- (2) $w^{(a)} = w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή οι δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες
- (3) $w^{(a)} > w^{(b)}$, στην περίπτωση αυτή η τεχνική a είναι περισσότερο κερδοφόρα

Από την (4) προκύπτει για τις (1)-(3)

$$\frac{1 - T^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^{(*)})]^{-1} q}{\ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^{(*)})]^{-1} q} < \frac{1 - T^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^{(*)})]^{-1} q}{\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^{(*)})]^{-1} q} \quad (4), \text{ στην περίπτωση αυτή η}$$

τεχνική b είναι περισσότερο κερδοφόρα

$$\frac{1 - T^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^{(*)})]^{-1} q}{\ell^{(a)} [I - A^{(a)} (1+r^{(*)})]^{-1} q} = \frac{1 - T^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^{(*)})]^{-1} q}{\ell^{(b)} [I - A^{(b)} (1+r^{(*)})]^{-1} q} \quad (5), \text{ στην περίπτωση αυτή οι}$$

δύο τεχνικές είναι εξίσου κερδοφόρες

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} > \frac{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} \quad (6), \text{ στην περίπτωση αυτή η}$$

τεχνική α είναι περισσότερο κερδοφόρα

Τροποποιώντας ελαφρώς τις σχέσεις (4)-(6) προκύπτουν αντίστοιχα και διαζευκτικά:

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} < \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} \quad (7)$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} = \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} \quad (8)$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} > \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} \quad (9)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι δεν αλλάζει κάτι επί της ουσίας, αφού στην γενική περίπτωση, όπου υπάρχουν δύο πρωταρχικές (μη αναπαραγόμενες εισροές), υπάρχουν και σε αυτήν την περίπτωση η σχέσεις και $n+3$ άγνωστοι. Η λύση (και κατα συνέπεια η εξάλειψη των βαθμών ελευθερίας) των παραπάνω σχέσεων γίνεται, με την τυποποίηση των τιμών παραγωγής και ταυτόχρονα :

1. Τον εξωγενή προσδιορισμό των 2 εκ των τριών μεταβλητών της κατανομής του εισοδήματος, είτε
2. Τον υπολογισμό «σχετικών» μεταβλητών διανομής του εισοδήματος³⁹⁶

Παρόλη το φαινομενικά εκ νέου περιπλοκο του θέματος, τα συμπεράσματα γύρω από την κατάταξη των τεχνικών παραμένουν τα ίδια, καθώς:

1. Η τυποποίηση των τιμών μεταβάλλει την κατάταξη των τεχνικών παραγωγής. Κατα συνέπεια και στην περίπτωση αυτή γίνεται λόγος για κατάταξη τυπικών υποσυστημάτων και ουχί τεχνικών παραγωγής.
2. Τόσο η θέση, όσο και το σχήμα της $w-r-W$ πλέον καμπύλης μεταβάλλεται με την τυποποίηση.

³⁹⁶ Στην περίπτωση αυτή γίνεται λόγος για ποσοστό κέρδους (ονομαστικό ωρομισθίο, γαιοπρόσοδο) σε όρους ονομαστικών μισθών (ποσοστού κέρδους, γαιοπρόσόδου) ή σε όρους γαιοπρόσόδου (γαιοπρόσόδου, ποσοστού κέρδους) αντίστοιχα.

3. Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση της ύπαρξης δύο πρωταρχικών εισροών είναι ότι καλούμαστε να εισάγουμε εξωγενώς, και φυσικά αυθαίρετα, δύο εκ των τριών πλέον μεταβλητών της κατανομής του εισοδήματος.
4. Η μοναδική περίπτωση μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών με δύο πρωταρχικές εισροές, είναι η περίπτωση των γειτονικών τεχνικών απλής παραγωγής. Καθώς όποιο και αν είναι το τυπικό εμπόρευμα, η φορά των σχέσεων (7)-(9) δεν αλλάζει με την τυποποίηση³⁹⁷.

Κατά συνέπεια η κύρια κατηγορία των νεοκλασικών οικονομολόγων ότι η ύπαρξη ενός επιπλέον μη αναπαραγόμενου συντελεστή παραγωγής, αποδυναμώνει την νεοοικονομική κριτική, δεν ευσταθεί καθώς σε όρους a la Leontief-Sraffa, καθιστά

³⁹⁷ Έστω ότι ισχύουν διαζευκτικά:

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} < \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} = \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q} > \frac{\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}{\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+r^{(*)})]^{-1}q}$$

Αν οι δύο σχέσεις διαφέρουν κατά την διαδικασία i τότε για τις παραπάνω σχέσεις ισχύει:

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j < \frac{1-\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j = \frac{1-\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j$$

$$\frac{1-T^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-T^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j > \frac{1-\ell^{(a)}[I-A^{(a)}(1+\bar{r})]^{-1}q}{1-\ell^{(b)}[I-A^{(b)}(1+\bar{r})]^{-1}q} e_j$$

Στην περίπτωση αυτή, όποιο και αν είναι το τυπικό εμπόρευμα και για δεδομένη κατανομή του εισοδήματος, η κατάταξη των τεχνικών δεν μεταβάλλεται με την τυποποίηση καθώς τα διανύσματα () και () που προκύπτουν είναι κατά τάξιν συγκρίσιμα.

την μονοσήμαντη κατάταξη ακόμα πιο δύσκολη να επιτευχθεί, και εντελώς συμπτωματική.

ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ:

ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή, αρχικά έγινε ο ορισμός της τεχνικής παραγωγής και κατ' επέξταση του γραμμικού συστήματος παραγωγής. Βασιζόμενοι σε αυτά έγινε και ο υπολογισμός των τιμών παραγωγής.

Οι τιμές παραγωγής, σε μια οικονομία *a la* Sraffa- Leontief , οι τιμές παραγωγής δεν εξαρτώνται από τεχνολογικούς παράγοντες, αλλά εξαρτώνται και από την κατανομή του εισοδήματος³⁹⁸. Το τελευταίο όπως είδαμε έρχεται και σε αντίθεση με τα όσα η νεοκλασική θεωρία προτείνει με την χρήση των διάφορων Non-Substitution Theorems. Ωστόσο είδαμε, ότι για να προσδιοριστούν απόλυτα οι τιμές (και όχι να εξαχθούν σχετικές τιμές) , πρέπει να τυποποιηθούν οι τιμές. Η τυποποίηση των τιμών γίνεται με την χρήση διάφορων εξισώσεων τυποποίησης³⁹⁹. Είδαμε ότι με την εισαγωγή μιας εξίσωσης τυποποίησης ενδέχεται να μεταβληθούν διάφορα μεγέθη του ενός συστήματος παραγωγής, ιδιαίτερα στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής.

Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής, είναι δυνατόν με την τυποποίηση είναι δυνατόν να αλλάξει:

1. Οι διαστάσεις του συστήματος παραγωγής, με άλλα λόγια ο αριθμός των παραγόμενων εμπορευμάτων και κατα συνέπεια ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων διαδικασιών παραγωγής. Αυτός είναι ο λόγος που μετά την τυποποίηση των τιμών, προκύπτει ένα τυπικό υποσύστημα, το οποίο χρησιμοποιεί μια τεχνική $[N, L]$, διαφορετική από την τεχνική $[A, \ell]$ την οποία χρησιμοποιεί το δεδομένο σύστημα παραγωγής
2. Με την τυποποίηση μπορούν να μεταβληθούν τόσο οι απόλυτες, όσο και οι σχετικές τιμές των παραγόμενων εμπορευμάτων.

³⁹⁸ Η σχέση ποσοστού κέρδους- ονομαστικού ωρομισθίου $w-r$, είναι και αυτή που σε τελευταία ανάλυση αντικατοπτρίζει και την κατανομή του εισοδήματος

³⁹⁹ Είδαμε ότι η τυποποίηση των τιμών παραγωγής γίνεται με την χρήση διάφορων τυπικών εμπορευμάτων. Ιδιαίτερη μνεία έγινε δε σε αυτά των Sraffa, Miayao, Βασιλάκη και σε αυτό των Π.Βουγιουκλάκη Θ. Μαριόλη.

3. Με την τυποποίηση στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής μεταβάλλεται το μέγιστο ποσοστό κέρδους⁴⁰⁰ αλλά και το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο.
4. Με την τυποποίηση στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής μεταβάλλεται η ένταση κεφαλαίου του συστήματος .
5. Βασιζόμενοι στην παρατηρήσεις 4. και 5. συνεπάγεται ότι είναι δυνατόν να αλλάξει το σχήμα, η θέση ή η κλίση της $w-r$ ευθείας⁴⁰¹.

Στην συνέχεια μετά από μια εκτεταμένη αναφορά στην σχέση ονομαστικού ωρομισθίου, ποσοστού κέρδους ($w-r$). Στην συνέχεια γίνεται η γραφική αναπαράστασή της και εξάγονται συμπεράσματα γύρω από το σχήμα, την θέση και το σχήμα της και αν και κατα πόσον εξαρτώνται αυτά από την τυποποίηση των τιμών παραγωγής. Κατα συνέπεια μια $w-r$ καμπύλη είναι φθίνουσα συνάρτηση του ποσοστού κέρδους στην περίπτωση της απλής παραγωγής⁴⁰², μπορεί να είναι γραμμική, κοίλη ή κυρτή. Είδαμε επίσης ότι η ένταση κεφαλαίου αποτελεί και την κλίση της $w-r$ καμπύλης. Μάλιστα στην περίπτωση των γραμμικών $w-r$ καμπυλών η ένταση κεφαλαίου είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται με την μεταβολή του ποσοστού κέρδους⁴⁰³.

Αναφερόμενοι στην τυποποίηση των τιμών είδαμε τα τέσσερα τυπικά εμπορεύματα τα οποία γνωρίζουμε από την βιβλιογραφία. Το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa το οποίο δεν είναι άλλο από το δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας των τεχνικών συντελεστών. Είδαμε ότι το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa απαντάται σε μη διασπώμενες τεχνικές παραγωγής. Επιπλέον στην περίπτωση των μη διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής είναι δυνατή η εμφάνιση του τυπικού εμπορεύματος του Miyao, το οποίο αποτελείται αφενός από το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa (ήτοι το δεξί ιδιοδιάνυσμα της μήτρας των τεχνικών συντελεστών) και αφετέρου από ένα

⁴⁰⁰ Καθώς στην περίπτωση των μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής, το μέγιστο ποσοστό κέρδους που προκύπτει, είναι συνάρτηση της μέγιστης ιδιοτιμής της μήτρας των τεχνικών συντελεστών.

⁴⁰¹ Όπως είδαμε το τελευταίο έχει ιδιαίτερη σημασία για την ισχύ ή μη του $w-r$ κριτηρίου

⁴⁰² Αλλά και των well-behaved τεχνικών απλής παραγωγής.

⁴⁰³ Όπως είδαμε η ένταση κεφαλαίου είναι ένα κατεξοχήν τιμιακό μέγεθος. Οι τιμές παραγωγής όπως έχει πολλάκις αναφερθεί εξαρτώνται από την κατανομή του εισοδήματος- και κατ' επέκταση από το ποσοστό κέρδους-. Κατα συνέπεια η ένταση κεφαλαίου ως συνάρτηση των τιμών παραγωγής εξαρτάται και από το ύψος του ποσοστού κέρδους.

κάθετο στο διάνυσμα των τιμών ημιθετικό διάνυσμα στήλης. Αντίστοιχα στην περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων παραγωγής συναντάται το αντίστοιχο του τυπικού εμπορεύματος του Sraffa, αυτό του Βασιλάκη και το αντίστοιχο του Miaygo για την περίπτωση των διασπώμενων συστημάτων απλής παραγωγής των Μαριόλη-Βουγιουκλάκη. Η ιδιότητα των τυπικών εμπορευμάτων αυτών είναι ότι η τιμή των είναι ανεξάρτητη από την διανομή του εισοδήματος, και ως εκ τούτου συνεπάγονται γραμμικές $w-r$ καμπύλες

Στην συνέχεια αναφέρονται οι ιδιότητες των σημείων (εν)αλλαγής των τεχνικών παραγωγής⁴⁰⁴ ((re)witch points). Στα σημεία λοιπόν, όπου δύο ή περισσότερες τεχνικές τέμνονται:

1. Οι τεχνικές αυτές έχουν για δεδομένο ονομαστικό ωρομίσθιο το ίδιο ποσοστό κέρδους
2. Οι εν λόγω τεχνικές έχουν τις ίδιες τιμές παραγωγής.

Μαλιστα στην τελευταία παρατήρηση οι C.Bidard και E.Klimovsky, έχουν αποφανθεί ότι στην περίπτωση των συστημάτων σύνθετης παραγωγής, είναι δυνατόν σε σημεία που εφάπτονται μερικές μόνο, αλλά όχι όλες οι υπο σύγκριση τεχνικές παραγωγής, να μην έχουν το ίδιο διάνυσμα τιμών. Τα σημεία αυτά τα ονομάζουν ψευδή σημεία εναλλαγής (fake switch points) και στα οποία όπως πιστεύουν δεν υπάρχει κάποια πραγματική (εν)αλλαγή τεχνικών⁴⁰⁵ (σε αντίθεση βέβαια με τα real switch points).

Βασιζόμενοι στα παραπάνω προαπαιτούμενα γίνεται η αναφορά στο θέμα καθεαυτών της παρούσας διατριβής. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό του Γ. Σταμάτη, η επιλογή της τεχνικής έγκειται στην επιλογή εκείνης της τεχνικής, ως πλέον κερδοφόρας, η

⁴⁰⁴ Τα σημεία δηλαδή όπου οι $w-r$ καμπύλες δυο τεχνικών τέμνονται, ή κατα τους Kurz-Salvadori, σημεία όπου δύο ή περισσότερες τεχνικές ελαχιστοποιούν το κόστος.

⁴⁰⁵ Όπως έδειξε παλαιότερα ο Γ. Σταμάτης (XXXX) τα σημεία αυτά δεν αποτελούν ψευδή σημεία αλλαγής, αλλά αντίθετα πραγματικά. Επίσης στο Κ. Μανουδάκης (2009), σε όρους του $w-r$ κριτηρίου, γίνεται αντιληπτό ότι κανένας λόγος δεν υπάρχει για να μην γίνει η μετάβαση από το ένα τυπικό υποσύστημα στο άλλο. Το βασικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι τόσο τα ψευδή όσο και τα πραγματικά σημεία, εξαρτώνται από την τυποποίηση των τιμών, και δύναται να εμφανιστούν, να εξαφανιστούν ή να μετατοπιστούν με την αλλαγή του τυπικού εμπορεύματος. Από την αυτήν την άποψη κάθε σημείο fake ή μη δύναται να είναι στην πραγματικότητα, και σύμφωνα με την οπτική των Bidard και Klimovsky, fake.

οποία για δεδομένο ποσοστό κέρδους (ονομαστικό ωρομίσθιο) επιφέρει το μεγαλύτερο δυνατό ονομαστικό ωρομίσθιο (ποσοστό κέρδους).

Το πρόβλημα της επιλογής της πλέον κερδοφόρας τεχνικής, υπήρξε και το αντίκειμενο διαμάχης, μεταξύ των δύο σημαντικότερων «σχολών» οικονομικής σκέψης τις δεκαετίες του '50, '60, '70, της νεοκλασικής και της νεοοικονομικής. Πεδίο της διαμάχης ήταν η αθροιστική συνάρτηση παραγωγής, που πρότεινε η νεοκλασική θεωρία. Βάση της συνάρτησης αυτής παράγεται μια ομοιογενής εκροή με την χρησή του ομοιογενούς συντελεστή κεφάλαιο, και της ζωντανής εργασίας. Στην περίπτωση αυτή υπήρχε μια μονοσήμαντη, γραμμική σχέση μεταξύ ποσοστού κέρδους και ονομαστικού ωρομισθίου, και κατα συνέπεια μια μονοσήμαντη κατάταξη μεταξύ των τεχνικών. Δυνατότητα μονοσήμαντης κατάταξης των τεχνικών, είναι δεδομένη σύμφωνα με την νεοκλασική θεωρία.. Από την άλλη πλευρά και η νεοοικονομική θεωρία δέχεται την δυνατότητα κατάταξης των τεχνικών, ωστόσο θεωρούν ότι είναι δυνατόν να εμφανιστούν κάποια παράδοξα φαινόμενα, στα πλαίσια των διασπόμενων συστημάτων παραγωγής, όπως αυτά του reswitching η του reverse capital deeping. Ωστόσο όπως θα δούμε και οι δύο θεωρίες δείχνουν να θέτουν εκτός συζήτησης το ζήτημα του ρόλου της εξίσωσης τυποποίησης στο πρόβλημα της επιλογής των τεχνικών.

Η επιλογή των τεχνικών παραγωγής, γίνεται με την χρήση διάφορων κριτηρίων. Μεταξύ αυτών παρουσιάστηκαν το w-r κριτήριο, το cost minimization criterion, ο αλγόριθμος του Bidard, και το κριτήριο του von Neumann.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, σύμφωνα με το w-r κριτήριο, επιλέγεται εκείνη η τεχνική, η οποία, για δεδομένο ποσοστό κέρδους (ονομαστικό ωρομίσθιο) συνεπάγεται το μεγαλύτερο ονομαστικό ωρομίσθιο (ποσοστό κέρδους).

Το w-r κριτήριο ως γνωστόν αναφέρεται και σαν κριτήριο μεγιστοποίησης των κερδών (profit maximization criterion). Όπως είδαμε η εξέταση του κριτηρίου αυτού μπορεί να γίνει τόσο σε μαθηματικούς όσο και σε διαγραμματικούς όρους. Όπως είδαμε στην μαθηματική διερεύνηση είναι δυνατόν να ισχύουν διαζευκτικά:

$w^{(a)}(r, y) < w^{(b)}(r, y)$, στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική (β) έναντι της (α), αφού για δεδομένο ποσοστό κέρδους και δεδομένη τυποποίηση αποφέρει το μεγαλύτερο ονομαστικό ωρομίσθιο

$w^{(a)}(r, y) = w^{(b)}(r, y)$, στην περίπτωση αυτή είναι αδιάφορο ποια από τις δύο τεχνικές θα επιλεγεί

$w^{(a)}(r, y) > w^{(b)}(r, y)$, στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η τεχνική (α) έναντι της (β)

Όμως όπως γίνεται φανερό από τις παραπάνω σχέσεις, αλλά και σε περισσότερη ανάλυση σε προηγούμενα κεφάλαια., η επιλογή των τεχνικών εξαρτάται από την τυποποίηση των εμπορευμάτων στην γενική περίπτωση. Αφού τόσο οι τιμές παραγωγής, ως απόλυτα μεγέθη, όσο και το ποσοστό κέρδους εξαρτώνται από την τυποποίηση. Έγινε φανερό παραπάνω, ότι τα μεγέθη τα οποία εμπεριέχει το ονομαστικό ωρομίσθιο (το r και το ρ λόγος $\frac{pAu}{\ell u}$ εξαρτώνται από το ονομαστικό ωρομίσθιο). Κατά συνέπεια η φορά των παραπάνω ανισώσεων μπορεί να μεταβληθεί με μεταβαλλόμενο τυπικό εμπόρευμα. Ωστόσο όπως έχει δείξει ο Γ.Σταμάτης, στην περίπτωση των μη διασπώμενων γειτονικών τεχνικών παραγωγής (δηλαδή τεχνικών που διαφέρουν κατα τη διαδικασία παραγωγής, ενός μόνο εμπορεύματος) η ισχύς των παραπάνω σχέσεων είναι δεδομένη, και κατά συνέπεια η μονοσήμαντη κατάταξη των τεχνικών παραγωγής. Ωστόσο το τελευταίο δεν αναιρεί την πιθανότητα εμφάνισης του φαινομένου της εναλλαγής των τεχνικών (reswitching). Η εκτεταμένη αναφορά στον ρόλο της τυποποίησης των τιμών, έγινε για να καταστεί σαφές, ότι με το $w-r$ κριτήριο δεν κατατάσσονται τεχνικές παραγωγής αλλά τυπικά υποσυστήματα. Αφού η $w-r$ σχέση μπορεί να μεταβληθεί με την τυποποίηση των τιμών και κατ' επέκταση η τιμή του ονομαστικού ωρομισθίου για δεδομένη τιμή του ποσοστού κέρδους. Όταν οι τεχνικές παραγωγής είναι μη διασπώμενες δεν υπάρχει κανένας λόγος η κατάταξη να είναι μονοσήμαντη⁴⁰⁶ στην γενική περίπτωση. Αλλά είναι μόνον τότε μονοσήμαντα κατατάξιμες αν οι τεχνικές αυτές είναι γειτονικές. Καθώς στην περίπτωση αυτή τα διανυσμάτα τιμών των εν λόγω τεχνικών (τυπικών συστημάτων ορθότερα) είναι κατά ταξην συγκρίσιμα.

Από την άλλη πλευρά οι διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής δεν μπορούν να καταταχθούν μονοσήματα στην γενική περίπτωση, αδιάφορο δεν αν αυτές είναι

⁴⁰⁶ Όπως έδειξε ο Θ. Μαριόλης η κατάταξη ακόμη και μη διασπώμενων τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση, ενώ ο Γ. Σταμάτης (1990β) από την άλλη πλευρά, έδειξε ότι η κατάταξη μη γειτονικών τεχνικών μεταβάλλεται με την τυποποίηση χωρίς όμως να αλλάζει η πλέον κερδοφόρα τεχνική από αυτές.

γειτονικές ή όχι. Στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών έχει αποδειχθεί, ότι με την τυποποίηση μεταβάλλεται το μέγιστο ποσοστό κέρδους του τυπικού υποσυστήματος αλλά και το μέγιστο ονομαστικό ωρομίσθιο. Όπως είναι φυσικό η ένταση κεφαλαίου, ως τιμιακό μέγεθος, μεταβάλλεται και αυτή με την τυποποίηση. Στην περίπτωση αυτή, με την τυποποίηση δύναται να μεταβληθεί η $w-r$ στο σύνολό της. Κατα συνέπεια δύο μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής, μπορεί μόνο από σύμπτωση να είναι μονοσήμαντα κατατάξιμες.

Απο την άλλη πλευρά, εξετάζοντας διαγραμματικά το $w-r$ κριτήριο, μπορούμε να πούμε ότι επιλέγονται σημεία στην εξωτερική περιβάλλουσα των $w-r$ καμπυλών (γνωστή και σαν *outer envelope*), και ποτέ μέσα σε αυτήν, καθώς κάτι τέτοιο θα μη ορθολογικό. Διαγραμματικά τα σημεία (εν)αλλαγής εντοπίζονται στα σημεία που τέμνονται οι $w-r$ ευθείες των τυπικών υποσυστημάτων. Τα σημεία αυτά δύναται να μετατοπιστούν να εξαφανιστούν ή να εμφανιστούν εκ νέου με την μεταβολή της τυποποίησης, λόγω του ότι η κλίση μιας $w-r$ ευθείας, μεταβάλλεται με την τυποποίηση. Παρουσιάζοντας διαγραμματικά, τα όσα αναπτύξαμε παραπάνω, μπορούμε να πούμε, ότι στην περίπτωση της μη διασπώμενης απλής παραγωγής, αυτό που μπορεί να μεταβληθεί είναι η ένταση κεφαλαίου του συστήματος, και κατά συνέπεια η κλίση της $w-r$ ευθείας, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται η θέση των *switch points*, χωρίς ωστόσο να μεταβάλλεται η πλέον κερδοφόρα τεχνική. Η μονοσήμαντη κατάταξη (με διαγραμματικούς όρους ή μη μεταβολή των *switch points*) είναι δυνατή μόνο τότε, όταν οι μη διασπώμενες, υπο σύγκριση τεχνικές, είναι γειτονικές. Στην περίπτωση αυτή, η κατάταξη των τεχνικών εξαρτάται από τεχνολογικούς παράγοντες, και όχι από το τυπικό εμπόρευμα⁴⁰⁷.

Αντίθετα στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών, η κλίση, η θέση και το σχήμα των $w-r$ καμπυλών μπορεί να μεταβληθεί με την τυποποίηση. Σαν αποτέλεσμα τόσο τα (re)*switch points*, όσο και η πλέον κερδοφόρα τεχνική, μπορούν να μεταβληθούν με την αλλαγή του τυπικού εμπορεύματος. Το τελευταίο δύναται να ισχύει ακόμα και στην περίπτωση γειτονικών διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής. Κατά συνέπεια στην περίπτωση αυτή, η κατάταξη των τεχνικών εξαρτάται τόσο από τεχνολογικούς παράγοντες όσο και από το τυπικό εμπόρευμα. Ωστόσο το $w-r$ κριτήριο ενέχει ένα πολύ σημαντικό ζήτημα, το ποιός εν τέλει είναι

⁴⁰⁷ Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή επαληθεύεται και το θεώρημα της μη υποκατάστασης.

αυτός που πέρνει τις παραγωγικές αποφάσεις. Κατα συνέπεια το w-r κριτήριο ενέχει την έννοια του συλλογικού καπιταλιστή, ο οποίος «αποφασίζει» για την διανομή του εισοδήματος, την τυποποίηση των τιμών και εν τέλει για την επιλογή της ίδιας της τεχνικής (τυπικού υποσυστήματος). Βέβαια η ύπαρξη του εν λόγω συλλογικού καπιταλιστή δεν φαίνεται να είναι αρκετά ρεαλιστική σε μια καπιταλιστικά δομημένη κοινωνία. Από την άλλη πλευρά το w-r κριτήριο δείχνει να έχει εφαρμογή σε κεντρικά σχεδιαζόμενες οικονομίες καθώς και σε σοσιαλιστικές οικονομίες. Επιπλέον το w-r κριτήριο, θεωρητικά από ότι έχουμε δει ως τώρα, μπορεί να εφαρμοστεί και σε γειτονικές τεχνικές παραγωγής, σε αντίθεση με το cost minimization criterion, το οποίο και παρουσιάζουμε παρακάτω.

Το cost-minimization criterion αποτελεί ένα εναλλακτικό κριτήριο επιλογής τεχνικών. Το κριτήριο αυτό μπορούμε να πούμε ότι είναι πιο κοντά στην καπιταλιστική πραγματικότητα, καθώς οι παραγωγικές αποφάσεις λαμβάνονται από τον ενίοτε ατομικό καπιταλιστή, και αφορούν μια δεδομένη διαδικασία παραγωγής, όπου οι τιμές των μέσων παραγωγής που χρησιμοποιεί η κάθε διαδικασία, έχουν οριστεί εξωγενώς. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το cost minimization criterion, επιλέγεται η διαδικασία εκείνη η οποία, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, δεν αποφέρει υπερκέρδη στις τιμές⁴⁰⁸ καμίας άλλης τεχνικής. Σύμφωνα με το cost minimization criterion, η χρήση του έχει νόημα, μόνο τότε όταν οι τεχνικές που συγκρίνονται είναι γειτονικές. Η λειτουργία του όπως είδαμε και σε προηγούμενα κεφάλαια είναι η εξής: για δεδομένο ποσοστό κέρδος ορίζονται οι τιμές παραγωγής, για μία εκ των υπο σύγκριση τεχνικών. Για τις τιμές της τεχνικής αυτής, εξετάζεται ποιά από τις εναλλακτικές, διαθέσιμες διαδικασίες παραγωγής αποφέρει υπερκέρδη και ποια επιπλέον κόστη⁴⁰⁹. Κατά συνέπεια σύμφωνα με το cost minimization criterion, είναι δυνατόν να ισχύουν διαζευκτικά:

⁴⁰⁸ Ωστόσο οι εν λόγω τιμές, έχουν προηγούμενως τυποποιηθεί, ώστε αυτές να είναι πλήρως προσδιορισμένες. Ένας

⁴⁰⁹ Με άλλα λόγια και σε μαθηματικούς όρους η ύπαρξη υπερκερδών από την χρήση μιας τεχνικής (β) στις τιμές της (α), είναι ότι το δυνάμισμα των τιμών παραγωγής της τεχνικής (α) πρέπει να είναι μεγαλύτερο, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, από τις τιμές παραγωγής που συνεπάγεται η χρήση της τεχνικής (β) για το δεδομένο ποσοστό κέρδους, ή με μαθηματικούς όρους:

$$p^{(a)} q \geq p^{(a)} A_j^{(b)} (1 + \bar{r}) + w^{(a)} \ell_j^{(b)}$$

$$p^{(a)}q \leq p^{(b)}q$$

$$p^{(a)}q = p^{(b)}q$$

$$p^{(a)}q \geq p^{(b)}q$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και στην περίπτωση του cost minimization criterion, η ισχύη του εξαρτάται και απο την τυποποίηση των τιμών. Είναι δηλαδή απόλυτως δυνατή η μεταβολής της φοράς των σχέσεων (X)-(XX) με την μεταβολή της τυποποίησης.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του cost minimization criterion είναι η αδυναμία του να εφαρμοστεί σε μη γειτονικές τεχνικές. Εκ κατασκευής του το cost minimization criterion μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε γειτονικές τεχνικές παραγωγής.

Όμως ένα ερώτημα που τίθεται αν η cost minimizing τεχνική είναι και η πλέον κερδοφόρα. Με άλλα λόγια τίθεται της ισοδυναμίας του cost minimization criterion με το w-r κριτήριο. Είδαμε στην έως τώρα ανάλυση ότι το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του κόστους, είναι μόνο τότε ισοδύναμο με αυτό του w-r όταν, τα δύο κριτήρια της ελαχιστοποίησης του κόστους και το w-r να είναι ίσα⁴¹⁰, είναι δυνατή μόνο στην ειδική περίπτωση, όπου δύο γειτονικές τεχνικές, έχουν τυποποιηθεό με το ίδιο τυπικό εμπόρευμα, ή έστω με ένα εμπόρευμα ν, κατά την διαδικασία παραγωγής του οποίου διαφέρουν οι δύο τεχνικές, είτε με ένα σύνθετο εμπόρευμα που περιέχει το εμπόρευμα ν, ή με ένα εμπόρευμα το οποίο εισέρχεται άμεσα η έμμεσα στην παραγωγή του εμπορεύματος ν⁴¹¹. Επίσης η ισοδυναμία των δύο κριτηρίων είναι δεδομένη και στις γειτονικές μη διασπώμενες τεχνικές απλής παραγωγής.

Επιπλέον είναι φανερό η συγγένια του cost minimization criterion με το Non Substitution Theorem. Στην περίπτωση του Non Substitution Theorem, επιλέγεται εκείνη η τεχνική, η οποία ελαχιστοποιεί το κόστος, και δύναται να ανταπεξέλθει σε κάθε είδους ζήτηση με μια απλή μεταβολή των δραστηριότητας του συστήματος. Κατα συνέπεια το Non Substitution Theorem, μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί μια

⁴¹⁰ see Σταμάτης Γ, 1997

⁴¹¹ See Σταμάτης Γ, 1997

γενίκευση του cost minimization criterion, σε μια οικονομία στο σύνολό της και όχι σε μια επιμέρους διαδικασία.

Ωστόσο τόσο το w-r κριτήριο όσο και το cost minimization criterion, έχουν μια ακόμα κοινή αδυναμία, ότι το μεν w-r κριτήριο, έχει αμφιλεγόμενα αποτελέσματα σε συστήματα σύνθετης παραγωγής⁴¹² ενώ το cost minimization criterion δεν μπορεί να εφαρμοστεί (τουλάχιστον στην αρχική του εκδοχή) σε συστήματα σύνθετης παραγωγής.

Από την άλλη πλευρά ο C.Bidard, εισάγει ένα νέο «κριτήριο» επιλογής τεχνικών στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Ο αλγόριθμος του Bidard βασίζεται στο cost minimization criterion. Ο αλγόριθμος αυτός, κινείται σε ένα σφαιρικό πλαίσιο- αφού οι τιμές παραγωγής τυποποιούνται με αυτό και τα μέσα παραγωγής έχουν την ίδια σύνθεση με το υπερπροϊόν- στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Και στον αλγόριθμο του Bidard συγκρίνονται γειτονικές τεχνικές για δεδομένο ποσοστό κέρδους και στις τιμές κάποιας συγκεκριμένης τεχνικής. Η λειτουργία έχει του ως εξής, συγκρίνονται εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής, και επιλέγεται εκείνη η διαδικασία παραγωγής (και κατα συνέπεια τεχνική) στις τιμές της οποίας, καμία τεχνική, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, δεν αποφέρει υπερκέρδη⁴¹³. Στην συνέχεια ο Bidard ψάχνει ποιοι πότε η επιλογές είναι συνεκτικές (comprehensive), σύμφωνα με αυτό η δύο τεχνικές μπορούν να καταταγούν μονοσήμαντα αν ισχύει μια από τις δύο ισοδύναμες συνθήκες:

1. έχουν ένα r- καθαρό προϊόν κοινό
2. οι μήτρες των r-καθαρών εκροών είναι ομόσημες

Από τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι ο αλγόριθμος του Bidard, είναι τρόπον τινά μια επέκταση του Cost minimization criterion στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Η δυνατότητα μονοσήμαντης κατάταξης στην περίπτωση του Bidard, είναι δυνατή λόγω της κοινής σύνθεσης των μέσων παραγωγής και των πραγματικών μισθών (καθαρού προϊόντος). Όμως στην γενική περίπτωση ο αλγόριθμος του Bidard έχει στα παραδείγματα που παραθέτει ο Bidard, λόγω της τυποποίησης των τιμών με

⁴¹² Όπως ορθά εντοπίζουν οι Ch.Bidard και E.Klimovsky (2000). Η άποψη τους αυτή έρχεται σε αντίθεση με όσα υποστήριζε ο Sraffa στο τελευταίο κεφάλαιο του Βιβλίου του.

⁴¹³ Διαφορετικά ειπωμένο μια τεχνική δεν επιλέγεται αν η τεχνική αυτή δεν είναι κερδοφόρα στις τιμές της τεχνικής την οποία καλείται να αντικαταστήσει

το τυπικό εμπόρευμα του Sraffa⁴¹⁴, όπου είναι βέβαιο ότι εφόσον έχουν τυποποιηθεί με το ίδιο τυπικό εμπόρευμα, θα έχουν και την ίδια σύνθεση. Ωστόσο τα πράγματα μπορεί να είναι διαφορετικά, στην περίπτωση που τυποποιηθούν με κάποιο άλλο τυπικό εμπόρευμα, το οποίο δεν θα θέτει *a priori*, μια κοινή σύνθεση υπερπροϊόντων και μέσων παραγωγής. Ο Γ.Σταμάτης⁴¹⁵ έδειξε ότι ακόμα και σε όρους του αριθμητικού παραδείγματος του Bidard, είναι δυνατή για μεταβαλλόμενο πραγματικό ωρομίσθιο η μεταβολή της κατάταξης των τεχνικών να μην μπορεί να υπάρξει μια συνεκτική (comprehensive) επιλογή τεχνικών, -αφού σε όρους του παραδείγματος του Bidard είναι απολύτως δυνατή η ύπαρξη μη τετράγωνων τεχνικών⁴¹⁶. Ωστόσο ακόμα και στην περίπτωση του αλγορίθμου του Bidard, συγκρίνονται τυπικά υποσυστήματα, και όχι τεχνικές παραγωγής. Εμφανές είναι ότι στο παράδειγμα που χρησιμοποιεί και συγκρίνει κατ' ουσίαν οϊωνεί πρότυπα (σραφαϊανά) υποσυστήματα, σύμφωνα ποιο, για δεδομένο ποσοστό κέρδους, και στις τιμές οποιασδήποτε τεχνικής, είναι κερδοφόρο.

Στην συνέχεια παρουσιάστηκαν διάφορες περιπτώσεις μονοσήμαντης κατάταξης τεχνικών, όπως αυτή στην περίπτωση των χαραζοφιανών συστημάτων απλής παραγωγής, των *corn economies*, και του κριτηρίου του von Neumann.

Στις *Corn economies*, υπάρχει ένα εμπορεύμα το οποίο αποτελεί τόσο μέσο παραγωγής όσο και το καθαρό προϊόν μιας οικονομίας. Με άλλα λόγια τόσο οι εισροές όσο και οι εκροές εκ κατασκευής έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης. Κατά συνέπεια σε αυτήν την περίπτωση το ποσοστό κέρδους ορίζεται σαν τον λόγο δύο ομοιγενών μεγεθών, του υπερπροϊόντος και των φθαρέντων μέσων παραγωγής. Για τον λόγο αυτό, το ποσοστό κέρδους, και οι τιμές παραγωγής, είναι ανεξάρτητες από την τυποποίηση. Κατά συνέπεια και η επιλογή της πλέον κερδοφόρας τεχνικής, συνίσταται στην περίπτωση των *corn economies*, στην επιλογή εκείνης της τεχνικής παραγωγής το οποίο έχει το μεγαλύτερο πρότυπο λόγο υπερπροϊόντος-φθαρέντων μέσων παραγωγής.

⁴¹⁴ Αν και η εφαρμογή του συνήθως αφορά σε συστήματα απλής παραγωγής

⁴¹⁵ Βλ. Γ.Σταμάτης

⁴¹⁶ Ακόμα και με την έννοια που τους δίνει ο ίδιος ο Bidard, δηλαδή ότι δύνανται να ανταπεξέλθουν σε κάθε είδους ζήτηση

Στα χαραζοφιανά συστήματα, η εργασία είναι ένας αναπαραγόμενος συντελεστής παραγωγής, όπου τα μέσα παραγωγής έχουν ταυτόχρονα και το ρόλο των μισθιακών εμπορευμάτων⁴¹⁷. Έτσι στα πλαίσια ενός συστήματος *a la Charasoff*, το ποσοστό κέρδους ορίζεται σαν τον πρότυπο λόγο μεταξύ δύο ομοιογενών μεγεθών, του υπερπροϊόντος και των φθαρέντων μέσων παραγωγής/μισθιακών εμπορευμάτων. Όμως για να έχει νόημα ο ορισμός αυτός του ποσοστού κέρδους πρέπει υπερπροϊόν, μέσα παραγωγής (και κατ' επέκταση πραγματικό ωρομίσθιο) να έχουν κοινή σύνθεση. Δηλαδή να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) = \sum_{i=1}^n a_i$$

Στην περίπτωση αυτή και λόγω της κοινής σύνθεσης ανεξαρτήτως της τυποποίησης (όπου στην αρχική του εκδοχή οι τιμές παραγωγής τυποποιούνται με το διάνυσμα των επιπέδων δραστηριότητας), το ποσοστό κέρδους θα είναι ανεξάρτητο από την τυποποίηση, και ενδογενώς προσδιοριζόμενο.

Για τον λόγο αυτόν όταν καλούμαστε να συγκρίνουμε χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής, επιλέγουμε εκείνο το σύστημα το οποίο έχει το μεγαλύτερο λόγο υπερπροϊόντος, φθαρέντων μεσων παραγωγής/ή και μισθιακών εμπορευμάτων, ήτοι ποσοστό κέρδους.

Μια οικονομία *a la von Neumann*, δεν είναι τίποτε άλλο από ένα χαραζοφιανό πρότυπο σύστημα, εκφρασμένο στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής. Στα πλαίσια του συστήματος του *von Neumann*, είναι δυνατόν να υπάρχουν και μη τετράγωνες τεχνικές σύνθετης παραγωγής. Λόγω της κοινής του σύνθεσης εισροών εκροών, επιλέγεται εκείνη η τεχνική, η οποία συνεπάγεται εκείνο το ποσοστό κέρδος τό είναι ίσο με τον μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης του συστήματος και ταυτόχρονα μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο ποσοστό κέρδους. Η επιλογή της εκάστοτε τεχνικής είναι τέτοια ώστε η χρήση καμίας άλλης τεχνικής να μην αποφέρει υπερκέρδη⁴¹⁸. Η κατάταξη των τεχνικών, όπως και στα χαραζοφιανά συστήματα απλής παραγωγής, είναι μονοσήμαντη και κατα συνέπεια ανεξάρτητη από την

⁴¹⁷ Αυτός είναι και ο λόγος, για τον οποίον τον οποίο χρησιμοποιείται η προσαυξημένη κατά τα μισθιακά εμπορεύματα μήτρα των τεχνικών συντελεστών

⁴¹⁸ Το τελευταίο μπορούμε να πούμε ότι είναι ισοδύναμο, με το καμία άλλη τεχνική να μην είναι *r*-παραγωγική για το ποσοστό κέρδους της δεδομένης τεχνικής.

τυποποίηση των τιμών παραγωγής. Με άλλα λόγια και στην περίπτωση αυτή το ποσοστό κέρδους καθορίζεται ενδογενώς και ανεξάρτητα από την τυποποίηση ή την κατανομή του εισοδήματος⁴¹⁹. Η λύση που δίνει ο von Neumann, όπως δείχνει ο Γ.Σταμάτης, είναι τόσο γενική που μπορεί να ανταποκριθεί σε κάθε είδους γραμμική τεχνική, όπως των:

- διασπώμενων και μη διασπώμενων τεχνικών απλής παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και μη διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής
- μη διαχωρίσιμων και διασπώμενων τεχνικών σύνθετης παραγωγής

Ωστόσο και στα πλαίσια του κριτηρίου του von Neumann, μπορούν να υπάρχουν παραπάνω από μια εφικτές λύσεις, δηλαδή παραπάνω από μια τεχνικές, οι οποίες μεγιστοποιούν το ποσοστό κέρδους και κατά συνέπεια τον ίσο του ονομαστικό ρυθμό μεγέθυνσης.

Συγκεφαλαιώνοντας μόνο οι corn economies και τα χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής, μπορούν να δώσουν μια μονοσήμαντη κατάταξη των τεχνικών παραγωγής, η οποία είναι ανεξάρτητη από την τυποποίηση των τιμών. Είδαμε ότι τόσο στο $w-r$ κριτήριο, όσο και σε αυτό της ελαχιστοποίησης του κόστους απαραίτητη προϋπόθεση, ώστε η κατάταξη των τεχνικών (ορθότερα τυπικών υποσυστημάτων), είναι οι τεχνικές να είναι γειτονικές και μη διασπώμενες. Όπως είδαμε τόσο το $w-r$ κριτήριο όσο και αυτό της ελαχιστοποίησης του κόστους, στην περίπτωση των διασπώμενων τεχνικών παραγωγής, ακόμα και αν αυτές είναι γειτονικές, εξαρτώνται από την τυποποίηση και η κατάταξη μπορεί να μεταβληθεί με την μεταβολή της τυποποίησης. Ομοίως ο αλγόριθμος του Bidard, όντας μια γενίκευση του cost minimization criterion στην περίπτωση της σύνθετης παραγωγής, εξαρτάται και αυτός από την τυποποίηση των τιμών παραγωγής. Οι corn economies και τα χαραζοφιανά συστήματα παραγωγής (και κατά συνέπεια το σύστημα του von

⁴¹⁹ Το τελευταίο βέβαια δεν είναι απολύτως ορθό καθώς η ζωντανή εργασία, είναι ένας αναπαραγόμενος συντελεστής παραγωγής, και κατά συνέπεια η κατανομή του εισοδήματος σε ένα μοντέλο a la von Neumann, ή a la Charasoff

Neumann) μπορούμε να πούμε, ότι είναι οι μοναδικές περιπτώσεις⁴²⁰ συστημάτων τα οποία καταλήγουν σε μια μονοσήμαντη κατάταξη των τεχνικών παραγωγής.

⁴²⁰ Ανεξάρτητα δε αν είναι διασπώμενες ή μη, τεχνικές απλής ή σύνθετης παραγωγής

Βιβλιογραφία

- 1)Abraham-Frois, G / Berrebi E. (1979) Theory of value, prices and Accumulation Cambridge University Press.)
- 2)Ahmad, S. (1986), Sraffa numeraire and reswitching: a note Journal of Macroeconomics, τόμ. 8, σελ. 181-185.
- 3)Arrow, K. (1951), Alternative proof of the substitution theorem for Leontief Mondels in the General case στο Koopmans (1951) σελ. 155-164.
- 4)Atkinson B. /Joseph E. Stiglitz,(Sep., 1969), A New View of Technological Change ,The Economic Journal, Vol. 79, No. 315, pp. 573-578 , Blackwell Publishing for the Royal Economic Society
- 5)Bhaduri Amit,(Jul., 1970), A Physical Analogue of the Reswitching Problem , Oxford Economic Papers, New Series, Vol. 22, No. 2 pp. 148-155
- 6)Bharadwaj, K. (1970), On the maximum number of switches between two production systems. Schweizerische Zeitschrift Fur Volkswirtschaft und Statistik, τόμ. 106, σελ. 409-429.
- 7)Bidard Christian (1991), Prix, Reproduction, Rarete. Paris, dunod.
- 8)Bidard Christian/ Klimovsky Edith (2004), Switches and fake switches in methods of production, Cambridge Journal of Economics 28:89-97

- 9) Bidard Christian, (1999), Fixed capital and internal rate of return, *Journal of Mathematical Economics* 31, 523–541
- 10) Bidard Christian, Salvadori Neri, 1995, Duality between prices and Techniques, *European Journal of Political Economy*, vol 14, pp 379-389
- 11) Bidard Christian. (1986) Is von Neumann Square?, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, τόμ. 46 σελ. 401-419
- 12) Bidard Christian (1990) An algorithmic theory of the choice of techniques , *Econometrica* , τόμ.85, σελ. 839-859
- 13) Bidard Christian, (1996), Μια αλγοριθμική θεωρία επιλογής τεχνικών, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 19, σελ.121-130
- 14) Bidard Christian, (1984), “Choix Techniques en Production Jointe.” , στο *La production jointe: Nouveaux débats*. σελ. 186-207, Bidard. Paris: Economica
- 15) Bidard, Christian and Tom Schattelman 2001: The Spectrum of Random Matrices. *Economic Systems Research* 13.3, 289-298.
- 16) Bortkiewicz, L. v. (1952), Value and price in the Marxian system. *International Economic Papers*, σελ. 5-60
- 17) Bruno Michael/Burmeister Edwin/Sheshinski Eytan, (Aug., 1970), Switching of Techniques and Consumption Per Head: An Economic Clarification , *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 84, No. 3, pp. 533-535 , The MIT Press

18) Bruno, M / Burmeister, E / Sheshinski E. (1966) The nature and implication of the reswitching of techniques, Quarterly Journal of Economics, τόμ. 80, σελ. 526-553

19) Burmeister Edwin/Kuga Kiyoshi, (Jan., 1970), The Factor-Price Frontier, Duality and Joint Production, The Review of Economic Studies, Vol. 37, No. 1, pp. 11-19 , The Review of Economic Studies Ltd.

20) Burmeister Edwin, (Feb., 1968), On a Theorem of Sraffa , Economica, New Series, Vol. 35, No. 137, pp. 83-87 , Blackwell Publishing on behalf of The London School of Economics and Political Science and The Suntory and Toyota International Centres for Economics and Related Disciplines

21) Cassel Gustav, (1928), The Treatment of Price Problems, The Economic Journal, Vol. 38, No. 152, pp. 589-592

22) Champernowne, D. (1991) Σημείωμα στο άρθρο του J. v. Neumann. Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 8, σελ. 19-44.

23) Cohen Avi J./ Harcourt and/ G. C., Winter, 2003), Retrospectives: Whatever Happened to the Cambridge Capital Theory Controversies? , The Journal of Economic Perspectives, Vol. 17, No. 1, (pp. 199-214 , American Economic Association

24) Dmitriev, V. (1995), Η θεωρία της αξίας του Ricardo. Μια προσπάθεια για οικονομική ανάλυση. Στο Σταμάτης (1995α) τόμος 2ος , σελ. 161-223.

25)Dore, D/ Chakravarty, S/ Goodwin, R. (1989), John von Neumann and Modern Economics Oxford, Clarendon Press.

26)Dorfman, R/ Samuelson, P/ Solow, R. (1958), Linear Programming and Economic Analysis, New York, Toronto and London, McGraw-Hill, ανατυπωμένο το1987 από τις εκδόσεις Dover.

27)Dornbusch, R./ Fischer S. (1993), Μακροοικονομική. Εκδόσεις Κριτική.

28)Erreygers, G. (1994), The Impossibility of a comparison of Techniques: a comment Jahrbucher fur Nationalokonomie und Statistik. τόμ. 211, σελ. 427-446.

29)Erreygers, G. (1995), On the uniqueness of square cost-minimizing techniques, The Manchester School τόμ. LXIII, σελ.145-166.

30)Erreygers, G. (1995), On the uniqueness of square cost-minimizing techniques, The Manchester School τόμ. LXIII, σελ.145-166.

31)Felderer, B./ Hoburg, S. (1991), Μακροοικονομική και νέα Μακροοικονομική. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

32)Garegnani P(Jul., 1970), , Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution, The Review of Economic Studies, Vol. 37, No. 3 pp. 407-436 , The Review of Economic Studies Ltd.

33)Garegnani P, (Jun., 1984), Value and Distribution in the Classical Economists and Marx , Oxford Economic Papers, New Series, Vol. 36, No. 2 pp. 291-325 , Oxford University Press

34)Garegnani P.(Jun., 1976), ,The Neoclassical Production Function: Comment ,The American Economic Review, Vol. 66, No. 3 pp. 424-427 , American Economic Association

35)Garegnani, P. (1966), Switching of techniques,Quarterly Journal of Economics, vol 80, No 4, σελ. 554-567

36)Garegnani, P. (1996),Αξία και κατανομή του εισοδήματος στους κλασικούς οικονομολόγουςκαι στον Μαρξ., στο Σταμάτης (1996γ) σελ.243-286.

37)Harcourt G. (1969), Some Capmbridge Controversies in the Theory of Capital, Journal of Economic Literature, τόμ. 7, σελ. 369-405.

38)Harcourt G. (1970), Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital, Cambridge University Press.

39)Hicks John, (May, 1974), Capital Controversies: Ancient and Modern, The American Economic Review, Vol. 64, No. 2, Papers and Proceedings of the Eighty-sixth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 307-316, American Economic Association

- 40) Jones, H. (1993), Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.
- 41) Kurz H.D./Savadori Neri, (1994), Choice of technique in a model with fixed capital, *European Journal of Political Economy* Vol. 10, 545-569
- 42) Kurz H.D./Savadori Neri, The Non-Substitution Theorem: Making Good a Lacuna,
- 43) Kurz, H/ Gehrke C. (1994), On the choice of technique: a comment, *Jahrbucher für Nationalökonomie und Statistik*, τόμ. 213, σελ.100-106.
- 44) Kurz, H/ Salvadori N. (1995), *Theory of production*, Cambridge University Press.
- 45) Laibman David, (Feb., 1981), Two-Sector Growth with Endogeneous Technical Change: A Marxian Simulation Model, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 96, No. 1, pp. 47-75, The MIT Press
- 46) Laibman David/Nell Edward J., Reswitching, Dec., 1977), Wicksell Effects, and the Neoclassical Production Function, *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 5, (pp. 878-888, American Economic Association
- 47) Leontief W. (1951) *The structure of American Economy 1919-1939. An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, 2η έκδοση, New York

48)Levhari David,(Feb., 1965), A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques ,The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79, No. 1, pp. 98-105 , The MIT Press

49)Levhari, D/ Samuelson, P. (1966), The nonswitching theorem is false, The Quarterly Journal of economics, τόμ.80, σελ.518-525

50)Manoudakis Kosmas, (2008), Choice of Techniques and phenomena of switching and reswitching in linear models of production, proceedings 1st Ph.D Conference in economics, in memory of Vasilis Patsatzis, Gutenberg, Αθήνα

51)Manoudakis Kosmas, (2010), Fake switch points, forthcoming, Journal of European Economy,

52)Marx K. (1995), Εμπόρευμα και χρήμα. Το πρώτο κεφάλαιο από την πρώτη έκδοση (1867) του I τόμου του Το κεφάλαιο. Κριτική της Πολιτικής Οικονομίας με το παράρτημα Στο κεφάλαιο I. 1: Η αξιακή μορφή. Στο Σταμάτης (1995α) τόμος 2ος , σελ. 275-423.

53)Marx. K (1996), ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ. Τόμοι 1 και 2. Εκδόσεις Σύγχρονη Εποχή, Αθήνα.

54)Metcalf J.S. and Steedman Ian,(Mar., 1972), Reswitching and Primary Input Use , The Economic Journal, Vol. 82, No. 325, pp. 140-157, Blackwell Publishing for the Royal Economic Society

- 55) Metcalfe, J./ Steedman, I. (1972), Reswitching and primary input use. *Economic Journal*, τόμ. 82, σελ. 140-157.
- 56) Miyao T. (1977), A generalization of Sraffa's standard commodity and its complete characterization, *International Economic Review*, τόμ. 18, σελ. 151-162.
- 57) Morishima, M. (1976), Positive profits with negative surplus value-A comment, *The Economic Journal*, τόμ. 86, σελ. 599-603.
- 58) Morishima, M. (1966) Refutation of the nonswitching theorem, *The Quarterly Journal of Economics*, τόμ. 80, σελ. 520-525.
- 59) Morishima, M. (1977) , *Walras's Economics: A pure theory of capital and money*, Cambridge, Eng. ; New York : Cambridge University Press
- 60) Neumann, v J. (1991), Ένα μοντέλο γενικής οικονομικής ισορροπίας. Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 8, σελ. 5-18.
- 61) Okishio, N (1987), Choice of technique and the rate of profit στο *The New Palgrave: A dictionary of Economics*, σελ. 418-420.
- 62) Okishio, N. (1961), Technical Change and the Rate of Profit, *Kobe University Economic Review*, τόμ. 7, σελ. 86-96.
- 63) Pasinetti Luigi L., (Nov., 1966), Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques , *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 80, No. 4, pp. 503-517 , The MIT Press

64)Pasinetti Luigi L., Fisher Franklin M., Felipe Jesus, McCombie J. S. L., Greenfield Robert L., (Autumn, 2003), Cambridge Capital Controversies, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 17, No. 4, pp. 227-232, American Economic Association

65)Pasinetti Luigi L., (Sep., 1969), Switches of Technique and the Rate of Return in Capital Theory ,The Economic Journal, Vol. 79, No. 315, pp. 508-531 , Blackwell Publishing for the Royal Economic Society

66)Pasinetti Luigi L.(1966), Changes in the Rate of profit and switches of techniques, Quarterly Journal of Economics, τόμ.80, σελ. 503-517.

67)Pasinetti Luigi L (1991), Παραδόσεις θεωρίας της παραγωγής. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

68)Robinson Joan and Naqvi K. A.,(Nov., 1967), The Badly Behaved Production Function ,The Quarterly Journal of Economics, Vol. 81, No. 4 pp. 579-591 , The MIT Press

69)Robinson, J/ Eatwell, J. (1977), Εισαγωγή στη σύγχρονη οικονομική. Εκδόσεις Παπαζήση

70)Roncaglia, A (1978), Sraffa and the theory of prices John Wiley & Sons Ltd.

71)Salvadori, L. (1985), Switching in methods of production and joint production, Manchester school, τόμ. 53, σελ. 156-178.

72)Salvadori, N. (1982), Existence of Cost-Minimizing Systems within the Sraffa Framework ,Journal Of Economics, τόμ. 42, σελ. 281-298.

73)Samuelson Paul,(Jun., 1962) Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function, The Review of Economic Studies, Vol. 29, No. 3 , pp. 193-206 , The Review of Economic Studies Ltd.

74)Samuelson Paul(1966), A Summing Up , The Quarterly Journal of Economics, Vol. 80, No. 4 , pp. 568-583 , The MIT Press

75)Samuelson, P. (1951), Abstract of a theorem concerning Substitutability in Open Leontief Models στο Koopmans (1951), σελ.142-146.

76)Samuelson, P.(1962) Parable and realism in capital theory: The surrogate production function, Review of Economic Studies, τόμ.29, σελ. 139-206.

77)Schefold, Bertram ,(2009), Approximate Surrogate Production Functions,Cambridge Journal of Economics

78)Schefold, Bertram , (May, 1985), Cambridge Price Theory: Special Model or General Theory of Value? ,The American Economic Review, Vol. 75, No. 2, Papers and Proceedings of the Ninety- Seventh Annual Meeting of the American Economic Association pp. 140-145 , American Economic Association)

79)Schefold, Bertram .,2005, Reswitching as a cause of instability of intetemporal equilibrium, , Metroeconomica, 56:4

80)Schefold, Bertram (1978α), Multiple product techniques with properties of single product systems Journal of Economics, τόμ. 38, σελ. 29-53.

81)Schefold, Bertram (1976β), Relative prices as a function of the rate of profit: A mathematical Note, Zeitschrift für Nationalökonomie, τόμ. 36. σελ. 21-48

82)Schefold, Bertram (1978β) On counting equations, Journal Of Economics, τόμ.38, σελ. 253-285.

83)Schefold, Bertram (1988), The dominant technique in joint production systems Cambridge Journal of Economics, τόμ.12, σελ.97-123.

84)Schefold, Bertram (1989), Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays, Unwin Hyman, London.

85)Schefold, Bertram (1976α), Reduction to Dated Quantities of Labour, Roundabout processes, and Switches of techniques in fixed capital systems, Metroeconomica, τόμ. 28, σελ.1-15.

86) Schefold, Bertram 2008a: Families of strongly curved and of nearly linear wage curves: a contribution to the debate about the surrogate production function. Contribution to the Festschrift for Ian Steedman. Basingstoke: Routledge, forthcoming. Also published in: Bulletin of Political Economy 2.1, 2008, 1-24.

87)Simon, H./ Hawkins D. (1949), Some conditions of macroeconomic stability, Econometrica τόμ. 17, σελ. 245-248.

88)Simpson D.,(1975) , General Equilibrium Analysis, An introduction Basil Blackwell, Oxford

89)Srrafa, P. (1985), Παραγωγή εμπορευμάτων μέσω εμπορευμάτων. Πρελούδιο στην κριτική Της οικονομικής θεωρίας, Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη.

90)Stamatis G. , , March 1999 ,Georg Charasoff . A Pioneer in the Theory of Linear Production Systems , ECONOMIC SYSTEMS RESEARCH, Vol.11 pp.15-30.

91)Stamatis G. , , Mai 1993 , The Impossibility of a Comparison of Techniques and of the Ascertainment of a Reswitching Phenomenon , JAHRBUECHER FUER NATIONALOEKONOMIE UND STATISTIC , Band 211, 5-6 S.426-446

92)Stamatis G. , Autumn 2001 , Why the Comparison and Ordering of Techniques is Impossible , POLITICAL ECONOMY , No9 , pp.5-44

93)Stamatis G. , , 1998 , On the Position and the Slope of the w-r-Curve , POLITICAL ECONOMY , 2 pp.5-26 . (Μετάφραση από τα Ελληνικά) .

94)Stamatis G. , , 1998 , The Impossibility of a Comparison of Techniques and of the Ascertainment of a Reswitching Phenomenon . A Reply to Erreygers and Kurz/Cehrke , POLITICAL ECONOMY , 2 , pp.147-168.

95)Stamatis G. , , April-June 1997 – 98, John von Neumann's Model of General Equilibrium , THE INDIAN ECONOMIC JOURNAL , Vol.45 , 4 , pp.71-86 . (Μετάφραση από τα Ελληνικά)

96)Stamatis, G. (1983), Sraffa und sein Verhältnis zu Ricardo und Marx, Göttingen.[Ελληνική Μετάφραση περιέχεται στο Σταμάτης (1992α),]

97)Stamatis, G. (1988), Über das Normwaresubsystem und die w-r-Relation. Ein Beitrag Zur Theorie Linearer Produktionssysteme, Athens, Εκδόσεις Κριτική. (Σε ελληνική μετάφραση περιέχεται στο Σταμάτης (1995α), τόμος 1, σελ. 227-344)

98)Starrett David A.,(Nov., 1969), Switching and Reswitching in a General Production Model ,The Quarterly Journal of Economics, Vol. 83, No. 4 pp. 673-687 , The MIT Press

99) Steedman, Ian and Judith M. Tomkins 1998: On Measuring the Deviation of Prices from Values. Cambridge Journal of Economics 22, 379-385.

100)Stiglitz Joseph E., (Jul. - Aug., 1974), The Cambridge-Cambridge Controversy in the Theory of Capital; A View from New Haven: A Review Article ,The Journal of Political Economy, Vol. 82, No. 4, pp. 893-903 , The University of Chicago Press

101)Takahiro Miyao, (Feb., 1977), A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and Its Complete Characterization ,International Economic Review, Vol. 18, No. 1, pp. 151-162 , Blackwell Publishing for the Economics Department of the University of Pennsylvania and Institute of Social and Economic Research -- Osaka University

102)Tatsuo Hatta ,(Feb., 1976), The Paradox in Capital Theory and Complementarity of Inputs ,The Review of Economic Studies, Vol. 43, No. 1 pp. 127-142 , The Review of Economic Studies Ltd.

- 103) Turgot, A. R. J., *Réflexions sur la formation et la distribution des richesses* (1766). In *Oeuvres de Turgot*, ed. Eugène Daire (Paris: Guillaumin, 1844), vol. 1.
- 104) Vassilakis, S. (1983) “Nichtbasisprodukte, Standardproduct und allgemeine Profitrate”, *Hefte für Politische Ökonomie*, Nr. 5, Göttingen, σελ. 5-11. Μεταφρασμένο στο Σταμάτης (1992α) σελ. 606-614.
- 105) Walras, L. (1984), *Elements of pure economics, or the theory of social wealth*. Orion Editions, Philadelphia.
- 106) Walras, L. (1984), *Elements of pure economics, or the theory of social wealth*. Orion Editions, Philadelphia.
- 107) Warkett, G. (1991), Choice of techniques and the theorem of Okishio, *Metroeconomica* τόμ. 42, σελ. 125-136.
- 108) Yeager, Leland B., (1976), *International monetary relations : theory, history, and policy*, New York : Harper & Row
- 109) Yi, G. (1982), The choice of numeraire, capital intensity uniqueness, and the reswitching of Techniques, *Journal of Macroeconomics*, τόμ. 4, σελ. 89-100.
- 110) Zonghie Han and Bertram Schefold, 2006, An empirical investigation of paradoxes: reswitching and reverse capital deepening in capital theory, *Cambridge Journal of Economics*, 30, 737–765

111)Βουγιουκλάκης, Π / Μαριόλης Θ. (1990) Ορισμένα ζητήματα του προσδιορισμού των τιμών σε γραμμικά συστήματα παραγωγής, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 6, σελ. 69-91.

112)Βουγιουκλάκης, Π/ Μαριόλης Θ. (1992), Ο προσδιορισμός των τιμών και η σχέση ονομαστικού ωρομισθίου-ποσοστού κέρδους., Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 10, σελ.113-190.

113)Βουγιουκλάκης, Π/ Μαριόλης Θ. (1993), Ο προσδιορισμός των τιμών σε διασπώμενα συστήματα παραγωγής, στα οποία τα μέγιστα ποσοστά κέρδους του βασικού και του μη βασικού υποσυστήματος είναι ίσα, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 12, σελ.103-125.

114)Δημάκης. Φ./Σταμάτης Γ.,(1986), Το πρότυπο εμπόρευμα του Piero Sraffa και το αμετάβλητο μέτρο τιμών και αξιών του David Ricardo στο Γ. Σταμάτης (1986)

115)Θεοχάρης Ρ. (1984), Ιστορία της οικονομικής αναλύσεως, τόμος Β. Δεύτερη έκδοση βελτιωμένη. Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.

116)Κ. Γόγολος (2006), Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ, Διδακτορική Διατριβή, Πάντειο Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και πολιτικών επιστημών, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Αθήνα

117)Koopmans, T. (1951) Activity Analysis of production and Allocation. New York, John Wiley and Sons.

118)Μανουδάκης Κοσμάς, (2004), Το μοντέλο γενικής ισορροπίας του John von Neumann, Διπλωματική εργασία, Π.Μ.Σ. Οικονομικά της παραγωγής και των διακλαδικών σχέσεων, Πάντειο Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και Πολιτικών επιστημών, Αθήνα

119)Μαριόλης, Θ. (1992), Μια πρόταση σχετικά με το πρόσημο των απόλυτων τιμών σε μη διασπώμενα γραμμικά συστήματα παραγωγής, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 11, σελ. 73-82.

120)Μαριόλης, Θ. (1993), Αντιδράσεις τιμών σε γραμμικά συστήματα σύνθετης παραγωγής, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 12, σελ. 75-102.

121)Μαριόλης, Θ. (1996β), Η συμβολή του V.K. Dmitriev στη θεωρία των τιμών, της κατανομής και του κεφαλαίου., Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 19, σελ. 175-218.

122)Μαριόλης, Θ. (1994), Σχετικά με τη σύγκριση τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους., Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 14, σελ. 5-27.

123)Ντομπ, Μ. (1977), Θεωρίες της αξίας και της διανομής. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

124)Π. Βουγιουκλάκης (1995), Κριτική της νεοκλασικής Θεωρίας του Κεφαλαίου, όψεις και όρια μιας διαμάχης, Διδακτορική Διατριβή, Πάντειο Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και πολιτικών επιστημών, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Αθήνα

125)Ρικάρντο Ν/ Μάρξ, Κ. (1989), Αξία και υπεραξία. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

126)Σταμάτης Γ., (1994), Κείμενα οικονομικής θεωρίας και πολιτικής, τόμος 3ος, Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

127)Σταμάτης Γ.,(1986), (επιμ.) Δοκίμια οικονομικής θεωρίας και οικονομικής Πολιτικής, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.

128)Σταμάτης Γ.,(1991), Εισαγωγή στο Παραγωγή Εμπορευμάτων μέσω Εμπορευμάτων του Piero Sraffa, Παρουσίαση και κριτική της Νεορικαρδιανής Θεωρίας. Τρίτη έκδοση. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

129)Σταμάτης Γ.,(1992α), Ο Sraffa και η σχέση του με τον Ricardo και τον Marx. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

130)Σταμάτης Γ.,(1992β), Συμβολή στην Κριτική της Νεορικαρδιανής και της Νεοκλασικής Θεωρίας. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

131)Σταμάτης Γ.,(1995α), Προβλήματα θεωρίας γραμμικών συστημάτων παραγωγής τόμος 1ος :Βασικά ζητήματα. 2η βελτιωμένη έκδοση. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

132)Σταμάτης Γ.,(1995α), Προβλήματα θεωρίας γραμμικών συστημάτων παραγωγής, τόμος 2ος :Βασικά ζητήματα. 2η βελτιωμένη έκδοση. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα

133)Σταμάτης Γ.,(1996α), Περί της σύγκρισης δεδομένων γραμμικών συστημάτων παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους και της επιλογής της πλέον κερδοφόρας από αυτές. Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 18, σελ.5-17.

134)Σταμάτης Γ.,(1996γ), Η παραγωγή και η κατανομή του εισοδήματος. Συλλογή κειμένων- Επιμέλεια Γιώργος Σταμάτης. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

135)Σταμάτης Γ.,(1997), Κείμενα οικονομικής θεωρίας και πολιτικής, τόμος 5ος . Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

136)Σταμάτης Γ.,(1998), Θεωρία της Αξίας και της Υπεραξίας. Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

137)Σταμάτης Γ., Άνοιξη 1988 ,Georg Charasoff – Ένας πρωτοπόρος της θεωρίας των γραμμικών συστημάτων παραγωγής . Με ένα μαθηματικό σημείωμα του Αλέκου Τσίτσοβιτς , ΤΕΥΧΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ, Νο2 , σελ.3-63

138)Σταμάτης Γ., Για την ερμηνεία ορισμένων φαινομενικά παράδοξων μορφών της σχέσης μεταξύ ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας,Νο 7, Φθινόπωρο 1990 , σελ.101-120 .

139)Σταμάτης Γ. (1996), Κείμενα οικονομικής θεωρίας και πολιτικής, τόμος 4ος . Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

140)Σταμάτης Γ., Άνοιξη 1994, Γιατί με το τυπικό εμπόρευμα μεταβάλλεται η κατάταξη διασπώμενων ή μη διασπώμενων τεχνικών παραγωγής ως προς την

κερδοφορία τους . Με αφορμή ένα άρθρο του Θεόδωρου Μαριόλη , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Νο14 , σελ.29-64 .

141)Σταμάτης Γ., Άνοιξη 1996 , Ένας απλός τρόπος επίλυσης του γνωστού προβλήματος προσδιορισμού του μέγιστου ποσοστού κέρδους και ενός ίσου με αυτό ενιαίου υλικού ρυθμού μεγέθυνσης , το οποίο έθεσε και έλυσε ο John von Neumann , και μια κριτική θεώρηση της πραγμάτευσής του ως προβλήματος μεγιστοποίησης – ελαχιστοποίησης , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας , Νο18 , σελ.19-56.

142)Σταμάτης Γ., Φθινόπωρο 1996 , Κατάταξη τεχνικών και reswitching . Με αφορμή ένα άρθρο του Christian Bidard , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Νο19 , σελ.131-166.

143)Σταμάτης Γ., Φθινόπωρο 1994, Οι λόγοι για τους οποίους η κατάταξη γραμμικών τεχνικών παραγωγής μεταβάλλεται με την τυποποίηση των τιμών Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας , Νο15 ,, σελ.5-46.

144)Σταμάτης Γ., Άνοιξη 1996 , Περί της σύγκρισης δεδομένων γραμμικών τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους και της επιλογής της πλέον κερδοφόρας από αυτές , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Νο18 , σελ.5-18

145)Σταμάτης Γ., Άνοιξη 1997 , Περί μονοσήμαντης κατάταξης γραμμικών τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους ή τη φθήνια’’ τους , Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Νο20 , σελ.121-132

146) Σταμάτης Γ., Φθινόπωρο 1995, Περί της ‘‘ομαλής’’ συμπεριφοράς μη διασπώμενων και πολλαπλώς διασπώμενων συστημάτων σύνθετης παραγωγής, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, Νο17, σελ.73-137.

147) Σταμάτης Γ., Φθινόπωρο 1990, Για την ερμηνεία και την σημασία ορισμένων παράδοξων μορφών της σχέσης μεταξύ ονομαστικού ωρομισθίου και ποσοστού κέρδους, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 7, Αθήνα,

148) Σταμάτης Γ., Εισαγωγή στην πολιτική οικονομία. Β’ έκδοση, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα

149) Σταμάτης Γ., Φθινόπωρο 1989, Το αδύνατον μιας σύγκρισης τεχνικών παραγωγής ως προς την κερδοφορία τους και της διαπίστωσης μιας επαναχρησιμοποίησης τεχνικών, Τεύχη Πολιτικής Οικονομίας, τεύχος 5, Αθήνα,

150) Σταμάτης Γ., (1985), Εισαγωγή στην πολιτική οικονομία. Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ν.Σακκουλα, Αθήνα

151) Στεφανοπούλου Ζ. (2006), Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ PIERO SRAFFA ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ, Διδακτορική Διατριβή, Πάντειο Πανεπιστήμιο Κοινωνικών και πολιτικών επιστημών, Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης, Αθήνα